HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete

Gymnasieelevers möte med bokstavsymbolerna i algebra

Gymnasieelevers olika uppfattningar och svårigheter kring bokstavsymboler i algebra

High school student´s interpretation and difficulties of letter symbols in algebra

Författare: Ali Soltani Zamani
Handledare: Lennart Berg
Examinator: Anna Teledahl
Ämne/huvudområde: Pedagogiskt arbete/Matematik
Kurskod: PG 2066
Poäng: 15hp
Examinationsdatum: 170120

HÖGSKOLAN
DALARNA

Högskolan Dalarna – SE-791 88 Falun – Tel 023-77 80 00

Abstract

Det övergripande syftet med detta arbete är att ta reda på gymnasieelevers uppfattningar och missuppfattningar när de ska läsa, tolka och lösa uppgifter med algebraiska symboler. Arbetet fokuserar på elevernas svårigheter vilka upplevs olika i olika sammanhang såsom till exempel generalisering av tal, okänt tal och variabel. För att få svar på detta, intervjuades åtta gymnasieelever från olika årskurser och med skiftande algebrakunskaper. Resultatet blev att elever uppvisar olika svårigheter med algebraiska symboler, vilket stämmer överens med den forskning som är genomförd inom området. Detta ses som en följd av övergången från konkreta beräkningar i aritmetik till abstrakta och strukturerade beräkningar i algebra. Svårigheterna beror bland annat bero på att algebraiska symboler och tecken kan byta roll i ett algebraiskt uttryck medan elever brukar tolka dessa symboler endast ur *en* synvinkel. Elever ska därmed vara medvetna om symbolernas olika placeringar och dess egentliga innebörd. Slutsatsen banar då väg för lärare att arbeta utifrån olika utgångspunkter.

Nyckelord: algebra, elevens uppfattning av algebra, algebraiska symboler

Innehållsförteckning

1. Inledning

Varför måste elever lära sig algebra? Algebra är ett språk med vilket man kan uttrycka matematiska förhållanden (Samo, 2009, s.31). När elever i lågstadiet börjar lära sig räkna, räcker det med naturliga tal. Så småningom och för att kunna lösa svårare problem behöver de lära sig använda heltal, rationella tal och reella tal. Men lite senare när de ska kunna lösa matematiska problem behöver de lära sig räkna med symboler för tal. Därför behöver de lära sig algebra (Cederqvist et al., 2014, s.6).

Anledningen till att jag har valt detta område kan kopplas direkt till min senaste upplevelse på en gymnasieskola. Där genomförde jag undervisningen som lärarkandidat under alla mina tre VFU-perioder inom ämnet matematik. Min undervisning i matematik vände sig mot tre olika grupper. När min sista VFU började, skulle en av dessa grupper påbörja momentet algebra. I samråd med min handledare, började jag planera och genomföra undervisningen enligt läroplanen. Med utgångspunkt från min erfarenhet från förra terminen angående elevernas svårigheter i algebra, försökte jag att förklara så tydligt som möjligt så att eleverna skulle förstå vad en variabel är samt skillnaden mellan ett matematiskt uttryck och en ekvation. Jag hade hela tiden trott att eleverna har lärt sig att lösa ekvationer samt använda symboler för att tolka problemlösningsuppgifterna som jag gick igenom. Men efter att de gjorde ett prov i algebra, upptäckte jag att de flesta hade svårt att förstå vad frågorna handlade om. Elevernas resultat visade alltså att de hade stora svårigheter inom detta område.

Algebra är ett kraftfullt verktyg som kan användas i skolan för att förbereda elever inte bara för avancerade matematikkurser utan även för att kunna förstå omvärlden (Huntely et al., 2007, s.115). Skolan eftersträvar att elever bland annat genom detta verktyg ska vara förberedda för ett praktiskt liv. I algebraundervisningen kan elever utveckla sina kunskaper, kompetenser, problemlösningsförmåga, logiska och analytiska tänkande (Kling, 2016).

En del av läroplanens punkter för gymnasieskolan syftar på algebrans betydelse för elevernas utveckling. Även om mitt fokus ligger på gymnasieskolan, finns algebraundervisningen från och med grundskolans årskurs 1 i läroplanen. Det börjar med enkla konstruktioner i årskurs 1-3, sedan introduceras enkla obekanta variabler och symboler i årskurs 4-6, därefter fördjupar man sig i variabel- och symbolbegreppet i årskurs 7-9. Efter detta följer en djupare omfattning i gymnasiet för varje årskurs man läser. Mer detaljerad beskrivning av detta kommer att ges i bakgrundsdelen. I läroplanen för gymnasieskolan finns kraven att eleven ska kunna hantera ”algebraiska uttryck och för karaktärsämnena relevanta formler”, (Skolverket, 2011b, s.98).

Svenska elever uppvisade låga prestationer på matematikdelen i PISA-provet 2012, jämfört med andra EU-länder. Detta handlar mest om algebra och elevernas förmåga att använda algebra som ett verktyg för att kunna tolka problemen samt bearbeta och göra om det till algebraiska uttryck. Det dåliga resultatet har flera olika anledningar men en förklaring kan vara elevernas otillräckliga kunskaper inom området algebra (Skolverket, 2013). Under arbetet med den här uppsatsen kom resultatet av det nya

PISA-provet. I PISA-2015 ingår också gemensam problemlösning där elevernas problemlösningsförmåga testas. Tillsammans med problemlösning, testas också elevers olika förmågor i algebra, bland annat att förstå symboler och manipulera dem i ett algebraiskt uttryck eller lösa ekvationer. Dessutom uppskattas elevers matematiska språkförståelse utifrån algebra. Även om resultatet har förbättrats sedan 2010 och nu ligger på OECD-genomsnittet, finns fortfarande stort utrymme för förbättring (Skolverket, 2016).

Trots att eleverna har läst algebra under alla år i skolgången, har de ständigt problem med bokstavsymboler. Därför kan det vara intressant och lärorikt att undersöka anledningen till all den problematik som finns hos de flesta eleverna med algebra. För mig som matematiklärare och för alla matematiklärare, kan det vara ett problem av intresse att undersöka de vanligaste svårigheterna och uppfattningarna som eleverna har om detta. Inte bara deras uppfattningar utan även deras missuppfattningar kring symbolerna måste undersökas och bearbetas.

1.1 Syftet

Syftet med detta examensarbete är att få kunskap om elevers uppfattning av bokstavsymboler i algebraiska beräkningar och vilka svårigheter de upplever när de ställs inför algebrauppgifter i matematik.

1.2 Frågeställningar

Följande huvudfrågeställningar ska beröras:

- Hur tolkar elever bokstavssymboler i algebra?
- Vilka svårigheter upplever elever med bokstavsymboler?

2. Bakgrund

Denna studie utgår från vetenskaplig forskning om elevers uppfattning av bokstavsymboler i algebra. Nedan följer en kort och sammanfattad beskrivning av det som litteraturen behandlar.

2.1 Algebras historia och definition

Ordet algebra *"al-djabr"* härstammar från det arabiska språket och har olika betydelser, bland annat betyder det räkning där det huvudsakligen används symboler istället av siffror. Det är ett av matematikens grundläggande områden, vilket är en generaliserad form av aritmetiken. Just för generaliseringens skull, används symboler och bokstäver för att presentera allmängripande fakta och lagar (Samo, 2009, s.2).

Vad är algebra och varför har den funnits från länge sedan? Utvecklingen av algebra inleds c:a 2000 f.Kr. från Mesopotamien och Indien. Den verbala algebran används framförallt i en gammal version av algebra som kallas retorisk algebra. Där berättade man ett problem i ord och sedan försökte man komma fram till en önskad lösning. Att lösa problem på detta sätt har efter hand lett till generella metoder i problemlösning, där man letade efter ett tal ”*hemliga talet*” som utgjorde lösningen. Metoden som vi kallar för ekvationslösning härstammar härifrån (Persson, 2010, s.33).

