



HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete för ämneslärarexamen

Grundnivå 2

Matematikundervisning utifrån ett lärarperspektiv

En undersökning av lärares uppfattningar om god undervisning i matematik.

Författare: Anna Wiklund
Handledare: Jonas Jäder
Examinator: Anna Teledahl
Ämne/huvudområde: Pedagogiskt arbete
Kurskod: PG2066
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 170120

Vid Högskolan Dalarna finns möjlighet att publicera examensarbetet i fulltext i DiVA. Publiceringen sker open access, vilket innebär att arbetet blir fritt tillgängligt att läsa och ladda ned på nätet. Därmed ökar spridningen och synligheten av examensarbetet.

Open access är på väg att bli norm för att sprida vetenskaplig information på nätet. Högskolan Dalarna rekommenderar såväl forskare som studenter att publicera sina arbeten open access.

Jag/vi medger publicering i fulltext (fritt tillgänglig på nätet, open access):

Ja

Nej

Abstract:

Syftet med detta arbete är att undersöka lärares uppfattningar om god matematikundervisning samt hur lärares uppfattningar och undervisningspraktiker förhåller sig till den traditionella bilden av matematikundervisning. Kvalitativa intervjuer med fem matematiklärare har genomförts, för att undersöka deras uppfattningar om vad som utgör god matematikundervisning, huruvida deras undervisning är reforminriktad eller traditionell, och vilka hinder eller stöd de upplever för att bedriva den matematikundervisning de önskar. Lärarna i urvalet uttrycker, i varierande utsträckning, en uppfattning om att reforminriktad matematikundervisning är önskvärd, men det är endast tre av fem som också bedriver en reforminriktad undervisning. Gemensamt för de med en reforminriktad undervisningspraktik är bl.a. att de har skapat praktiska förutsättningar för att lyckas väl med att påverka sina elevers uppfattningar om matematik i önskad riktning och därför varit framgångsrika i att förhandla om de sociala och sociomatematiska normerna i klassrummet.

Nyckelord:

Traditionell och reforminriktad matematikundervisning, sociala normer, sociomatematiska normer, didaktiskt kontrakt.

Innehåll

Inledning	5
Syfte och frågeställningar	7
Bakgrund	8
Traditionell kontra reforminriktad matematikundervisning.....	8
Traditionell matematikundervisning	8
Reforminriktad matematikundervisning	10
Stöd i forskning för reforminriktad matematikundervisning	10
Stöd i skolans styrdokument för reforminriktad matematikundervisning.....	12
Hinder för och utmaningar med reforminriktad matematikundervisning	14
Normer och uppfattningar om matematik och matematikundervisning.	15
Sociala normer och sociomatematiska normer	16
Uppfattningar och normer i matematikundervisningen	16
Det didaktiska kontraktet	20
Spänningar mellan elevernas uppfattningar och lärarens intentioner	21
Konstruktivism eller sociokulturellt perspektiv?	24
Material och metoder	26
Metodologiskt perspektiv	26
Undersökningsobjektet/Urval	26
Presentation av urvalet	27
Bearbetning och analys	27
Etiska överväganden	27
Resultat och analys.....	28
Fredrik.....	28
Johan	29
Anders och Karin	31
Anders	31
Karin.....	35
Anders och Karin i det didaktiska tornet	37
Helena	37
Sammanfattning av lärarna	41
Diskussion.....	42
Metoddiskussion	42
Diskussion av frågeställningarna	42
Frågeställning 1. Vad anser lärare är en god matematikundervisning?	42
Frågeställning 2. Hur bedriver lärare sin matematikundervisning: reforminriktat eller traditionellt?.....	43

Frågeställning 3. Vilka hinder eller stöd upplever lärare för att bedriva den matematikundervisning de önskar?.....	44
Slutsatser och idéer om fortsatt forskning.....	46
Referenser	47
Bilagor.....	50
Informationsbrev	50
Intervjuguide	51

Inledning

Idén till den undersökning jag har gjort fick jag under min tredje och sista VFU-period. Jag undervisade elever i årskurs 9 och hade bestämt mig för att pröva ett laborativt arbetssätt i matematiken. Mitt syfte var att göra algebra begripligt för eleverna genom att arbeta laborativt med ekvationer. Min teori var att när eleverna begriper algebra blir matematiken roligare och mer meningsfull för eleverna och då presterar de också bättre.

Det blev inte alls som jag hade tänkt mig. Jag mötte ett stort motstånd mot att jobba med tändstickorna och askarna. Eleverna frågade ofta "när får vi jobba i boken"? Ganska snart gav jag vika och övergav min plan för att i stället följa läroboken. Jag upplevde att jag tappade greppet om undervisningen när eleverna började jobba i boken. De jobbade i väldigt olika takt, men gemensamt för de allra flesta var att det gick långsamt framåt. De gjorde inte så många uppgifter på lektionerna och jobbade inte hemma. När jag skulle ha genomgång på det avsnitt jag planerat för dagen blev de stressade för att de inte alls hade hunnit dit i boken och ville då helst inte ha genomgången. Vissa fortsatte att jobba med sitt i boken när jag hade genomgång på tavlan. Jag hade valt ut uppgifter som skulle belysa något specifikt, men det kändes inte så meningsfullt när jag inte fick klassen med mig.

Min handledare och jag pratade om vad som egentligen hade hänt i klassrummet. Plötsligt sa min handledare: "Du bryter det didaktiska kontraktet!" Det didaktiska kontraktet hade man pratat om under mattelyftet. När min handledare nu nämnde det didaktiska kontraktet hjälpte han mig att sätta ord på något jag även tidigare känt av, men inte riktigt kunnat förstå. Begreppet *didaktiskt kontrakt* introducerades av Brousseau (1997) och det handlar om de, ofta outtalade, överenskommelser som utvecklas mellan lärare och elever i en undervisningssituation. Sökningarna på didaktiskt kontrakt ledde mig vidare till forskning om sociala och sociomatematiska normer i matematikundervisning. Jag hittade texter på Lärportalen för Matematik på Skolverkets hemsida som handlar om det jag upplevt. Helenius skriver: "Elevernas erfarenheter av tidigare matematiklektioner fungerar som ett slags gummiband som drar mot det välkända och förväntade" (Helenius 2013, s. 1). Det välkända och förväntade består kortfattat i att eleverna ska lära sig metoder för att lösa olika slags uppgifter, ofta genom räkning på egen hand i läroboken.

Jag bestämde mig för att undersöka detta närmare. Vilka uppfattningar om *god matematikundervisning* finns bland matematiklärare och hur *förhåller sig* dessa uppfattningar till bilden av traditionell matematikundervisning? Hur förhåller sig lärares matematikundervisning till traditionell undervisning? Hur navigerar lärare mellan läroböcker, läroplan och mattelyftet? Hur gör de för att inte falla in i det traditionella, trygga? Eller faller de in i det traditionella och trygga? Jag har ställt dessa frågor till ett antal lärare på högstadiet.

Jag hade kunnat fråga eleverna hur de ser på saken. Anledningen till att jag inte valde denna väg är att jag, baserat på deras reaktion på mötet med den laborativa matematiken, gissar att de till största delen har fått traditionell matematikundervisning och därför har svårt att jämföra för- och nackdelar med

respektive syn på undervisning och därmed ta ställning. Jag hade också kunnat undersöka *strukturerna*, d.v.s. innehållet i och upplägget av läroplaner och läroböcker. Men för mig som blivande lärare anser jag det mest intressant att undersöka saken ur lärarnas, *aktörernas*, perspektiv. Hyldgaard skriver (2008, s. 28): ”Aktörpositionen kritiserar strukturpositionens deterministiska perspektiv där det inte lämnas plats för ett ”socialt rum för handling” och där det inte finns utrymme för en fri vilja och därmed *ansvar för handlingar*” (min kursivering). Jag kände starkt hur den rådande synen på undervisning byggde massiva hinder för mig, men lika starkt kände jag att jag trots detta inte kunde frisäga mig ansvaret för mina handlingar. Där någonstans tror jag att man kan finna skälet till att jag valde aktörsperspektivet.

Syfte och frågeställningar

Det jag upplevde under min VFU-period var att den traditionella matematikundervisningen utövade en stark dragningskraft på både elever och lärare. Samtidigt är min utgångspunkt för detta arbete en strävan att röra sig från den traditionella till en reforminriktad undervisning. Jag vill därför undersöka hur lärare förhåller sig till den traditionella matematikundervisningen. Försöker de gå ifrån det traditionella och i så fall hur? Syftet med mitt examensarbete är att undersöka lärares uppfattningar om god matematikundervisning samt hur lärares uppfattningar och undervisningspraktiker förhåller sig till den traditionella bilden av matematikundervisning.