Fram till 1600-talet började algebraiska symboler användas. Dessa ersatt den verbala algebran och det hemliga talet i gengäld. Algebraspråket utvecklades samtidigt som de olika räknesätten infördes i aritmetiken och därmed blev algebran mer sofistikerad (Persson, 2010, s.33). Naturvetarna ville använda ett verktyg med vilket de kunde visa sambanden mellan olika storheter och generalisera beräkningarna (ibid., s.33). Med framväxten av den abstrakta algebran under 1800-talet, utvecklades algebran ännu mer, och då blev den en självständig gren i matematiken (ibid., s.34).

Skillnaden mellan algebran och aritmetiken kan förklaras utifrån det semiotiska perspektivet – det vill säga utifrån läran om tecken och dess betydelse i samhället och matematiken, där symbolerna är kontextberoende och varieras syntaxmässigt (Persson, 2010, s.81). Till skillnad från aritmetiken som är konkret och har ett procedurbaserat system, är algebran abstrakt och mer strukturell. Denna fundamentala skillnad förklaras eller beskrivs genom begreppet ”cognitive gap”, vilket syftar på de kognitiva hinder som kan uppstå i elevernas möte med algebra (Konstantinos & Vosniadou, 2010, s.3).

2.2 Algebra och de lärandeteoretiska perspektiven

Elever är vana att använda siffror och tal i matematik men när de ska räkna med x och y, som oftast används i algebra, då börjar de bli oroliga (Konstantinos & Vosniadou, 2010, s.2). Det kan bero på speciella svårigheter i form av kognitiva hinder (Persson, 2010, s.45). De kognitiva hindren kan överbryggas av lärare genom en fördjupning i olika lärandeteorier. Enligt kognitivismen är människan en informationsbehandlad varelse som kan ”hämta in” och ”koda ” information genom sitt sinne (Lundgren et al., 2013, s.271). I enlighet med detta har eleverna redan från årskurs 1 i grundskolan en kognitiv förmåga att behandla information. Även den kognitiva förmågan handlar om problemlösning och beslutsfattande vilket kan kopplas till området algebra. Detta är precis något som påminner om Piagets teori, ”han intresserade sig för hur kognitiva funktioner utvecklas” (ibid., s.277). Framför allt studerade Piaget hur kunskapen utvecklades hos barn. Detta kallade han genetisk epistemologi som betraktar tänkandet som en process och inte endast som en produkt (ibid., s. 276). Detta kan också framträda i algebra där elevers svar (produkt) är ett resultat av deras uppfattningar och behandling av information (process).

Persson (2010) skriver i sin avhandling om vikten av den kognitiva synen på lärande. Han pekar på vissa forskare, bland annat ”en fransk forskargrupp (Artigue, Assude, Grugeon & Lenfant, 2001), som har skapat ett multidimensionellt ramverk, som delar in forskningen i en *epistemologisk*, en *kognitiv* och en *didaktisk dimension*” (Persson, 2010, s.32). Detta system kallas för Multidimensional Grid for Professional Competence in elementary Algebra (MGPCA), vilket är en utgångspunkt för indelning av forskningen kring algebralärande. Persson (2010) hävdar också att detta system belyser lärarens kunskaper och färdigheter i algebra och kan utnyttjas vid lärarstudenters möte med algebra och deras vidareutveckling när det gäller egna kunskaper, färdigheter och den praktiska tillämpningen i klassrummet. De tre dimensionerna innefattar följande: (ibid., s.32):

Epistemologisk dimension:

- Algebrans innehåll
- Algebrans struktur
- Algebrans roll och plats i matematiken
- Kopplingarna mellan algebra och andra matematikområden och fysiska fenomen
- Egenskaperna hos värdefulla algebrauppgifter avsedda för elever.

Kognitiv dimension:

- Utvecklingen av elevers algebraiska tänkande
- Elevers tolkning av algebraiska symboler, notationer och begrepp
- Arten av elevers missförstånd och svårigheter i algebra
- Olika vägar till algebra och algebrakunskaper
- Väsentliga lärandeteorier
- Vägar att motivera elever.

Didaktisk dimension:

- Läroplanens innehåll och mål inom algebra för den aktuella utbildningsnivån
- Progressionen av algebraundervisningen genom samtliga nivåer
- Olika arbetssätt och metoder i klassrumsarbetet
- Användningen av olika läranderesurser, som läroböcker, konkret materiel, teknologiska verktyg, IKT, etc.
- Naturen hos och utvecklingen av en effektiv klassrumsdiskurs. (Persson, 2010, s. 32)

Det här arbetet syftar mest på den andra dimensionen, alltså den kognitiva dimensionen. För att kasta ljus på elevers tolkning av algebraiska symboler, måste man ta hänsyn till alla kriterierna under den andra dimensionen.

Om man tittar närmare på den kognitiva dimensionen, så finns det en del förmågor, som kan belysas genom de väsentliga lärandeteorierna. Det finns en koppling mellan den historiska övergången från aritmetik till algebra och elevers utvecklingsprocess i algebraiska beräkningar. Historiskt sett uppkommer algebra lite senare än aritmetiken och eleverna introduceras till dessa begrepp i samma ordning. Med andra ord finns det två abstraktionssteg som kommer efter varandra – eleverna lär sig att räkna med siffror i skolans tidigare år och lite senare i högstadiet börjar de räkna med symboler och bokstäver (Persson, 2010, s.34).

För att underlätta övergången från aritmetik till algebra kan man hänvisa till Vygotskijs lärandeteori som handlar om att man kan utvecklas i ett visst område när det finns stöttning eller handledning tillgänglig i området. Med andra ord kan man nå den närmaste utvecklingszonen med hjälp av handledning, vilket i sin tur kan möjliggöras genom att utgå från Piagets syn på lärande. Det vill säga att man måste utgå från det stadiet elever befinner sig i för att utvecklingen ska äga rum. Om vi antar att elever behärskar aritmetiken och vill börja lära sig algebra då kan man betrakta elevers algebraiska symboluppfattningar som deras nuvarande stadium. Den närmaste utvecklingszonen är då eleverna förstår symbolernas olika roll. Stöttningen ska inledas baserad på elevernas befintliga nivåer för att utvecklingen till den närmaste utvecklingszonen ska inträffa. Därmed är eleverna näst intill att förstå grunderna i algebra (Lundgren et al., 2013, s.305). Dessa kognitiva svårigheter kan sammanfattningsvis övervinnas genom att tillämpa både Piagets och Vygotskis lärandeteorier.

I samband med detta är det viktigt att förstå hur elever tolkar algebraiska symboler för att kunna bygga på deras algebraiska kunskaper. Mycket forskning har bedrivits om elevers symboluppfattningar med konkreta förslag på angreppssätt.

2.2 Algebra i läroplan

Algebra är en central del i läroplanen för grund- och gymnasieskolan. I läroplanen för grundskolan betonas vikten av algebra redan från årskurs 1. Det finns en del kunskapskrav i punktform som eleverna ska ta till sig när det gäller algebra. Nedan följer de centrala innehållen av algebraundervisning stegvis enligt olika läroplaner såväl i grundskolan som i gymnasieskolan:

Algebra i årskurs 1-3:

- Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse.
- Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas. (Skolverket , 2011a, s.56)

Algebra i årskurs 4-6:

- Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
- Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för enkel ekvationslösning.
- Hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas. (Skolverket , 2011a, s.57)

Algebra i årskurs 7-9:

- Innebörden av variabel-begreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.
- Algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för ekvationslösning. (Skolverket , 2011a, s.59)

Algebra i gymnasieskolan:

- Hantering av algebraiska uttryck och för karaktärsämnena relevanta formler samt metoder för att lösa linjära ekvationer. (Skolverket , 2011b, s.93)

- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa exponentiell- och andragradsekvationer samt linjära ekvationssystem. (Skolverket , 2011b, s.111)

- Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.

- Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan. (Skolverket , 2011b, s.122)

Det finns också en del kriterier i kunskapskraven som visar hur eleverna ska kunna använda detta verktyg i matematik.

> Eleven kan formulera, analysera och lösa praxisnära matematiska problem av komplex karaktär. Dessa problem inkluderar era begrepp och kräver avancerade tolkningar. I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med retorisk algebra, (Skolverket , 2011b, s.96).

Det finns vissa förmågor i styrdokumenten som är mer centrala i algebra. För att elever ska kunna lösa de algebraiska problemen på en högre abstraktionsnivå måste de utveckla vissa förmågor med särskild vikt på procedur-, resonemangs- och problemlösningsförmåga (Persson, 2010, s.2). Procedurförmågan definieras som genomförande av beräkningar i bestämda steg, medan resonemangsförmågan är att kunna analysera, överblicka och resonera kring giltigheten av beräkningar (Hansson, 2013, s.1). Resonemangsförmågan är relevant i nästan alla algebrauppgifter, där man kan bedöma giltigheten av matematiska påståenden. Det kan exempelvis handla om validiteten av regler och satser, rimligheten av ett svar på en fråga eller uppgift, eller sakligheten av en problemställning. ”*Resonemangsförmåga omfattar även en kreativ komponent i att formulera, förbättra, generalisera och undersöka hypoteser och sammanlänka olika kunskaper och idéer*” (Hansson, 2013, s.2).

Resonemangsförmågan omfattar både induktiva och deduktiva resonemang, där deduktiva resonemang syftar mot högre abstraktionsnivå och innebär att eleven ska kunna bevisa giltigheten av et matematiskt påstående utifrån givna regler och kända förhållanden (Hansson, 2013, s.2). Detta är väsentligt i samband med de algebraiska problemlösningarna. Däremot är induktiva resonemang vanliga i samband med antagande och hypotes, där man skapar allmänna teorier utifrån observationer eller experiment (Hansson, 2013, s.2).

2.3 Algebras beståndsdelar: symboler, tecken och uttryck

Precis som språket, vars byggstenar är dess bokstäver, är bokstavsymbolerna och olika tecken (+, -, =, /,…) beståndsdelar i algebra (Persson, 2010, s.35). Elevernas utvecklingsprocess börjar med de enklaste aritmetiska symboler men så småningom dessa tecken kombineras med bokstäver och parenteser i algebra.

Ett av algebrans viktigaste verktyg är bokstavssymboler och hantering av symboler. Detta används först och främst för att generalisera aritmetiken. För att förstå algebra, behöver man en teoretisk förståelse om symbolanvändningen (Samo, 2009, s.1). Ett symboliskt uttryck kan syfta på olika innebörder, beroende på sammanhanget det används i. Till exempel kan uttrycket $3(x+5)-1$ uppfattas olika: som en rad symboler, en beskrivning av en beräkningsprocess, ett tal, en funktion eller ett uttryck (Huntley et al., 2007, s.116). Att olika innebörder kan kopplas till bokstavssymboler anses av Samo (2009) som en av huvudorsakerna till elevernas svårigheter och missuppfattningar i algebra. ”*Student´s difficulties in solving equations stem from their lack of understanding the structure of algebra*” (Huntley et al., 2007, s.116). Elevernas basproblem hävdas alltså ligga i att de inte förstår algebrans struktur och de manipulativa processerna. Det vill säga att en problemlösning eller en ekvation tar sin riktning i strukturen hos lösningen. (Samo, 2009, s.2).

2.3.1 Bokstavssymboler

Enligt Persson (2010) hävdar några forskare att bokstavssymbolerna har olika innebörd beroende på var de används. Exempelvis kan samma bokstav uppträda i en ekvation, formel eller ett uttryck. Han påstår att det algebraiska språket liknar det vanliga språket då den uppfyller vissa viktiga drag. Han menar att vissa komponenter är angelägna i språket, till exempel semantik (nivåerna och betydelse) och pragmatik (relationen mellan tecken och deras användare). Dessa finns också i det numerisk-algebraiska teckensystemet som kallas för algebra-språket (Persson, 2010, s.35). Vissa semantiska drag av dessa symboler är deras olika betydelser i de tre algebraiska sammanhangen som okänt tal, variabel eller generaliserat tal (ibid., s.36). Nedan finns det en definition av dessa områden.

Ett okänt tal är ett tal som man kan placera i ett matematiskt samband istället för bokstavssymbolen i ett matematiskt problem. Detta möjliggör att lösa det matematiska problemet. Till exempel är $a+b=10$ ett matematiskt samband där bokstäverna a och b kan anta vilka värden som helst. Därför betraktas bokstäverna a och b som okända tal. Variabel är en storhet som varierar och kan vara beroende eller oberoende i ett funktionssamband. Man kan bestämma värdet av den beroende variabeln då värdet av den oberoende är givet och tvärtom. I funktionen $y=2x+1$, kan den beroende variabeln y bestämmas då den oberoende variabeln är t.ex. $x=3$. Ett generaliserat tal är en symbol som representerar regler och metoder i sekvenser. Där handlar det om att eleverna ska kunna känna igen mönster och upptäcka generella satser (Persson, 2010, s.36).

Förståelse av bokstavsymboler klassificeras även enligt Persson (2010):

Förståelsen av bokstavssymbolen som *okänt tal* kräver att eleven kan:

- känna igen och identifiera, i en problemsituation, en okänd storhet som kan bestämmas genom att villkoren i problemet används.
- tolka symbolerna som uppträder i en ekvation som representerande specifika värden.
- ersätta bokstavssymbolen med det eller de värde som gör ekvationen sann.

- bestämma det okända talet som uppträder i en ekvation eller problem genom att använda behövliga algebraiska och/eller aritmetiska operationer.
- symbolisera de okända storheterna som identifieras i en specifik situation och använda detta för att formulera ekvationer.

Förståelsen av bokstavssymbolen som *tal i ett funktionssamband* kräver att eleven kan:

- upptäcka kopplingen mellan två av varandra beroende storheter, oberoende av vilken representation som används (verbal, tabell, graf, symboliskt uttryck).
- bestämma värdet av den beroende variabeln då värdet av den oberoende är givet.
- bestämma värdet av den oberoende variabeln då värdet av den beroende är givet.
- upptäcka samvariationen mellan variablerna i ett samband, oberoende av vilken representation som används (verbal, tabell, graf, symboliskt uttryck).
- bestämma variationsintervallet av en variabel om intervallet är givet för den andra.
- symbolisera funktionssambandet baserat på analysen av de data som getts i problemet.

Förståelsen av bokstavssymbolen som *generaliserat tal* kräver att eleven kan:

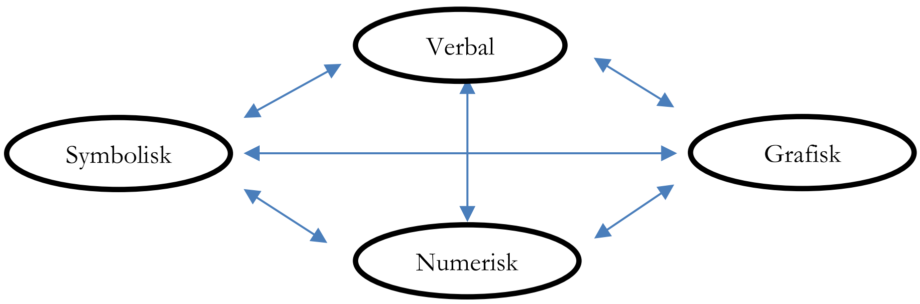
- känna igen mönster samt uppfatta regler och metoder i sekvenser och i familjer av problem.
- tolka en symbol som representerande en generell, obestämd storhet, som kan anta vilket värde som helst (variabel).
- bestämma generella regler och generella metoder i metoder i sekvenser och i familjer av problem.
- manipulera (förenkla, utveckla) uttryck med variabeln.
- symbolisera generella satser, regler eller metoder. (Ursini & Trigueros, 2001, citerade i Persson, 2010, s.36-37)

Denna modell visar tydligt hur eleven måste gå till väga för att kunna förstå och hantera bokstavsymbolerna i algebra.