För att uppnå syftet har jag formulerat följande frågor:

1. Vad anser lärare är en god matematikundervisning?
2. Hur bedriver lärare sin matematikundervisning: reforminriktat eller traditionellt?
3. Vilka hinder eller stöd upplever lärare för att bedriva den matematikundervisning de önskar?

Bakgrund

För att skapa mig en bild av hur forskningsläget ser ut gällande uppfattningar om god matematikundervisning och för att bidra med teoretiska utgångspunkter för min undersökning har jag gått igenom tidigare forskning. Jag har även undersökt kopplingar till skolans styrdokument.

Traditionell kontra reforminriktad matematikundervisning

När det gäller synen på matematikundervisning uppfattar jag i grova drag två dominerande riktningar. De går under flera olika namn, men de kommer i detta arbete att kallas den *traditionella* respektive den *reforminriktade* matematikundervisningen. Detta avsnitt innehåller en genomgång av vad som kännetecknar respektive syn, därefter en redogörelse för stödet för reforminriktad matematikundervisning i forskning och styrdokument och till sist hinder och utmaningar för den reforminriktade undervisningen. Anledningen till att jag inte på liknande sätt som för reforminriktad undervisning redogör för stöd i forskning och styrdokument för traditionell undervisning är att jag inte har funnit något nämnvärt sådant. Anledningen till att endast potentiella hinder och utmaningar för den reforminriktade undervisningen undersöks är, som tidigare nämnts, att den är eftersträvansvärd, och då är det dessa hinder och utmaningar som är intressanta att förstå och överkomma.

Traditionell matematikundervisning

Det som i detta arbete benämns traditionell matematikundervisning går även under andra namn. Många sätter likhetstecken mellan traditionell matematikundervisning och *skolmatematik*. Exempelvis Yackel och Rasmussen (2002), som skriver om en undersökning gjord på en matematikkurs på ett amerikanskt universitet. De förmodar att studenterna genom alla sina år i skolan endast har stött på ”skolmatematik”, som innebär att elever är *passiva mottagare* av information. Elevernas roll är att *följa instruktioner* och lösa problem i enlighet med instruktioner från läraren och läroboken (Yackel och Rasmussen 2002, s.318). Lärarens roll å andra sidan är att förklara och *demonstrera procedurer* som eleverna kan följa. Hieberts (1999) beskrivning av den traditionella matematikundervisningen i USA är att den kännetecknas av en betoning på procedurer, speciellt procedurer för beräkningar. Väldigt lite möjlighet ges för elever att utveckla begreppsmässig, eller ”konceptuell”, förståelse och att göra kopplingar (Hiebert 1999, s.11). Hiebert skriver att matematikundervisningen i USA är repetitiv, ofokuserad och att den inte utmanar eleverna. Undervisningen leder till en ytlig kunskap. Eleverna lär sig att utföra beräkningar, men de har svårt att tänka i flera steg, lösa för dem obekanta problem och att resonera kring och förklara sina lösningar. Hiebert menar att det är logiskt eftersom de inte har fått tillfälle att öva på det. ”Students learn what they have an opportunity to learn” (ibid., s. 12).

Hieberts beskrivning skulle kunna handla om traditionell matematikundervisning i Sverige. Jonsson m.fl. (2014) är inne på att svensk matematikundervisning innehåller för mycket procedurbaserat lärande. Eleverna lär sig regler och algoritmer som de ska följa för att lösa en uppgift, vilket leder till att matematiken handlar mer om att *memorera* än att förstå. I inledningen nämndes det som Helenius skrivit om matematikundervisning i Sverige. Att det ofta går ut på att

”eleverna skall lära sig metoder för att lösa vissa typer av uppgifter. Oftast arbetar eleverna med att lösa uppgifter i sin lärobok *på egen hand*” (Helenius 2013, s.1). Den traditionella matematikundervisningen har även kallats *uppgiftsdiskursen* av Mellin-Olsen (1991, även Helenius 2013, s. 1). Blomhøj (1994, s. 2) skriver så här om vad den traditionella matematikundervisningen går ut på:

- att läraren omsorgsfullt går igenom lärobokens metoder och algoritmer
- att läraren bara ger uppgifter som eleverna på förhand fått redskap att lösa
- att önskat svar kan ges kort i text ett tal, en figur eller möjligen en kort mening
- att eleverna har krav på lärarens bedömning, när uppgiften är löst
- att eleverna å sin sida, gör sitt bästa för att lösa givna uppgifter.

Schoenfeld (1992) tar upp liknande saker som Blomhøj. Att man genom skolmatematiken har skapat föreställningar hos elever om att matematikuppgifter endast har *ett rätt svar* och endast *en korrekt lösning* - oftast den som läraren visar på tavlan - och att en uppgift ska kunna lösas på 5 minuter. Annars har eleven inte förstått matematiken tillräckligt väl. Vidare att matematiken är något man gör *i ensamhet* (jmf Helenius ”på egen hand”) och att det man lär sig i skolan inte har mycket med det verkliga livet att göra (Schoenfeld 1992, s.359).

Wester (2015, s. 33) hänvisar till Skemps (1976) grova indelning av lärare i två grupper, baserat på hur de ser på förståelse: de som tolkar förståelse som *instrumentell* förståelse, vilket innebär att förstå procedurer som behövs för att lösa en matematikuppgift, och de som tolkar förståelse som *relationell*, vilket handlar om att även förstå hur allting hänger ihop. Enligt Wester menar Skemp (1976) att hur läraren ser på förståelse påverkar hur läraren bedriver sin undervisning och att de som tolkar den som instrumentell bedriver en *instrumentell matematikundervisning*, som i stort går ut på att lära elever procedurer för att bemästra uppgifter, med andra ord en traditionell matematikundervisning.

Boaler (1998) kopplar samman traditionell matematikundervisning med *användandet av läroboken* för lösningar av *standarduppgifter*, fokus på *beräkningar, regler och procedurer* på bekostnad av en djupare förståelse. En undervisning som leder till en kunskap som inte är speciellt användbar utanför skolans värld och ett *ledtrådsbaserat* (”cue-based”) beteende hos elever. Med det senare avses att eleverna letar efter ledtrådar/antydningar om vad som förväntas av dem snarare än att intressera sig för matematiken i själva uppgiften (Boaler 1998, s.137). Hon beskriver en skola som är präglad av *ordning och reda*, med elever som gör det de ska, men påpekar att ordning och reda i klassrummet inte är någon garanti för effektiv inläring (ibid., s. 136).

Traditionell matematikundervisning skulle också kunna kallas *”motsatsen till problemlösning”*. Även i traditionell matematik kan eleverna jobba med problemlösning, men då får de ofta *instruktioner* för att lösa problemet, vilket motsäger den definition av problem som ses i litteraturen. På Skolverkets hemsida om matematiklyftet finns följande definition av ett matematiskt problem: ”... När vi i den här modulen talar om ett matematiskt problem avser vi alltid en matematisk uppgift som personen inte från början vet hur han/hon kan gå tillväga för att lösa. Det krävs ansträngning för att lösa ett problem” (Larsson 2013, s. 2).

Reforminriktad matematikundervisning

Om den traditionella matematikundervisningen förknippas med otåliga problemlösare som förväntar sig att lösa ett problem på max fem minuter (Schoenfeld 1992) kan det som här benämns *reforminriktad matematikundervisning* förknippas med tålmodiga problemlösare. En beskrivning av reforminriktad matematikundervisning är följaktligen *undervisning genom problemlösning*, där ett problem definieras som i slutet av föregående stycke, d.v.s. att eleverna får anstränga sig för att lösa problemet (Larsson 2013, s. 2). Den går också under benämningar som *processinriktad* och *konceptuell* (inriktad på konceptuell förståelse). Annat som förknippas med reforminriktad matematikundervisning är *undersökande arbetssätt*, *kreativa resonemang*, att få *utmanande* uppgifter (Jonsson m.fl. 2014) och *öppna frågor* (Boaler 1998). I Larssons (2015) avhandling återfinns många kännetecken för reforminriktad undervisning. Där ses eleven som *autonom tänkare* och läraren som en handledare som möjliggör elevens lärande. Undervisningen i klassrummet inriktas på att utveckla elevernas *förmågor* genom *samarbete* snarare än att fokusera på faktakunskaper och inbördes konkurrens mellan elever (ibid., s. 23). Hon betonar vikten av att eleverna får möjlighet att lära sig att göra *kopplingar* mellan matematiska idéer och representationer (ibid., s. 19), och att de får lära sig att *argumentera* för sin sak. Precis som flera andra tidigare nämnda betonar hon att eleverna får *kämpa* med viktig matematik och att undervisningen bygger på konceptuell förståelse. Yackel och Rasmussen (2002) betonar vikten av "sense making", som kan översättas till att matematiken ska vara *meningsfull och begriplig* för eleverna. Att de ska göra kunskapen till sin. Boaler (1998) beskriver en skola där man bedrev en *progressiv* undervisning. Där fick eleverna jobba i projekt och filosofin var att eleverna skulle tillämpa matematiken i realistiska situationer och att den då skulle vara meningsfull för dem (ibid., s. 136).