2.4 Att nå full kompetens

Förutom en bra förståelse av bokstavsymbolerna i algebra på alla tre sätt som Persson (2010) beskriver ovan, är det också nödvändigt att elever ska kunna växla mellan dessa förståelser samt ha ett flexibelt perspektiv av algebraiska problem (Huntley et al., 2007, s.115). Detta perspektiv är en funktion av två oberoende parametrar: *mångsidighet* och *anpassningsförmåga*.

”Both versatility and adaptivity must be examined to assess a student´s algebraic competence” (Sfrard & Linchevski, 1994, citerad i Huntley et al., 2007, s.115)



Figur 1. Fyra sätt att framställa algebraisk uttryck

Detta är något som Persson (2010) anser nödvändigt vid förståelse av bokstavsymboler i ett funktionssamband. En elevs algebraiska kunskaper är *mångsidiga* om eleven kan se ett uttryck på annorlunda sätt. Till exempel om eleven i något sammanhang möter ekvationen $x^2 + 3x - 6 = 0$, ska eleven kunna uppfatta att bokstavsymbolen x kan vara nollställe utifrån den numeriska aspekten, att x skär x-axeln utifrån den grafiska aspekten, att x är en variabel utifrån symboliken samt att kunna koppla detta verbalt till något sammanhang. Enligt figur 1 är det på denna nivå eleven kan representera dessa algebraiska uttryck. Det syftar alltså på de matematiska verktyg som eleven har och kan använda. Däremot är en elevs algebraiska kunskaper *anpassningsbara* om eleven är i stånd till att anpassa sina perspektiv till uppgiften. Med andra ord kan eleven välja vilka verktyg som ska användas och använda dessa verktyg på olika sätt. Huntley et al. (2007) betonar att dessa faktorer ska finnas i eleverna när de jobbar med algebra. Elever ska kunna bestämma vilka metoder som är lämpliga att använda i olika algebrauppgifter och ska kunna använda flera metoder och flera verktyg för att nå fram till ett svar (Huntley et al., 2007, s.116).

2.6 Elevernas förståelsesvårigheter

Eleverna förstår bokstavsymboler på olika sätt. Förutom kognitiva svårigheter finns det vissa tänkbara missuppfattningar som kan uppstå. Elever kan exempelvis tolka *10m* som tio meter i ett algebraisk uttryck, vilket egentligen innebär 10 multiplicerad med *m* som är en variabel (Samo, 2009, s.5).

> Prior research has shown that some students have no idea about how to interpret such literal symbols, thinking that they stand for abbreviated names of people or object or as coded numbers with vales corresponding to their positions in the alphabet, (Booth, Kuchemann, Wagner, Samo, 2009, s.5).

En vanlig missuppfattning hos eleverna är att de inte kan skilja mellan ett algebraiskt uttryck och en ekvation. Enligt Huntley et al. (2007) ska förståelse av ett uttryck erövras först, annars blir det svårt för elever att förstå symbolernas betydelse och dess hantering i de algebraiska ekvationerna (Huntley et al., 2007, s.116). Eleverna tenderar att ersätta de algebraiska symbolerna med endast naturliga tal, oavsett om denna är variabel i en ekvation eller ett okänt tal som dyker upp i ett uttryck (Konstantinus & Vosniadou, 2012, s.1).

”*There is a natural number bias that influences student´s substitutions of literal symbol in algebra causing further difficulties*”, (Konstantinus & Vosniadou, 2012, s.2). Med andra ord har elevernas missuppfattningar av variabel sina rötter i deras grundläggande kunskaper om vanliga tal (Konstantinus & Vosniadou, 2012, s.1).

En annan missuppfattning hos elever, när de tolkar en variabel, är att de anser att det bara finns *ett* tal som kan ersätta denna variabel (Samo, 2009, s.4). ”*Understanding the concept of variable provides the basis from transition from arithmetic to algebra and is necessary for the meaning full use of all advance Mathematics*” (Samo, 2009, s.5). Till exempel kan eleven skriva en linjes ekvation på detta sätt $3 = -2.4 - 14$, när de ska bestämma en linjes ekvation som passerar punkten $(3, -2)$ och $k = 4$.

Çelik och Güneş (2013) relaterar elevers förståelsesvårigheter i algebra till deras brister i att förstå algebrans språk, vilket består av litterära symboler som ”*x, y, a , b,…*”. När eleverna fastnar eller misstolkar dessa symboler, uppstår det olika problem när de ska jobba med algebraiska uttryck, algebraiska operationer eller problemlösning i algebra.

Christou och Vosniadou (2012) har kopplat huvudsvårigheten i övergången från aritmetik till algebra till symbolanvändningen. Aritmetiken har en konkret och baserad på procedurer, medan algebran är mer abstrakt och bygger på strukturer. Aritmetiken undervisas om och fördjupas innan algebran, och när algebraiska begrepp introduceras, kan elever lätt förvirras och blanda ihop saker. De kan generalisera och dra egna slutsatser såsom att tro att litterära symboler i uppgifterna representerar förkortningar av människors namn eller objekt, eller så kan de uppfatta en symbol som ett krypterat tal, vars värde motsvarar bokstavens placering i alfabetet (Christou & Vosniadou, 2012, s.2).

Enligt Çelik och Güneş (2013) brukar elever tolka bokstavsymboler som objekt istället för antalet objekt eftersom bokstavsymboler brukar användas för att representera ett objekt. Till exempel när de möter problemet: *en blå penna kostar 5kr och en röd penna kostar 4kr. Anita köper ett antal pennor som sammanlagt kostar 45. Hur kan hon beskriva detta med hjälp av ett uttryck?* Elever kan då antingen utgå från ett objekttänkande sätt och svara $b + r = 45$
$(r{:}\,röda\ pennor, b{:}\,blåa\ pennor)$, eller tänka att b och r är antalet av pennor (Çelik och Güneş, 2013, s.1169).

En annan misstolkning kan uppstå när elever vill översätta ord som finns i en problemlösningsuppgift till algebraiska symboler (Samo, 2009, s.1). När eleverna blir tillfrågade att lösa en problemlösningsuppgift uppstår det olika fel under processen. Följande problem är ett exempel: ”Amanda är 4 år yngre än Diana. Summan av deras åldrar är 28. Hur gammal är Amanda?” (Egodawette, 2009, s.103). Eleverna misslyckas att ställa upp ett uttryck för Amanda och Dianas åldrar. De försöker att *översätta* problemet ord för ord, vilket ger ett fel tolkning till problemet. Några elever tolkar ”4 år yngre” som $4 - x$ istället för $x - 4$.

$$4 - x$$

4år yngre än Diana

Därmed kan de inte vara i stånd till att se det numeriska förhållandet mellan de två kvantiteterna x och $x - 4$ (ibid.).

En annan möjlig misstolkning av symbolerna i algebra har Samo (2009) nämnt, vilken påminner om det romerska talsystemet. Till exempel kan $10h$ uppfattas som ”10 mindre än h”, liksom IV betyder ” en mindre än fem”. En matematiklärare kan kanske aldrig förvänta sig att elever ska tänka på detta ”märkliga” sätt, eftersom detta kan uppfattas som ännu mer komplicerat av läraren (Samo, 2009, s.4).

Egodawatte (2009) påpekar att det också finns en del psykologiska faktorer som kan leda till missuppfattningar. Hans resonemang visar att de huvudsakliga problemen är:

> Intuitive assumptions, failure to understand the syntax of algebra, analogies with other familiar symbol systems such as the english alphabet and interference from arithmetic. There were other psychological factors such as carelessness, anxiety, overconfidence and lack of motivation, (Egodawatte, 2009, s.101).

Persson (2010) nämner också psykologiska affektiva faktorer som elevers attityder, intresse, självförtroende och socialt klimat (Persson, 2010, s.59).