Hiebert (1999) tillskriver den reforminriktade undervisningen kännetecken som att utgå från barnens kunskapsnivå och färdigheter, med möjlighet till kreativt arbete och där förklaringar och motiveringar efterfrågas. Han menar, med stöd i forskning, att reforminriktad undervisning möjliggör för barnen att *konstruera en djupare förståelse* av matematiken och *samtidigt* lära sig procedurella färdigheter (Hiebert 1999, s. 13-15). I förra avsnittet redogjordes för de två skilda tolkningarna av förståelse, instrumentell och relationell (Skemp 1976, citerad i Wester 2015, s.33). De lärare som undervisar för relationell förståelse bedriver en relationell matematikundervisning, vilken går ut på att eleverna ska veta både vad de ska göra och varför. Följande citat ur Wester (2015, s. 34) är ett exempel som visar på att relationell skolmatematik kan ses som reforminriktad: "I relationell skolmatematik består kunnandet i att utveckla sin begreppsstruktur. Utifrån denna finner eleven sina vägar att lösa uppgifter."

Stöd i forskning för reforminriktad matematikundervisning

På Lärportalen för matematik på Skolverkets hemsida står följande: "En betydande del av forskningen inom matematikdidaktik, och inom lärande och undervisning i allmänhet, har de senaste decennierna börjat beskriva lärande som att man blir en aktiv deltagare i ett visst sammanhang snarare än att, som traditionellt, man skall tillägna sig en viss kunskap" (Helenius 2013, s. 2). Hiebert (1999) påminde läsaren om att forskningen ensam inte kan ge oss svaret på vilken undervisning

som är mest önskvärd och som ska stadgas i läroplaner ("standards"). Det är en fråga som styrs av samhällets normer och värderingar. Men vi kan i forskningen söka efter evidens om huruvida en metod är framgångsrik, exempelvis vad gäller elevers resultat, även om vi måste vara medvetna om att vi inte kan hitta *en* sanning, eftersom det finns så många möjliga faktorer som kan påverka. Hiebert (1999) menar att den samlade evidensen för reforminriktad undervisning är entydig: i grundskolans lägre årskurser har man kunnat jämföra reforminriktad undervisning med traditionell och då har man sett att eleverna lär sig mer och får en djupare kunskap i den reforminriktade undervisningen. I högre årskurser har man inte lika gott om jämförelser, men vid de tillfällen man har kunnat jämföra har den reforminriktade undervisningen aldrig visat på sämre resultat än den traditionella. Eleverna utvecklar sin konceptuella kunskap utan att den procedurella kunskapen lider.

Boaler (1998) har i sin tidigare nämnda fallstudie jämfört två brittiska skolor: Den ena skolan, Amber Hill, under rubriken *Traditionell matematikundervisning* då den kännetecknades av ett fokus på procedurer för "skolbruk" och eget räknande i läroboken. Den andra skolan, Phoenix Park, under rubriken *reforminriktad undervisning* då den fokuserade på öppna uppgifter och konceptuell förståelse. Resultaten i hennes studie var i linje med det Hiebert (1999) rapporterade: eleverna på Phoenix Park visade bättre konceptuell förståelse av matematiken utan att vara sämre än eleverna på Amber Hill på traditionella, procedurbaserade uppgifter. En intressant observation som Boaler gjorde var när hon frågade eleverna vid de båda skolorna vad de för tillfället sysslade med. Eleverna på Amber Hill svarade oftast med att tala om vad kapitlet i läroboken hette, eller, om hon bad dem utveckla, uppgiftens nummer, medan eleverna på Phoenix Park kunde beskriva det problem som de höll på att lösa. Av de senare kunde hon få höra vad de hade upptäckt hittills och vad de skulle försöka härnäst. En ytterligare intressant observation var hur eleverna svarade på en enkätfråga som handlade om huruvida de prioriterade att tänka eller att komma ihåg. På Phoenix Park svarade 35 % av eleverna att de prioriterade att komma ihåg; motsvarande siffra på Amber Hill var 64 %.

Jonsson m.fl. (2015) beskriver en experimentell undersökning där de jämför testresultat för två grupper av gymnasieelever. Den ena gruppen, AR, vilket står för *algorithmic reasoning*, har fått öva genom att lösa uppgifter på ett procedurerbaserat sätt och den andra, CMR, vilket står för *creative mathematically founded reasoning*, genom att lösa uppgifter som stimulerar kreativa resonemang. AR-ansatsen liknar den som vanligtvis förekommer i undervisning och läromedel och kan därför ses som en kontrollgrupp, eller baseline, som CMR jämförs med. Skillnaden ligger i hur uppgifterna i övningstestet är uppbyggda. AR-gruppen fick ledning genom algoritmer ("den här formeln kan du använda för att beräkna det här") som kunde användas för att lösa uppgiften. De fick även se exempel som underlättade användningen av algoritmerna. CMR-gruppen å andra sidan fick inga formler eller stöttande exempel i övningstestet, utan var hänvisade till att tänka själva. Författarna skriver om det som Brousseau (1997) kallade "*adidaktisk situation*", där läraren avstår från att lägga sig i och eleven på egen hand måste konstruera den kunskap som behövdes för att lösa uppgiften (Jonsson m.fl. 2015, s. 22). Man kan nog säga att en adidaktisk situation blev möjlig för CMR-gruppen, men endast delvis för AR-gruppen då de fick vägledning genom algoritmiska

instruktioner och exempel. En vecka efter omgången med övningstest fick deltagarna komma tillbaka för att göra testet, som var identiskt för de båda grupperna. Testet bestod av tre deluppgifter, där den första uppgiften testade memorering av en formel på kort tid (30 s), den andra uppgiften testade om eleverna kunde lösa en numerisk uppgift på kort tid (30 s), medan den tredje uppgiften hade en längre tidsgräns (5 min), vilket innebär att den kunde lösas genom att konstruera eller rekonstruera en lösning. Resultaten pekade i samma riktning som Hieberts och Boalers. AR-gruppen presterade bättre än CMR-gruppen på övningstestet, vilket var väntat då den gruppen vägledades genom testet, medan CMR-gruppen presterade bättre än AR-gruppen på *alla* tre deluppgifter på testet. Deltagarna hade även gjort kognitiva tester av ickeverbal resonemangsförmåga och arbetsminneskapacitet (ibid., s. 25). Jonsson m.fl. fann att CMR ger bättre resultat och att elever med högre värde på de kognitiva testerna får högre resultat, men också att elevens kognitiva nivå inte har lika stor betydelse i CMR-gruppen som i AR-gruppen (ibid., s. 28-29). Författarna påpekar att detta resultat strider mot den vanligt förekommande uppfattningen att mindre skickliga elever inte ska ägna sig åt problemlösning, utan i stället lära sig procedurer. De drar slutsatsen att man i stället bör ge alla elever möjligheten att kämpa med uppgifter, på en lagom nivå (ibid., s. 31).

Stöd i skolans styrdokument för reforminriktad matematikundervisning

Det föregående avsnittet inleddes med ett citat av Helenius (2013) som visar på en rörelse i forskningen mot den reforminriktade matematikundervisningen. Helenius fortsätter så här om skolans styrdokument: " ... En parallell, och kanske delvis oberoende, trend har varit att i kursplaner och liknande texter i allt högre grad beskriva det önskvärda resultatet av undervisningen som att eleverna ska kunna utöva matematik (d.v.s. delta i en process) snarare än att de skall tillägna sig vissa specifika kunskaper" (Helenius 2013, s. 2). Det "önskvärda resultatet" som Helenius beskriver pekar på att det är en reforminriktad matematikundervisning snarare än en traditionell som uppmuntras i styrdokumentet. Vid en genomgång av kursplanen för matematik i grundskolan finner jag också mycket stöd för den lärare som vill jobba med reforminriktad undervisning.