Sammanfattningsvis har forskningen nått fram till att det finns ett brett spektrum av orsaker som leder till att elever får problem med symboler i algebra. Elevers intuitiva antaganden, bristande kunskaper om algebrans egenskaper, förväxling med liknande symboler från andra ämnen eller förväxling med aritmetik är alla exempel som elever kan konfronteras med i algebrauppgifter. Även psykologiska faktorer har identifierats som orsak till problem och missförstånd i algebra.

3. Material och metoder

För att besvara frågeställningarna som presenterades ovan utfördes några kvalitativa intervjuer med utgångspunkt i vissa intervjufrågor som ställdes till gymnasielever från olika årskurser. Intervjufrågorna finns längst ner som bilaga 1.
Det har genomförts en analys av intervjuerna enligt forskning i bakgrunddelen som tidigare har presenterats. Denna metod förklarar hur man hämtar in, organiserar och tolkar information (Larsen, 2009, s.17).

3.1 Undersökningsobjektet. Vad? Hur skapas ett urval?

Undersökningsobjektet är förhållandet mellan elev och innehåll, alltså hur elever uppfattar algebraiska symboler. Urvalet kommer att ske icke-sannolikt, eftersom i en kvalitativ undersökning ligger överförbarheten mer i fokus än generaliserbarheten. Val av elever kommer att ske på ett godtyckligt sätt – jag väljer alltså mina informanter enligt min egen bedömning (Larsen, 2009, s.77).

Jag kommer med andra ord intervjua elever från olika program och årskurser i gymnasiet. Min studie har gjorts i ett yrkesgymnasium där eleverna läser olika program såsom el, VVS, ekonomi osv.

3.2 Empiri insamling

Intervjufrågorna vänder sig mot elever som läser olika yrkesprogram. Yrkeselever har enbart en obligatorisk matematikkurs som krävs för att få en yrkesexamen. Det är Matematik 1a och detta brukar eleverna läsa i årskurs 1. En del som saknar betyg i matematik från grundskolan, läser grundskolans matematik i årskurs 1, sedan fortsätter de med matematik 1a i årskurs 2.

Mina informanter består av 4 flickor och 4 pojkar:

- en elev från årskurs 1, läser grundskolans matematik
- två elever från årskurs 1, läser matematik 1a
- en elev från årskurs 1, har betyg i matematik 1a, och även i högre matematikkurser.
- en elev från årskurs 2, har fortfarande inget godkänt betyg i matematik 1a
- en elev från årskurs 2, har fått betyg i matematik 1a förra året
- två elever från årskurs 3, har fått betyg i matematik 1a för två år sedan.

Jag var tvungen att intervjua fler elever än planerat, eftersom de flesta eleverna hade så litet att säga. För alla elever har jag förklarat att intervjuerna är frivilliga, anonyma och görs i utbildningssyfte. Som hjälpmedel har jag använt mig av tavlan när jag skulle förmedla en idé eller tanke utan att läsa högt. intervjuerna varade mellan 20-35 minuter.

3.3 Bearbetning, analys och tolkning

Jag kommer att dela upp det samlade materialet utifrån intervjufrågorna. Sedan kommer jag att göra en klassificering av textutdrag för att belysa en bestämd frågeställning (Larsen, 2009, s.104). Jag kommer därefter att jämföra mina informanters svar såväl med varandra som med forskning. En bearbetning av mitt resultat kommer att genomföras med utgångspunkt i Persson och Kuchemanns kategorisering av bokstavsymboler.

Många forskare har försökt kategorisera elevernas symboluppfattning i algebra. Çelik och Güneş (2013) refererar till den berömda forskaren inom algebra Kuchemann (1998) som indelar elevernas förståelse av algebrasymboler i följande kategorier:

1. Bokstavssymbolen värderas, vilket betyder att algebraiska uppgifter behandlas på liknande sätt som i vanliga aritmetiska uppgifter.

2. Bokstavssymbolen ignoreras, vilket innebär att eleverna inte tar hänsyn till symbolen som är med i uttrycket när de utför räkneoperationer.

3. Bokstavssymbolerna behandlas som objekt, där eleverna uppfattar symboler som representanter för objekt istället för antalet av objekt.

4. Bokstavssymbolen betraktas som ett okänt tal, som är en symbol som kan placeras istället för det man söker, när man ska lösa en uppgift.

5. Bokstavssymbolen betraktas som generellt tal, där vilket tal som helst kan ersätta symbolen.

6. Bokstavssymbolen tolkas som variabel, vilket är ett tal vars värde kan variera beroende på sammanhanget (Çelik & Güneş, 2013, s.1169).

Där de tre första är elevernas missuppfattningar och de tre sista är den egentliga betydelsen av symbolerna vilket kan relateras till Perssons tre klassifikationer av en rätt förståelse av bokstavsymboler (Çelik & Güneş, 2013, s.1169).

4. Resultat och analys

De flesta av eleverna som intervjuades hade svaga matematiska förkunskaper med sig från grundskolan. Majoriteten var inte heller speciellt intresserade av matematik och tyckte att det var ett tråkigt och meningslöst ämne. Flera elever som redan var klara med matematikkurserna menade att det inte fanns någon nytta med algebra. De menade att de aldrig hade stött på det i vanliga livet och nog aldrig kommer att göra det heller. De enda elever som hade positiva attityder till matematik var de som presterade bra i ämnet (2 elever av de 8 som intervjuades).

4.1 Elevernas kunskap om algebra i helhet

Eleverna gav varierade svar på de första 6 intervjufrågorna som handlar om algebra i helhet och betydelse av bokstaven x i ett uttryck. Hälften av dem visste inte ens vad ordet algebra syftar på eller vad algebra innebär. En del kopplade algebra till x och y, andra kopplade det till ekvationer. De flesta hade inte så mycket att säga om algebra. Därför hade jag förberett mig att skriva ett algebraiskt uttryck, så att några tankar skulle sättas igång hos informanterna.

När eleverna blev tillfrågade att definiera x, var nästan alla överens att det var ett okänt värde, men när de skulle ge exempel på tal som x kan vara, var de flesta osäkra och försiktiga. De föreslog några värden begränsade till naturliga tal. De trodde nämligen att x bara kan symbolisera naturliga tal. Jag bad dem att exemplifiera gång på gång, varje gång föreslog de ett naturligt tal, inget negativt - eller bråktal t.ex.

4.2 Elevernas uppfattning av algebraiska symboler

Frågor 7 till 9 har ställts för att belysa elevernas uppfattning av okänt tal. Eleverna ska beskriva uttrycket $x + 5$ med vanliga ord i fråga 7. Även om de svarade rätt på att x är ett okänt tal, var det svårt för dem att faktiskt använda det som okänt. En elev svarade direkt att det borde vara 6 vilket syftar till kuchemanns (1981) första kategori där algebraiska uppgifter behandlas på liknande sätt som i aritmetiska uppgifter. En annan elev föreslog att uttrycket representerade ett tal som är fem gånger så mycket, men han kunde inte exemplifiera eller förklara sitt svar. En enda elev svarade att det måste vara ett tal som är 5 enheter mer än x. Just den eleven har läst flera matematikkurser i andra skolor och har därmed en bra grund i algebra och andra områden i matematik. Elevens rätt förståelse av okänt tal kan då kopplas till Kuchemanns (1981) fjärde kategori.

Något annat som framkom i intervjuerna var att eleverna saknade insikt om att den valda symbolen inte har något fast värde i algebraiska uttryck – att symbolen i sig inte spelar någon roll. De flesta trodde nämligen att x och y i uttrycken $x + 5$ och $y + 5$ i fråga 9, måste ha olika värden. En elev ansåg att x måste vara mindre än y, medan en annan hävdade att de var ojämförbara. En tredje elev var säker på att x och y representerar olika saker, som till exempel bananer och äpplen. Eleverna värderade bokstavsymbolerna enligt Kuchemanns första kategori där eleverna utser ett slumpvist tal till symbolen omedelbart.