I det inledande stycket av avsnitt 3.5 matematik i Lgr 11 står bland annat följande: Matematiken sägs vara "till sin art en *aktiv, reflekterande och problemlösande* aktivitet" och "Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att *fatta välgrundade beslut* i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att *delta i samhällets beslutsprocesser* (Lgr 11, s.47, mina kursiveringar)". Att eleverna ska lära sig matematik *genom* problemlösning kan kopplas till det reforminriktade, liksom att de i undervisningen ska reflektera över sina val och tänka kreativt, inte bara memorera regler och procedurer. För att kunna *fatta välgrundade beslut* räcker det inte med faktakunskaper eller memorerade regler, utan eleverna behöver vara tränade i självständigt, autonomt, tänkande, som att värdera sina egna och andras lösningar och att argumentera för sin sak, vilket förknippas med reforminriktad undervisning. För att matematikundervisningen ska ge eleverna förutsättningar att *delta i samhällets beslutsprocesser* behöver eleverna få möjlighet att se att matematikkunskaperna och förmågorna kan användas även utanför skolans värld, inte bara som något som kan tillämpas på nästa prov. Att fokus inte ligger på faktakunskaper är synligt i och med att kunskapskraven är

formulerade i termer av förmågor. De fem förmågor som eleverna ska utveckla och som bedöms i matematik är problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga, förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp, förmåga att välja matematiska metoder samt kommunikationsförmåga. Av dessa förmågor är det väl egentligen bara förmågan att välja matematiska metoder som den traditionella matematikundervisningen kan tänkas vara tillräcklig för, med tanke på att den till stor del går ut på procedurinlärning. Fast i Jonsson med fleras studie (2015) presterade de elever som fått öva på "icke-traditionella" uppgifter bättre även på metod än de elever som fått öva på ett mer traditionellt sätt. Vad gäller de fyra övriga förmågorna - problemlösning, begrepp, resonemang och kommunikation – så har den reforminriktade undervisningen ett direkt fokus på att eleverna ska utveckla dem, ett fokus som inte är lika tydligt i den traditionella undervisningen.

Ytterligare stöd för reforminriktad matematikundervisning finns i kursplanens syfte (Lgr 11, s. 47): Formuleringar som (mina kursiveringar) "*utvecklar intresse för matematik*", "*tilltro till sin förmåga*", "*tolka*" och "*beskriva och formulera*" kan alla förknippas med reforminriktad undervisning. Det står att undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna "*formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat, samt att de utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang*".

I stycket som beskriver målen med undervisningen likaså (ibid., s.13):

Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola

- kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet,
- kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt,
- kan lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra och känna tillit till sin egen förmåga,

Kursplanen i matematik, som är styrande för lärares undervisning, ger sammanfattningsvis inget egentligt stöd till att bedriva traditionell undervisning. Tvärtom kallar den på, eller kräver, en reforminriktad matematikundervisning. Hiebert (1999, s. 15) skrev om NTCM (National Council of Teachers of Mathematics) standards i USA: "The standards proposed by NTCM are, in many ways, more ambitious than those of traditional programs. ... the standards include conceptual understanding and the use of key mathematical processes as well as skill proficiency". Frågan är hur det ser ut i praktiken med ändamålsenligheten i svensk matematikundervisning idag? Om lärare fortfarande bedriver traditionell undervisning är det endast en av fem förmågor, metod, som eleverna får en rimlig möjlighet att öva på. Våren 2009 gjordes en kunskapsöversikt av matematikutbildningen i grundskolan. Författarna av översikten drar bland annat följande slutsats:

"... är undervisningen otillräcklig när det gäller möjligheterna för eleverna att utveckla centrala matematiska kompetenser, utöver procedurhantering. Man kan tänka sig att inte ens procedurhanteringen utvecklas väl, eftersom alltför begränsad matematisk förståelse (som skulle kunna nås via t ex grundläggande resonemang, representationer och samband) utvecklas,

vilket leder till att procedurerna lärs i huvudsak utantill” (Bergqvist m.fl. 2010, s.51).

Denna översyn skrevs 2010, d.v.s. innan Lgr 11 infördes. Det skulle vara intressant att se om man skulle dra samma slutsatser av en översyn idag. Wester (2015, s. 38) hänvisar till kunskapsöversynen och menar att dess resultat visar att traditionell undervisning fortfarande dominerar i Sverige. Han påtalar att bristen på ändamålsenlighet riskerar att bli ett problem för demokratin, då eleverna inte får den undervisning de behöver för att utveckla sina matematiska förmågor. Han hänvisar även till Boesen m.fl.(2014, citerade i Wester 2015, s. 38-39) som har sett att ”de flesta lärare säger sig vara positivt inställda till reformen med kompetenser”, men att lärares undervisning trots detta inte har förändrats i önskad utsträckning efter Lgr 11. De menar enligt Wester att en orsak till detta är att lärarna inte har förstått intentionerna och innebörden av reformen med förmågor. Då lärarna inte har förstått fullt ut och reformen dessutom bryter mot den existerande undervisningstraditionen sker inte en förändring av lärarnas uppfattningar om undervisning och då är förändringar av lärares undervisning inte troliga.

Hinder för och utmaningar med reforminriktad matematikundervisning

I förra avsnittet redogjordes bl.a. för Hieberts (1999) artikel om sambandet mellan forskning och standarder i amerikansk matematikundervisning. Han visar att den reforminriktade undervisningen ger bra resultat och ställer den naturliga frågan: Varför införs den inte oftare (Hiebert 1999, s. 15)? Jo, dels för att den allmänna opinionen kräver större bevisbörda i forskningen av nya, obeprövade metoder. Man menar att det skulle vara oetiskt att införa nya, obeprövade program. Trots att det faktiskt inte finns något riktigt stöd i forskningen för att den traditionella undervisningen skulle ge bra resultat hos elever avkrävs den inga bevis, troligen för att den anses vara beprövad under så många år. En annan viktig orsak till att reforminriktad undervisning inte införs på bred front tror Hiebert beror på att lärare behöver lära sig hur de ska göra och då behöver de, precis som elever, få möjlighet att lära sig. De får dock sällan denna möjlighet, vilket antingen leder till att nya undervisningsmetoder inte införs, utan man fortsätter med den traditionella undervisningen för den vet man hur man ska bedriva, eller så införs bara delar av det nya, med bristande resultat (ibid., s. 15-16).

Larsson (2015) tar upp utmaningar och behov av stöttning för lärare som vill undervisa genom problemlösning. Den kanske största utmaningen för lärare som hon tar upp är den att kunna hjälpa en elev att tillägna sig kraftfulla matematiska idéer utan att underminera elevens intellektuella autonomi. Om läraren hjälper till för mycket överger eleven sin egen tankeprocess för att istället följa lärarens instruktioner (Larsson 2015, s. 29). Ett annat dilemma hon tar upp är den svåra balansgången mellan innehåll och elevdeltagande (process). Ett sätt att hantera det dilemma är att som lärare vara medveten om det och på så sätt hålla sig mottaglig *både* för innehållet *och* eleverna. Ett sätt att som lärare vara mottaglig både för eleverna och matematikens innehåll är att ställa bra frågor, något som också är en utmaning för lärare. Ytterligare en utmaning för lärare är hur man ska hantera och använda sig av felaktiga elevsvar och missuppfattningar i undervisningen (ibid., s. 30-31). Vidare intresserar hon sig för hur lärare kan välja ut och ordna bland elevlösningar för att få eleverna att argumentera med varandra.

Larsson (2015) har undersökt Stein med fleras modell med fem praktiker, ”5P”, med avseende på möjligheter och brister när det gäller att stötta lärares arbete med att iscensätta helklassdiskussioner i ett problemlösande klassrum. Modellens fem praktiker är att *förutse*, *överblicka*, *välja ut* och *ordna* elevlösningar, samt att *koppla ihop* elevlösningar med varandra och med matematiska idéer (ibid., s. 33). Hon studerar denna modell för att den har visat sig vara ett stöd för lärare i att hålla i produktiva helklassdiskussioner. Genom att ge lärare stöd för hur de kan förutse elevers svar behöver inte lärare improvisera mitt i lektionen. Genom att de redan har förutsett elevsvar kan lärare redan i förväg planera för hur de kan välja ut och ordna elevsvar för gemensam diskussion. Avhandlingen visar att modellen ger ett stöd för lärare, men att det behövs ytterligare stöd. Framförallt finner hon genom sina studier att det saknas stöd för att introducera problemet för klassen samt stöd för att skapa ett klimat där elever inte bara gör kopplingar utan även argumenterar med varandra för att slutligen uppnå konsensus. Några av hennes studier visar också att lärare tenderar att vara för generella när det gäller att förutse elevsvar och att de då trots allt inte är förberedda när de ska välja ut och ordna elevsvar. Sammanfattningsvis menar hon att modellen med fem praktiker är ett stöd för lärare i att ta klivet från den traditionella genomgången där läraren förklarar, ”en första generationens praktik”, till helklassdiskussioner där läraren använder elevlösningar för att belysa viktiga matematiska idéer och samband, ”en andra generationens praktik”. Hon föreslår en ”tredje generationens praktik”, som är en kombination av ett undersökande arbetssätt (inquiry/argument classroom culture) och Stein med fleras modell med fem praktiker. Då menar hon att vi kan uppnå klassrum där hela klassen samarbetar för att nå gemensam förståelse och konsensus (Larsson 2015, s.81). I och med detta tar eleverna över lärarens roll som den som ”lyssnar, ställer frågor, förtydligar och validerar matematiska idéer, och att ”klassrumsnormer för tredje generationens praktik kräver att alla lyssnare är aktivt engagerade” (ibid.). Den praktik Larsson beskriver är långt ifrån den traditionella bilden av undervisning, där eleverna är passiva mottagare av lärarens förklaringar, och alla diskussioner går via läraren. Den praktiken kräver att läraren behöver ta ett eller flera steg tillbaka i sin undervisning för att släppa fram eleverna som aktörer. Detta betyder inte att läraren ska inta en passiv roll, tvärtom har läraren en central roll och måste räkna med att lägga mer möda på att exempelvis se inlärningsprocesser och ett matematiskt innehåll som ska bearbetas av eleverna. För att kliva tillbaka på detta sätt behöver läraren troligtvis revidera sin egen uppfattning om matematikundervisningen. Detta för oss in på nästa stycke, som handlar om normer och uppfattningar om matematik och matematikundervisning.

Normer och uppfattningar om matematik och matematikundervisning.

Så väl lärare som elever styrs mer eller mindre medvetet av normer och uppfattningar om matematik och matematikundervisning. Yackel och Rasmussen (2002) skriver om hur man genom att analysera klassrum ur både psykologiska och sociologiska perspektiv kan förklara hur uppfattningar (”beliefs”) och normer om matematik kan formas. Ur det psykologiska perspektivet kan man analysera elevers uppfattningar om sin egen respektive lärarens roll samt om matematisk aktivitet i klassrummet, men även specifika uppfattningar, föreställningar och värderingar om matematik. Ur det sociologiska perspektivet kan sociala och

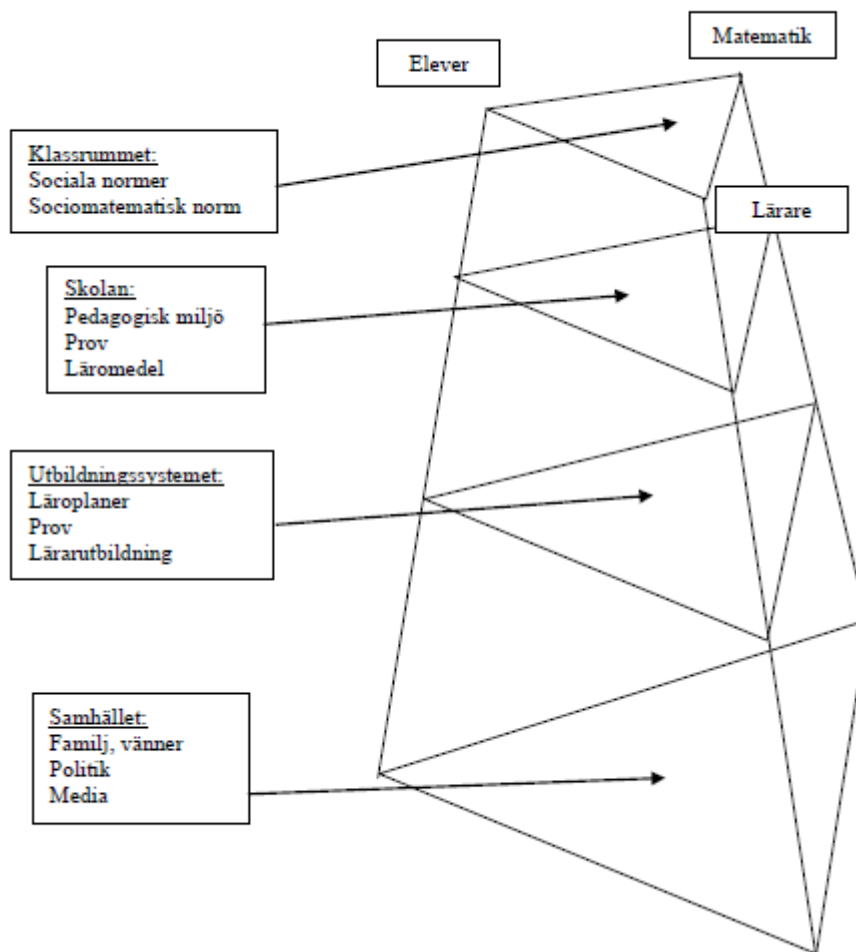
sociomatematiska normer samt matematiska aktiviteter i klassrummet studeras (Yackel och Rasmussen 2002, s.313).

Sociala normer och sociomatematiska normer

Sociala normer handlar om uttalade eller icke uttalade överenskommelser för hur samspelet ska se ut i klassrummet. De är inte ämnesspecifika, medan sociomatematiska normer är specifika för matematiken. Yackel och Cobb (1996) har studerat klassrum som följer en ”inquiry tradition”, på svenska ett undersökande arbetssätt. Där finns hos eleverna redan en acceptans för att motivera sina lösningar och förklara hur de har tänkt. Författarna menar att det är *sociala* normer som ligger bakom den gemensamma förståelsen av att det är viktigt att resonera kring lösningar (Yackel och Cobb 1996, s.461). Det är redan förhandlat och klart i dessa klassrum. Artikeln handlar om hur *sociomatematiska* normer kan förhandlas fram i klassrum som redan präglas av ett undersökande arbetssätt. Författarna visar genom exempel på hur läraren och eleverna tillsammans skapar en förståelse av vad som räknas som matematiskt skilda lösningar (”är lösningarna olika varandra?”), matematiskt sofistikerade, matematiskt effektiva eller matematiskt eleganta lösningar av problem/uppgifter och att denna förståelse handlar om sociomatematiska normer (ibid., s.461).

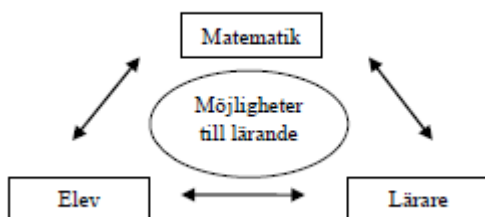
Uppfattningar och normer i matematikundervisningen

Jäder har i nedanstående bild illustrerat de faktorer som kan påverka elevers och lärares uppfattningar om matematik och därigenom även de sociala och sociomatematiska normer som förhandlas fram i klassrummet. Som bilden visar kan påverkansfaktorerna finnas på olika nivåer, eller lager. Bilden kallas hädanefter det didaktiska tornet (från Jäder 2015, s. 21):



Figur 1. Faktorer som påverkar sociala och sociomatematiska normer (Jäder 2015).

De tre hörnen i varje lager utgör den didaktiska triangeln ”som ramar in möjligheterna till lärande” (Jäder 2015, s.17):

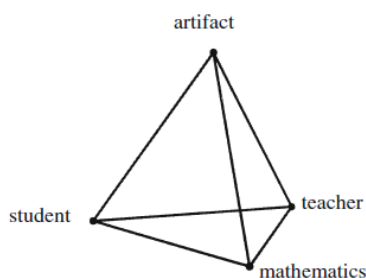


Figur 2. Den didaktiska triangeln (ur Jäder 2015).

Det översta lagret utgör klassrummet, där det främst är sociala och sociomatematiska normer som påverkar lärares och elevers uppfattningar om matematik. Normerna påverkas å andra sidan av de uppfattningar som lärare och elever har; det är en växelverkan. Elevers och lärares uppfattningar om matematik styrs även av faktorer som finns utanför klassrummet, d.v.s. de lager som i bilden ligger under klassrummet. Närmast under klassrummet finns skolan och dess pedagogiska miljö, prov och läromedel, sedan utbildningssystemet med läroplaner,

nationella prov och lärarutbildning. Nedersta lagret är samhället, med familj, vänner, politik och media. Ju längre ner ett lager är, desto längre bort från klassrummet är det, men dess faktorer kan trots detta utöva en stark påverkan på elevers och lärares uppfattningar om matematik.

Läroboken finns i lagret under klassrummet, på skolnivå, i det didaktiska tornet. Rezat och Strässer (2012) har närmare studerat lärobokens roll i undervisningen. De visar att elevernas användande av läroboken kan krocka med lärarens intentioner. De menar att läroboken ofta är en auktoritet i undervisningen, och att det är viktigt för läraren att vara medveten om elevernas syn på användningen av läroboken (ibid., s. 646). De anser att den didaktiska triangeln bör kompletteras med en fjärde nod, så att det blir en tetraeder. Rezat och Strässer (2012) har senare, med utgångspunkt från Vygotskijs teorier och det sociokulturella perspektivet, vidgat betydelsen av den fjärde noden. Det vidare begreppet är ”artefakt”, eller medierande artefakt, där en medierande artefakt kan vara läroboken, men också digital teknik, uppgifter, problem eller språk (ibid., s. 644):



Figur 3. Didaktisk tetraeder (ur Rezat och Strässer 2012).