Frågan om vilket av uttrycken $5 + x$ och $5x$ som är större ledde till en del diskussioner. Syftet med denna fråga är att testa elevernas kunskap och uppfattning av variabel vilket kan kopplas till kuchemanns sjätte kategori. En del tyckte att det var omöjligt att svara på fråga 10 eftersom det berodde på x -värdet. Även om detta faktiskt var rätt svar, var det tydligt att de inte riktigt visste varför, eftersom de inte kunde komma med konkreta exempel. Två elever provade sig fram med värdet $x = 2$ och konstaterade att $5x$ måste vara större. Ett par andra elever valde $x = 1$ och svarade bestämt att $5 + x$ måste vara större. Detta betyder att dessa elever uppfattade x som ett bestämt tal och inte som en variabel.

I fråga 11 ska elever bestämma längden av den andra delen av ett rep när den första delen är x meter lång och hela repet är 7 meter lång. Bara en elev kunde resonera sig fram till det korrekta svaret. Symbolen x hade förvirrat de flesta eleverna. I början påstod de flesta att det inte är möjligt att besvara uppgiften. Efter en stunds tänkande kom flera elever fram till att svaret måste vara hälften av 7, alltså 3,5 meter. Under senare diskussion om uppgiften höll alla med att det inte behövde vara så. Det står ingenstans i uppgiften att repet är uppdelat i två lika långa delar. Eleverna ignorerade bokstavsymbolen x i uppgiften precis som Kuchemann (1981) hävdar i sin andra kategori. En annan elev uppfattade att x är ett okänt tal som måste hittas och sedan divideras med 2 för att få svaret. Såklart fick han aldrig fram ett svar trots at han fick tid till att försöka.

När jag såg att eleverna fastnade i denna uppgift presenterade jag tre svarsalternativ i fråga 12, varav ett är rätt. Jag blev förvånad över att eleverna inte alls var beredda att acceptera dessa svar. Alla (förutom en) förväntade sig med säkerhet ett svar med ett bestämt värde. En elev krävde en förklaring från mig av hur man kunde mäta $7 - x$ eller $7x$ i verkligheten.

Syftet med att ställa fråga 13 var att testa elevernas förståelse av generalisering samtidigt som de ska kunna förstå symbolen n som ett generellt tal och skriva en formel. Nedan finns en figur som ökar antalet figurer varje gång.

Figur 1. ■■ ■■■
Figur 2. ■■ ■■■ ■■■
Figur 3. ■■ ■■■ ■■■ ■■■

Eleverna ska ta reda på hur många kvadrater som figur 8 har, och sedan dra en slutsats kring hur många kvadrater som finns i figur n.

Nästan alla elever försökte att svara på den första deluppgiften bildmässigt. Det vill säga genom att rita ännu fler kvadrater i nästa steg för att ta reda på antal kvadrater i figur 8. Men när den andra delen av frågan kom, då började de tänka på symbolen n, och då visste de inte hur man skulle komma fram till den allmänna formeln. Det var bara en elev som skrev $2n + 3$ som svar, vilket visar elevens svårigheter i problemlösning- och resonemangsförmågan. Detta kan kopplas till Kuchemanns femte kategori där bokstavssymbolen betraktas som generellt tal.

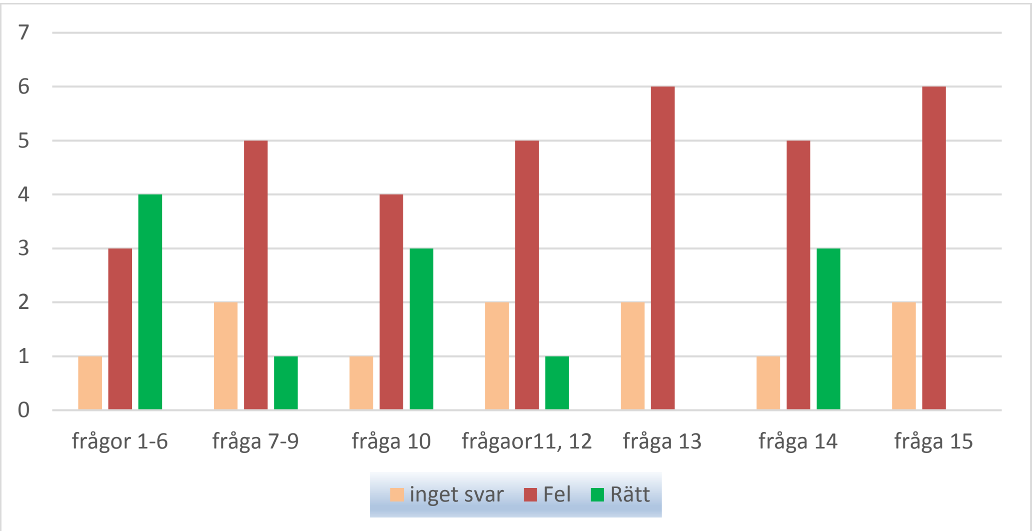
I nästa fråga där eleverna ska bestämma värdet av $2b + 3a$ där $a = 2$ och $b = 3$ svarade hälften av eleverna rätt, men de övriga utgick från ett objekttänkande sätt och kopplade bokstavssymbolerna i ett matematiskt samband till materiella objekt. De tolkade uttrycket $2b + 3a$ som två bananer och tre apelsiner istället för att inse att uttrycket i så fall stod för t.ex. kostnaden för 2 bananer och 3 apelsiner där styckpriset av bananer är 2 kr och för apelsiner 3 kr. Enligt Kuchemanns tredje kategori uppfattade eleverna dessa bokstavsymboler som objekt istället för antalet objekt.

I den sista uppgiften hade de flesta eleverna svårt att bevisa påståendet

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2x$$

Eleverna utgick från att $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ och därmed fastnade de mitt i beräkningen.

Elevernas svar som redogörs ovan sammanfattas utifrån en kvantitativ analys. Figuren nedan visar hur många informanter svarar rätt, fel eller när det saknas svar. Frågorna av samma karaktär har klassificerats i varje stapel.



Figur 2. Resultatet av intervjufrågorna där vertikala axeln representerar antal elever och horisontella axeln står för intervjufrågorna.

4.3 En kategorisering av elever enligt Kuchemann (1981)

Tabellen nedan ger en helhetsbild av elevernas tolkning av de bokstavsymbolerna enligt Kuchemanns (1981) kategorisering. Den visar kopplingen mellan frågorna och de olika kategorier. I många fall har det varit svårt att kategorisera eleverna efter varje fråga, eftersom de hade olika uppfattningar i samband med varje enskild fråga. I vissa frågor t.ex fråga 1-6 och 15 blir det svårt att hitta någon koppling eftersom frågorna 1-6 uppskattar elevernas algebra kunskaper i helhet samt den sista fråga vill värdera elevernas kunskap när det bara finns bokstavsymboler i ett sammanhang där eleverna i en högre abstraktionsnivå ska kunna visa sin deduktiva resonemangsförmåga.

Tabell 1. Resultatet av elevintervjuerna och deras placering enligt Kuchemanns modell.

Olika kategoriseringar efter elevernas uppfattningar	Respektiv fråga	Andel elever
1. Bokstavssymbolen utvärderas, vilket betyder att algebraiska uppgifter behandlas på liknande sätt som i vanliga aritmetiska uppgifter i detta fall kan eleven ”assign a random number to the letter”	7,8,9 10	50%
2. Bokstavssymbolen ignoreras, vilket innebär att eleverna inte tar hänsyn till symbolen som är med i uttrycket när de utför räkneoperationer	11,12,13	75%
3. Bokstavssymbolerna behandlas som objekt, där eleverna uppfattar symboler som representanter för objekt istället för antalet av objekt.	14	50%
4. Bokstavssymbolen betraktas som okänt tal, som är en symbol som kan placeras istället för det man söker, när man ska lösa en uppgift.	7,8,9	50%
5. Bokstavssymbolen betraktas som generellt tal, där ett vilket tal som helst kan ersättas med symbolen.	13	12.5%
6. Bokstavssymbolen tolkas som variabel, vilket är ett tal vars värde kan variera baserad på sammanhanget	10, 11,12	12.5%

5. Diskussion

Intervjuerna stämmer i stora drag överens med forskningslitteraturen. Resultaten uppvisar att elever har fundamentala svårigheter när det gäller symbolanvändningen. Detta kan diskuteras utifrån teoridelen och några möjliga felkällor som påverkar tillförlitligheten av resultaten. När det gäller elevernas symboluppfattning, då hamnade de enligt tabell 1 i objekttänkande (kategori 3) och bokstavsutvärdering (kategori 1) och kunde inte flytta till den högre abstraktionsnivån i algebra som handlar om generalisering och bevis (frågor 13, 15). Nedan följer en koppling mellan resultatets analys och forskning som är aktuell i detta arbete. Sedan presenteras en beskrivning av faktorer som anses vara orsaken till resultatet.