Traditionell undervisning förknippas oftast med undervisning som är styrd av läroboken. I de fallen kan läroboken sägas utgöra en auktoritet i klassrummet i form av den fjärde noden, och då är läroboken dels en påverkansfaktor på skolnivå, dels en betydande faktor i klassrummet.

Om elevers och lärares uppfattningar om matematik och hur uppfattningar och de normer som delas i ett klassrum samspelar och påverkar varandra skriver, som tidigare nämnts, också Yackel och Rasmussen (2002). De beskriver en undersökning som de har gjort på en terminslång kurs om differentialekvationer vid ett amerikanskt universitet. Läraren använde sig av ett undersökande arbetssätt och lät eleverna jobba med en reforminriktad lärobok för hemuppgifter. Han strävade efter att fostra in i normer som är karakteristiska för ett undersökande arbetssätt: *sociala normer* som att studenterna förväntas utveckla för dem meningsfulla lösningar på problem, att de ska lyssna aktivt på varandras resonemang och söka efter att göra andras tankar begripliga för sig själva, att ställa frågor när de inte förstår och utmana när de inte håller med. Inom detta arbetssätt ville han också uppmuntra den *sociomatematiska normen* att eleverna ska ge matematiska förklaringar som är grundade i deras och deras klasskamraters erfarenheter och inte som en beskrivning av procedurer (Yackel och Rasmussen 2002, s.316). Eleverna å andra sidan, hade under sin tidigare skolgång förmodligen endast erfarenhet av ”skolmatematik”, det vill säga traditionell matematikundervisning.

Genom klassrumsobservationer och studenternas loggböcker blev det tydligt att studenterna i början av kursen förväntade sig att deras roll var att följa lärarens och lärobokens instruktioner och lösa problem på det sätt som läraren eller läroboken har visat (ibid., s.318). Deras förväntningar på lärarens roll var att han skulle förklara och visa på procedurer som de kunde följa. Krocken mellan deras förväntningar och den undervisningen de möter blir tydlig i deras loggböcker (ibid., s.319):

” The only thing I find sort of confusing is the fact that there may not be an exact answer or answers to a specific problem. ... I’m used to thinking of math as an “exact science” where there is always an exact answer or answers to a problem.”

“You never said exactly how you wanted the homework done.”

“... the class is interesting, but the problem is that I’m not learning much...”

Yackel och Rasmussen menar att studenternas reaktioner visar att de förväntar sig att matematik går ut på att använda sig av föreskrivna regler och procedurer för att finna exakta svar på problem.

I den aktuella undersökningen förändras studenternas uppfattningar under kursens gång och författarna beskriver hur läraren gör för att åstadkomma förändringen. Olika i lärarens och studenternas förväntningar leder till en förhandling om de *sociala normer* som ska gälla i klassrummet. Dels en explicit förhandling. Läraren börjar med att uttala vad han förväntar sig av studenterna i form av aktivt deltagande i klassrummet. Författarna påpekar dock att det inte räcker med att säga hur man vill ha det i klassrummet, det måste också följas av att både lärare och studenter agerar i enlighet med förväntningarna (ibid., s. 320). De illustrerar genom exempel hur läraren kan styra eleverna i önskad riktning genom sitt agerande. Under kursens andra lektion leder läraren en diskussion där hans kommentarer till klassen nästan uteslutande syftar till att uppmuntra eleverna att delta aktivt i klassrumsdiskussionen. Läraren väljer att rikta fokus mot förväntningarna som han uttalat snarare än på det matematiska innehållet. Han avstår exempelvis från att ge direkt respons på studenternas svar. I stället för att värdera svaret som rätt eller fel ber läraren om ytterligare förklaring: ”Hur hänger det här ihop?”. Han vänder sig till klassen och frågar om de håller med, om de har tänkt på liknande sätt och uppmuntrar dem till att ställa frågor om de inte förstår eller håller med (ibid., s.321-322). Studenterna anpassar mer och mer sitt agerande efter de nya sociala normerna genom att sträva efter att begripa klasskamraternas tankegångar och att förklara sina egna för de andra. De påbörjar redan vid andra lektion ett skifte i sina uppfattningar om strukturen för deltagande i klassrummet (ibid., s.323). Vid slutet av terminen är det interaktiva, undersökande klassrummet - där studenter deltar aktivt genom att lyssna på varandra, förklara för varandra, ställa frågor och utmana varandra - normen. Varje diskussion behöver inte längre gå via läraren. När eleverna agerar i enlighet med förväntningarna bidrar de till det pågående skapandet av sociala normer (ibid., s.323-324).

Enligt Yackel och Rasmussen (2002) tog det betydligt längre tid att få till stånd en förändring i de *sociomatematiska normerna* och studenters uppfattningar om matematikämnet än vad det tog att förändra de *sociala normerna* och studenternas uppfattningar om klassrumsdeltagande. Läraren lyckades till slut förhandla fram nya normer och uppfattningar genom att inte nöja sig med förklaringar som inte var förankrade i studenternas erfarenhetsbas, eller inte innehöll tolkningar av det aktuella problemet. I diskussioner om differentialekvationer fortsatte läraren att ställa följdfrågor tills studenterna hade gett en förklaring som innehöll en tolkning av förändringshastigheten i det aktuella exemplet. Studenterna fick lägre poäng på en förklaring om den enbart innehöll en procedur, så som de beräkningar som studenten gjort för att lösa uppgiften. Följande loggboksinslag visar på en förändring av en students matematikspecifika uppfattningar (s. 319):

” Most of the points lost were due to my failure to explain how I reached my answers. I thought a clear, systematic approach to the math calculations would be sufficient to explain the thought process. I now have a better understanding of the expectations.”

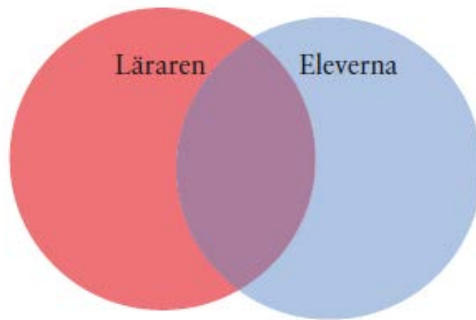
Oavsett om lärare och elever är medvetna om det eller inte påverkas elevernas uppfattningar om matematik genom att de deltar i undervisningen, men Yackel och Rasmussen (2002, s.328) har visat att skiften i uppfattningar och normer kan åstadkommas genom medvetna handlingar och förhandlingar av läraren.

Det didaktiska kontraktet

Yackel och Cobb (1996) samt Yackel och Rasmussen (2002) skriver om sociala respektive sociomatematiska normer och hur de förhandlas fram i klassrummet. Det går att se på normerna som ett slags kontrakt och det gör Brousseau. Han skriver om förhållandet mellan lärare och elever i en undervisningssituation (1997, s.31-32). Ett slags ömsesidigt ansvarsförhållande som liknar ett kontrakt. Ett kontrakt som delvis är explicit men mestadels osynligt och som samtidigt omöjligt kan vara ett riktigt kontrakt. Kontraktet bestämmer elevernas och lärarens ansvarsområden: läraren har ansvar för elevernas resultat och att möjliggöra att lärande sker, medan eleverna har ansvar för att lära sig det som läraren lägger fram för dem. Intressant nog menar han att ett helt explicit kontrakt är dömt att misslyckas. Dels för att det inte finns något exakt svar på hur läraren kan agera för att garantera att eleven tar till sig den önskade kunskapen, men också för att om läraren och eleverna slaviskt följer kontraktet ges inte möjlighet för att lärande ska uppstå. Det är brytandet och omförhandlandet av kontraktet som är det intressanta enligt Brousseau (ibid., s.32). Lärandet uppstår, eller konstrueras, enligt Brousseau i så kallade adidaktiska situationer. En adidaktisk situation kan uppstå när eleven får en uppgift eller ett problem att brottas med och läraren avstår från att förklara och lägga sig i hur eleven löser uppgiften; och låter eleven göra problemet till sitt och acceptera det. Med andra ord krävs att läraren kliver tillbaka, men lärarens roll är samtidigt central, för det är läraren som har greppet om hela den didaktiska situationen: urvalet av problem som eleverna ska lösa, valet att kommunicera eller avstå från att kommunicera information, vilka frågor som hon ställer, och så vidare (ibid., s.30-31).