5.1. Tillförlitlighet och möjliga felkällor

Tillförlitligheten innebär hur mycket detta arbete ger en sann bild av verkligheten i allmänhet. Detta kan då diskuteras och kopplas till urvalet och informanterna. I samband med detta kan elevernas prestation i algebra och urvalet diskuteras. Elevernas låga kunskapsnivå kan bero på att detta fältarbete har genomförts i ett yrkesgymnasium vars elever inte fördjupar sig i ämnet matematik. Med andra ord nöjer eleverna sig med att få ett godkänt betyg i matematik, och detta sätt att tänka påverkar deras förståelse och deras sätt att lära sig ämnet. Dessutom läser de enbart en matematikkurs och detta gör att de matematiska begrepp så småningom glöms bort. Även om de har godkänt betyg i matematik 1a, har de svaga förkunskaper i ämnet. Att de enda eleverna som hade positiva attityder till matematik var de som presterade bra i ämnet stämmer överens med Samos (2009) forskning där elevernas attityder till matematik är kopplade till deras prestation i ämnet.

5.2. Kopplingen mellan resultaten och tidigare forskning

Det som kan konstateras utifrån resultaten är att informanterna hade olika uppfattningar av algebraiska symboler. Informanterna valde endast naturliga tal när de blev tillfrågade att ersätta x med något tal i ett uttryck. Detta bekräftar Christou och Vosniadous (2012) experiment om elevers symboluppfattning, där det framgår att elever tenderar att ersätta bokstavssymboler i algebraiska uttryck enbart med naturliga tal (Christou och Vosniadou, 2012, s.12). Dessutom uppfattar eleverna bokstavsymbolerna i algebraiska uttryck som bestämda tal och inte som variabler (Çelik och Güneş, 2013, s.1169).

Liknande resultat har Samo (2009) också nått fram till vid liknande uppgifter, där elevernas bristande kunskaper om x som variabel, skapar den missuppfattningen att x enbart kan ha ett bestämt värde. Symbolen x har alltså skapat oro och förvirring, eftersom i en annan uppgift hade x blivit använt på ett annat sätt (Samo, 2009, s.12).

Det framgick också av intervjuerna att eleverna hade svårt att beskriva algebraiska uttryck med vanliga ord, vilket stämmer överens med Egodawattes (2009) påstående att elever ofta misstolkar algebraiska uttryck när dessa ska ”översättas” till ord (Egodawattes, 2009, s.103). Dessutom uppstår många missuppfattningar av algebraisk symbolanvändning av den anledningen att elever inte är vana vid storheter som till exempel $7 - x$ (fråga 12) eftersom de inte kan förstå problemet (Samo, 2009, s.29).

Under intervjuerna ville jag testa Christou och Vosniadous (2012) påstående om att elever lättare kan nå fram till rätt svar när de får några svarsalternativ (Christou och Vosniadou, 2012, s.13). Det stämde faktiskt helt korrekt, då började eleverna engagera sig mer i frågan och fundera på svaren.

5.3. Möjliga orsaken till resultaten

Resultaten kastar ljus på förhållandet mellan elevers symboluppfattning och elevernas algebraframgång i skolan (Asquith et al., 2007, s.267). Elevers olika uppfattningar av bokstavsymboler kan framför allt, enligt litteraturen och resultaten av denna undersökning, vara ett resultat av skiftande tolkningar. Dessa olika uppfattningar har kopplats till elevernas kognitiva mognad enligt Persson (2010). Förutom den kognitiva utvecklingen, påstår Çelik och Güneş (2013) att elevernas olika uppfattningar och bristande kunskaper kan förklaras av en mängd faktorer som elevernas förkunskaper, läroplanens aspekter, undervisning i klassrum osv. (Çelik och Güneş, 2013, s.1173; Egodawattes, 2009, s.105).

En anledning till att elever ofta fastnar i objektifiering är att många uppgifter i läroböckerna är byggda på det sättet. En vanlig uppgift i läroböcker är att eleverna ska ta reda på kostnaden av en kopp kaffe och en bulle. Som Samo (2009) och Çelik och Güneş (2013) påpekar brukar många lärare också utnyttja sig av att betrakta bokstavssymboler som objekt när de jobbar med algebraiska uppgifter i den tron att det underlättar elevernas förståelse. Detta gynnar eleverna i ett tillfälle där det finns en koppling till verkliga situationer men missgynnar dem i många andra tillfällen där det inte finns en sådan koppling. Med andra ord kan det skapas ett generellt tankesätt hos elever i alla situationer precis som det framgår av elevernas svar i fråga 14 (Çelik & Güneş, 2013, s.1169). Ett exempel är: $-x - 0.1x$, när elever vill förstå och tolka det här uttrycket, har de ofta svårt att hitta något samband med en verklig situation. Att använda objekt för att representera bokstavsymboler är bra men lärare måste föra undervisningen i algebra på så sätt att objektsuppfattningen inte fastnar i elevernas minne.

Utifrån resultatet av intervjuerna är det tydligt att eleverna saknar förståelse av bokstavssymbolernas olika roller. Därför är det viktigt att undervisande lärare ger eleverna chans att diskutera och öva så att de ska kunna befästa den nya kunskapen om bokstavssymboler när de ska påbörja att jobba med bokstavsymbolerna. Även om elever lyckas bygga och utveckla rätt förståelse av algebraiska symboler, kan eleverna ha svårt att ersätta den gamla och felaktiga förståelsen med den nya. Dessutom behövs det kontinuerlig övning innan elever kan behålla enbart den nya kunskapen kring symbolerna (Çelik och Güneş, 2013, s.1173).

5.4 Får eleverna chansen att möta bokstavsymboler på olika sätt?

Felaktiga uppfattningar av symboler kan bero på färre tillfällen till matematiska samtal och gemensamma laborationer under lektionstiden. Nu drivs undervisningen för det mesta av individuella studier, där individuellt anpassning är på agendan och elever individuellt kämpar med uppgifter eller hittar egna lösningar och förklaringar till olika begrepp (Jäder, 2015, s.37). Enligt Asquith et al. (2007) framkommer det att den traditionella matematikundervisningen domineras av individuellt arbete i läroböckerna. Detta ger upphov till att eleverna jobbar i olika arbetstakt och läraren inte hinner klara ut alla elevers missförstånd (Asquith et al., 2007, s.269). I samband med detta problem, föreslår Egodawatte (2009) att elever ska ha möjligheten att förklara sina algebraiska framställningar verbalt så att läraren ska kunna se deras mentala uppfattningar (Egodawatte, 2009, s.105).

Asquith et al. (2007) påstår också att det finns en koppling mellan lärares kännedom om elevers tolkningar och elevernas prestationer i algebra. När en lärare precis vet var eleverna brukar fastna, kan undervisningen omorganiseras och utföras mer noggrant (Asquith et al., 2007, s.252). Detta bekräftar även Piagets och Vygotskis lärandeteorier, där lärare tar utgångspunkt i elevernas befintliga nivåer i algebra och därifrån stödja dem för att de ska kunna få korrekta uppfattningar i området. Utifrån resultaten blir då utgångspunkten för lärare att utgå från elevernas missuppfattningar, alltså Kuchemans (1981) de tre första kategorierna.