Spänningar mellan elevernas uppfattningar och lärarens intentioner

Wester (2015) har i sin licentiatuppsats tittat på reforminriktad matematikundervisning utifrån ett elevperspektiv. Han har på en skola undersökt de första elever som undervisades och betygsattes enligt den nya kursplanen, Lgr 11, och deras lärare, som var del i ett utvecklingsprojekt. Han intresserade sig främst för ”vilka spänningar som framträder i praktiken mellan elevernas tolkningar och lärarens intentioner när läraren förändrar matematikundervisningen (Wester 2015, s.21). Följande bild illustrerar var spänningarna uppstår:



Figur 4. Lärarens intentioner (rött) och elevernas tolkningar (blått) av ny Undervisningspraktik (ur Wester 2015, s.120).

Där cirklarna överlappar varandra finns en samsyn, men i de färgade fälten utanför det området uppstår spänningar som begränsar elevernas möjligheter att förstå lärarens intentioner med undervisningen. Wester menar att om dessa spänningar är dolda utgör de ett hinder för att förändra matematikundervisningen (ibid.). Spänningar uppstår då läraren ”bryter existerande överenskommelser” och om läraren inte förstår varför spänningarna uppstår kan det leda till att läraren överger ett förändringsarbete på felaktiga grunder. Läraren kanske tror att det är undervisningsmetoderna det är fel på, när det i själva verket handlar om en krock mellan lärarens och elevernas uppfattningar av sociomatematiska och sociala normer.

Wester har tittat på hur spänningar kan uppstå i några centrala delar av reformarbetet. Han diskuterar framförallt spänningar som uppstår av elevers och lärares olika uppfattningar om förmågorna, förståelse samt undervisningsmetoder. En spänning som förekommer är *inom en norm*, då läraren och eleverna har olika uppfattningar om innebörden av normen. Läraren och eleverna i studien har exempelvis helt olika syn på förmågorna. Lärarens intention är att bedöma alla fem förmågorna begrepp, metod, problemlösning, resonemang och kommunikation, och vill att eleverna ska få en bredare syn på matematikundervisningen. I en intervju säger hon (ibid., s.86):

Jag vill att de ska vara rustade inför livet, att de inte ska ta ett sms-lån. Att de inte ska bli lurade. De ska kunna tänka, de ska kunna gå in i affären och göra ett överslag...

Eleverna å andra sidan, är fostrade i traditionell skolmatematik och ”Bemästrande av uppgifter är den socio-matematiska normen som anger vad det innebär att vara kunnig i traditionell skolmatematik” (ibid., s. 90). Här uppstår således en spänning

inom den sociomatematiska normen. Lärarens intentioner är ”Bedömning sker av alla fem matematiska förmågorna”, men elevernas tolkning av lärarens undervisning är: ”I bedömningen värdesätts främst hur man behärskar olika matematiska metoder för att lösa uppgifter (ibid., Tabell 5, s.122)

En annan spänning som kan uppstå är när läraren och eleverna har olika uppfattningar om vilken norm som uttrycks. Läraren i studien försöker ändra de *sociala normerna* för klassrummet, men eleverna uppfattar det som en *sociomatematisk norm*. Denna spänning uppkommer exempelvis i synen på förmågorna. Eleverna uppfattar förmågorna som en *sociomatematisk norm*, som handlar om vad som värderas i betygssättning. De ser på förmågorna som ett ”nytt bedömningsverktyg för (samma) matematikkunskaper (ibid., s. 122)”, och uttrycker till och med i intervjuerna att de tycker att det är viktigare att lära sig mer matematik än att försöka förstå förmågorna, medan läraren ser på förmågorna som *social norm* som innebär en ny och aktiv elevroll (ibid., s. 92). Läraren vill etablera en ny social norm där eleven förväntas vara aktiv i sin utveckling av förmågor. Den bryter mot den traditionella elevrollen i svensk matematikundervisning, där eleven inte behöver reflektera över vilken förmåga som krävs, utan bara fokusera på att bemästra uppgifter. När läraren försöker få eleverna att reflektera över förmågorna passar det inte ihop med elevernas erfarenheter av skolmatematik och de kan därför inte ta till sig den nya elevrollen.

I Westers intervjuer blir det även tydligt att eleverna och läraren har olika syn på vad det innebär att förstå. Jag har tidigare tagit upp de två tolkningarna av förståelse som han tar upp: instrumentell förståelse, vilket innebär att förstå procedurer som behövs för att lösa en matematikuppgift, och relationell förståelse som handlar om att även förstå hur allting hänger ihop. Eleverna tolkar förståelse som instrumentell, vilket innebär de tänker att det är viktigt att lära sig metoder, medan läraren i studien tolkar den som relationell, d.v.s. att det är viktigt även att förstå varför olika metoder fungerar. (ibid., s. 102). Att förstå kan betraktas som en sociomatematisk norm, men eleverna och läraren i studien tolkar normen olika. De pratar om olika saker utan att förstå det och då uppstår en spänning som leder till frustration. Läraren uttrycker frustration över att eleverna inte vill förstå begreppen (ibid., s. 99):

För dom är inte intresserade för begreppet. De är inte intresserade av att förstå. De är intresserade av metoden. Och det är där vi skiljer oss. Jag tror att det är den kärnan du hittar i dina intervjuer. För jag är intresserad av att de ska förstå. Dom är intresserade av att göra.

I själva verket är eleverna väldigt upptagna av att förstå matematiken, men deras tolkning är att de behöver förstå hur de ska göra. Medan eleverna ibland tycker att läraren är för omständlig. De tycker att läraren lägger för mycket tid på genomgångar, på bekostnad av deras tid för räkning av uppgifter (ibid., s. 108). En elev jämför med mellanstadiet och uttrycker sig så här om förståelse (ibid., s. 95):

Ja alltså där jobbade vi nästan bara i häften och i böckerna. Och så hade vi inte så jättelånga genomgångar heller. Det var bara tills alla förstod. Sen började alla jobba. Jag tyckte man fick lättare förstå grejer då också. Det

kan ju bero på att matten är lite svårare nu med vi. Det var då några klasser sedan.

Det uppstår även en spänning mellan normer. Medan eleverna ser på förståelse enbart som en sociomatematisk norm, vill läraren även etablera sociala normer som stödjer utvecklingen av relationell förståelse. Dessa sociala normer handlar om nya och anpassade roller för lärare och elever och nya undervisningsmetoder. Läraren vill inför laborativa arbetssätt, men blir frustrerad när hon stöter på motstånd (ibid., s. 99):

Eftersom vi hela tiden har problem med att de glömmer. Men det här har vi ju gått igenom. Det har vi gått igenom. Men då har jag i min bild tänkt mig att om man glömmer det man bara gör metoder utan att förstå det, så har jag tänkt att om man dessutom får göra det laborativt, konkret, osv, så får man ytterligare mer inputs så man lättare ska kunna få en förståelse. Att det på så sätt ska bli till en förmåga som sitter där.

Eleverna tycker att lärarens genomgångar och det laborativa arbetet tar tid från dem så att de inte hinner räkna så många uppgifter. Deras föreställning om matematikundervisning är att man lär sig bäst genom att göra många uppgifter, och de värderar att hitta effektiva metoder (ibid., s.108)

Det uppstår även spänningar i elevers och lärares syn på undervisningsmetoder. När eleverna ber läraren att förklara vill de, i enlighet med traditionell matematikundervisning, ha en förklaring som innebär att de lär sig procedurer (ibid., s. 108):

Jag behöver någon som liksom förklarar för mig. Så här måste du tänka. Så man behöver någonting som får en att hjälpa att så här kan du tänka. Om du vänder på det, så här kan du göra då liksom.

Läraren försöker samtidigt, i enlighet med reforminriktad undervisning, att aktivt avstå från att förklara procedurer. Men då eleverna inte förstår varför läraren avstår från att förklara uppstår frustration (ibid., s. 109):

Ibland menar man verkligen allvar. Man vill ha svaret. Men så försöker hon skoja till det lite. Hon vill att man ska lösa det själv.

Elever och lärare har olika uppfattningar om vad god matematikundervisning är, och dessa olikheter i uppfattningar leder till att de missförstår varandra. Wester (2015) skriver att det finns krav från samhället på en reforminriktad matematikundervisning; krav som har bidragit till den nya läroplanen, Lgr 11. Wester menar, som tidigare nämnts, att de flesta lärare är positiva till reformen, men i praktiken är undervisningen ofta styrd av läroboken och främst inriktad på att utveckla förmågan procedurhantering (Bergqvist m.fl. 2010 samt Wester 2015, s. 126). Lärare och elever har i praktiken utvecklat en gemensam traditionell syn på matematikundervisning. När läraren i hans studie vill införa en reforminriktad undervisning uppstår spänningar som hindrar förändringsarbetet. Eleverna ser inte att hela skolmatematiken har ändrats, med helt nya roller för både lärare och elever. De tolkar reformen genom traditionella glasögon: de tror att förmågorna endast är ett nytt sätt att bedöma samma kunskaper på och att de nya

undervisningsmetoderna syftar till att lära eleverna att lösa uppgifter. De ser inte att den reforminriktade undervisningen innebär att både lärare och elever intar aktiva roller och "bidrar kollektivt till skapandet av lärandeprocessen" (Tabell 1 nedan, samt Wester 2015, s. 115). De kan därför inte ta till sig de nya sociala normerna som läraren försöker etablera. Tabell 1 illustrerar detta genom att elevernas ruta för sociala normer är helt tom. De tolkar lärarens sociala normer som sociomatematiska och applicerar dem direkt på den traditionella skolmatematiken.