Elever bygger sina uppfattningar enligt lärarens framställning (Samo, 2009, s.31). Därför bör lärarna förklara tydligt vilka betydelser bokstavssymbolerna har när de dyker upp i olika uppgifter. På det sättet lär eleverna sig i vilka sammanhang olika bokstavssymboler ska användas. Om symbolernas roll klargörs i olika algebraiska beräkningsprocedurer, elimineras risken för missuppfattningar hos eleverna. Som Samo (2009) också hävdar, kan elever ibland behärska själva beräkningen men inte anpassa symbolanvändningen till problemet (Samo, 2009, s.6). Detta är en långvarig process som lärarna måste jobba med steg för steg och enligt en lång tidsplan när elever fortfarande går i tidiga årskurser (Samo, 2009, s.20).

Värt att nämna är att de flesta uppgifterna i läroböckerna som kopplas till algebra och problemlösningar finns i slutet av varje kapitel i läroböcker under *a-uppgifter*. Dessa uppgifter anses som ”abstrakta och svåra uppgifter” och eleverna brukar hoppa över dessa frågor eftersom de antingen inte hinner fundera på dem eller tolkar dem som onödiga (Jäder, 2015, s.35). Eleverna är vana att utgå från en imitativ resonemang där de bara följer en rutin i beräkningar (ibid.). Detta gör det svårt för lärare att diagnostisera elevers missuppfattningar och göra kognitiva analyser av elevernas algebraiska tänkande (Egodawatte, 2009, s.105). Detta kan övervinnas genom att öka antalet kreativa uppgifter, där eleverna får möjligheten att diskutera olika lösningar. Samt är det viktigt att fokusera mer på processen av en lösning än slutsvaret som finns i facit (Jäder, 2015, s.vii).

Utifrån resultaten kan man dra den slutsatsen att lärare bör ta initiativ i elevens nuvarande nivå och stödja dem genom att skapa ett sammanhang där elever ska kunna förstå bokstavssymbolerna. Det ska bli av mer betydelse om lärare lägger märke till de problemlösningsuppgifterna som kräver en kreativ resonemang samt en bra förståelse för bokstavssymboler (Jäder, 2015, s.35).

5.4. Vidare forskning i området

I det här arbetet påpekades affektiva faktorer som kan påverka elevernas lärande i området algebra. Dessa var elevernas attityder, intresse, självförtroende och socialt klimat i klassrummet. Ett av de viktigaste angreppssätten i algebraundervisning är att väcka elevernas intresse. Enligt Skolverket är det skolans ansvar att utveckla elevernas intresse (Skolverket, 2011b, s.8). Men läroböcker spelar också en stor roll när det gäller hur eleverna kan motiveras. För vidare forskning i det här området finns det utrymme att jämföra svenska läroböcker i matematik med liknande läroböcker från andra länder som är mer framgångsrika i algebra. I de svenska läroböckerna inleds varje moment med lösta uppgifter, medan de japanska läroböckerna brukar presentera olika moment genom problemlösningsuppgifter och aktiviteter (Persson, 2010, s.63). Detta område kan vara ett undersökningsobjekt som kanske kan avhjälpa elevernas svårigheter och deras attityder till algebra (Persson, 2010, s.63).

7. Referenser

Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E. och Alibali, M. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical thinking and learning*, *9*(3), 249-272. Från http://labweb.education.wisc.edu/knuth/taar/papers_rep_pub/Asquith%20Stephens%20etal.pdf

Cederqvist, K., Larsson, S., Gustafsson, P., Szabo, A. (2013). (2014). Tal och algebra I "Prio matematik 9 grundbok" Sanoma utbildning

Çelik, D. och Güneş, G (2013). Different Grade Students' Use and Interpretation of Literal Symbols. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *13*(2), 1168-1175. Från http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1017242.pdf

Christou, K. och Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *14*(1), 1-27. Från http://www-tandfonline-com.www.bibproxy.du.se/doi/pdf/10.1080/10986065.2012.625074?needAccess=true

Egodawatte, Gunawardena (2009). Is algebra really difficult for all students? *Acta Didactica Napocensia*, *2*(4), 101-106. Från http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1052268.pdf

Hansson, Ö. (2013). *Resonemangsförmåga, lärportalen för matematik gymnasieskolan.* Högskolan Kristianstad: Skolverket. Från http://hkr.diva-portal.org/smash/get/diva2:682168/FULLTEXT01.pdf

Huntley, M., Marcus, R., Kahan, J. och Miller J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26,* 115-139. Från http://eric.ed.gov/?id=EJ796789

Jäder, J. (2015). *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang*. Avhandling vid Linköpings universitet. Norrköping 2015. Från http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:813138/FULLTEXT01.pdf

Kling, L. (2016). *Algebra, ett meningslöst manipulerande av symboler?* Från http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/amnen-omraden/matematik/undervisning/algebra-1.181962

Kortering, L., deBettencourt L., och Braziel, P. (2005). Improving Performance in High School Algebra: What Students with Learning Disabilities Are Saying. *Learning Disability Quarterly*, *28*(3), 191-203. Från http://files.eric.ed.gov.webproxy.student.hig.se:2048/fulltext/EJ725672.pdf

Larsen, Ann Kristin (2009) *Metod helt enkelt. En introduktion till samhällsvetenskaplig metod*, Malmö: Gleerups

Persson, Per-Eskil (2010). *Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå*. (Doktorsavhandling. Luleå: Luleå tekniska universitet). Från https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:989792/FULLTEXT01.pdf

PISA 2012 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap. Rapport 398 internationella studier (pdf-dokument). Från http://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FBlob%2Fpdf3127.pdf%3Fk%3D3127 Publicerat 2013. Hämtat 10 december 2016

PISA 2015 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och matematik. Rapport 450 internationella studier. (pdf-dokument). Från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.256069!/PISA_bildspel_161206_åhörarutskrifter.pdf. Publicerat 2016. Hämtat 16 december 2016

Samo, M. A. (2009). Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in Algebra and How Do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls Secondary School Karachi. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Skolverket (2011a). Läroplan för grundskolan 2011. http://www.skolverket.se

Skolverket (2011b). Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011. http://www.skolverket.se

Bilaga 1.

Följande frågor kommer att beröras:

1. Vilket årskurs var du då du första gången hörde ordet algebra?
2. Vad tänker du på när du hör algebra?
3. Vilka andra matematiska begrepp kan du relatera till algebra?
4. (ifall eleven inte har så mycket att säga) Titta på uttrycket här, (jag har skrivit $x + 5$ på tavlan) tror du att det finns något samband mellan detta här och algebra?
5. Vad tror du x betyder? Varför?
6. (ifall eleven svarar rätt på fråga 4) vilka tal kan x vara?
7. Om du betraktar hela uttrycket $x + 5$ som ett tal, vad tror du det betyder? Kan man förklara det i ord?
8. Vilka tal kan man ersätta x med?
9. Om jag istället skriver detta (skriver då $y + 5$ på tavlan under $x + 5$), vilken skillnad tror du det finns mellan dessa två uttryck? Varför?
10. Om jag istället skriver detta (suddar $y + 5$ och skriver $5x$ istället) vilket tror du har störst värde, $5 + x$ eller $5x$? Varför?
11. Säg att ett rep som är 7 meter lång delas in i två delar. Om vi säger att den ena delen är x meter lång, hur lång är då den andra delen?
12. (ifall inget rätt svar blir föreslagits) du får tre alternativ och ett av dessa svar är rätt: (1. $x - 7$ 2. $7 - x$ 3. $7/x$) vilken är rätt lösning?
13. Generalisering: nedan finns en figur som ökar antalet figurer varje gång
    Figur 1. ■■ ■■■
    Figur 2. ■■ ■■■ ■■■
    Figur 3. ■■ ■■■ ■■■ ■■■

    a) Hur många kvadrater har figur 8?
    b) Hur många kvadrater finns i figur n?

14. Organiserad tänkande: Om $a = 2$och $b = 3$vad är $2b + 3a$?
15. Deduktiv resonemang: Visa att detta samband gäller

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2x$$