	Eleverna	Läraren
Social norm		Läraryroll: Att ställa utmanande frågor. Att inbjuda eleverna till att tänka och diskutera matematik. Eleveroll: Aktivt söka kunskap och förståelse tillsammans. Generella aktiviteter: Undersökande arbetssätt, diskussion och resonemang. Både läraren och eleverna i sina roller är aktiva deltagare och bidrar kollektivt till skapandet av lärandeprocessen.
Socio-matematisk norm	Undervisningsmetoderna syftar till att eleverna lär sig att lösa matematikuppgifter.	Undervisningsmetoderna syftar till utveckling av alla fem matematiska förmågorna. Utveckling av matematiskt tänkande och matematisk förståelse.

Tabell 1. Potentiella spänningar inom och mellan normer (ur Wester 2015, s.115)

Wester visar att det inte räcker med att läraren vill reformera och använder anpassade undervisningsmetoder. Läraren måste också lyckas att förhandla om klassrumsnormerna och för det behöver läraren vara medveten om att spänningar kan uppstå och förstå elevernas uppfattningar om matematik.

Konstruktivism eller sociokulturellt perspektiv?

Brousseau (1997) skriver om vikten av att skapa didaktiska situationer i klassrummet. Situationer då eleven får möta innehållet utan att läraren lägger sig i. Där framgår det att han är inspirerad av Piaget. Synen på kunskap ur Piagets konstruktivistiska perspektiv är att det är individen som konstruerar sin egen kunskap. Det handlar om att eleven ska förstå och få insikt och det gör man genom aktiviteter där man upptäcker hur världen fungerar. Idealet är självständigt arbete (Säljö 2015, s.50). Brousseau (1997, s.30) påpekar dock att Piagets teori riskerar att befria läraren från allt didaktiskt ansvar. Han skriver att en miljö utan didaktiska intentioner är otillräcklig för att få till stånd den kulturella kunskap som vi vill att eleven ska ha. Lärarens roll är med andra ord viktig i undervisningssituationen, men läraren behöver veta när hon ska låta eleven brottas med innehållet ifred. I en "miljö med didaktiska intentioner" (ibid.) är det sociologiska perspektivet viktigt.

Yackel och Cobb skriver i sin artikel om sociala och sociomatematiska normer att de först utgick från konstruktivismen, men att de insåg att de behövde bredda sin tolkning med att även införa det sociologiska perspektivet. Då tog de även med

symbolisk interaktionism, vilket är ett socialpsykologiskt perspektiv, i sin teoretiska grund (Yackel and Cobb 1996, s. 459).

Reazt och Strässer utgår från Vygotskijas sociokulturella perspektiv, med ”den närmaste utvecklingszonen (ZPD)” och medierande verktyg när de inför den didaktiska tetraedern. I Vygotskijs anda utvecklas vi i relation med andra. Vygotskij introducerade den närmaste utvecklingszonen och i den andan är både läraren och klasskamraterna viktiga för varje elev. (Säljö 2015, s. 99).

En lärare som vill bedriva en reforminriktad undervisning kan ta stöd från och avstamp i så väl konstruktivismen som det sociokulturella perspektivet eller socialpsykologiska perspektivet (symbolisk interaktionism). Det är inte synen på kunskap utifrån dessa perspektiv som avgör om en lärare bedriver reforminriktad eller traditionell matematikundervisning.

Material och metoder

Metodologiskt perspektiv

Jag har valt en kvalitativ ansats för min undersökning. Dels för att jag tror att en kvantitativ metod för att svara mot mitt syfte skulle bli alltför omfattande. Men framförallt tror jag att den inte riktigt skulle svara mot mitt syfte. Mitt syfte är att undersöka lärares *uppfattningar* om god matematikundervisning samt hur lärares uppfattningar och undervisningspraktiker förhåller sig till den traditionella bilden av matematikundervisning. För att skapa mig en helhetsbild av en lärares uppfattningar önskade jag ta del av lärares berättelser och då är kvalitativa intervjuer en lämplig metod. En kvantitativ metod skulle nog passa bättre för att kartlägga, exempelvis genom enkäter, hur stor andel av lärare som bedriver en traditionell matematikundervisning respektive en som bryter mot det traditionella. Men jag är inte efter att förklara utan snarare att *förstå och tolka* lärares beteende (Bryman 2008, s. 32 och Hyldgaard 2008, s. 32) och då passar en kvalitativ ansats bättre. I en kvalitativ undersökning är inte begreppen validitet, d.v.s. om man mäter det man vill mäta, och reliabilitet, d.v.s. mätningens tillförlitlighet, lika relevanta som i kvantitativ forskning, eftersom man inte är ute efter att mäta (Bryman 2008, s. 351). Bryman skriver att många kvalitativa forskare anser att det finns andra sätt att bedöma kvalitativa studier som är mer relevanta, något jag håller med om. Guba&Lincoln (1985 och 1994, citerade i Bryman 2008, s. 352-357) föreslår följande kriterier i stället för validitet och reliabilitet: Tillförlitlighet, som handlar om undersökningens trovärdighet, överförbarhet, pålitlighet och objektivitet, samt äkthet som bl.a. handlar om huruvida forskningen ger en rättvis bild av de studerades uppfattningar m.m.

Jag har genomfört semistrukturerade intervjuer med fem lärare, för att ta del av deras uppfattningar om god undervisning och hur deras uppfattningar och undervisningar förhåller sig till den traditionella. Min strategi är mer induktiv än deduktiv, då jag genom den empiri jag samlar in vill skapa mig en bild av lärares uppfattningar om god matematikundervisning och undervisningspraktiker.

Undersökningsobjektet/Urval

Undersökningsobjektet är lärare som är verksamma på högstadiet. Jag skickade ut en förfrågan om att delta i undersökningen till rektorer på nio skolor. Faktorer som jag beaktade när jag gjorde urvalet av skolor var dels geografisk närhet, skolorna skulle ligga inom några mils avstånd från min bostad, dels typ av skola och upptagningsområde, för att få möjlighet att intervjuar lärare som är verksamma i olika skolmiljöer. Jag kontaktade både friskolor och kommunala skolor, och både innerstadsskolor och förortsskolor. Jag hoppades på att få med både manliga och kvinnliga lärare i urvalet och gärna en viss spridning på ålder. Av de skolor jag kontaktade fick jag endast svar från fyra skolor. En skola svarande nekande, men tre skolor svarade att de hade lärare som ville ställa upp i undersökningen.

Då min undersökning inte är kvantitativ aspirerar jag inte på att dra ett representativt urval eller att generalisera mina eventuella fynd till någon viss population. Jag försökte ”få en så stor spridning som möjligt” (Trost 2010:137 citerad i Cardelus 2016), ”så att undersökningsproblemet speglas på olika sätt och det ges spännvidd i beskrivningen” (Cardelus 2016).

Presentation av urvalet

Mitt urval består av fem lärare som är verksamma på högstadiet. Fredrik och Johan jobbar på en kommunal skola i en storstadsförort, Anders och Karin på en kommunal skola i en förort till samma storstad. Helena jobbar på en friskola i en innerstad. Alla är behöriga i att undervisa i matematik, plus minst ett ämne till, och de undervisar i matematik nu. Alla fem har jobbat som lärare i 15 år eller mer. Ingen av lärarna medverkar med sitt riktiga namn.

Bearbetning och analys

Intervjuerna är transkriberade. Därefter har jag bearbetat resultaten genom att söka nyckelord och nyckeluttalanden utifrån mina forskningsfrågor.

- Utifrån lärarnas uttalanden om vad de anser vara god matematikundervisning har jag kategoriserat deras uppfattningar som i huvudsak traditionella eller reforminriktade.
- Utifrån deras uttalanden om hur de bedriver sin undervisning har jag kategoriserat deras undervisningspraktik som i huvudsak traditionell eller reforminriktad. Jag har även analyserat var i den didaktiska triangeln, lärare-elever-matematikämnet(innehåll), som läraren befinner sig: Beskriver läraren det som ska ske utifrån vad hon/han behöver göra, vad eleverna behöver göra, eller som ett samspel? Eller pratar läraren bara om matematiken (innehållet)?
- Utifrån lärarnas uttalanden om upplevda hinder eller stöd har jag analyserat deras situation utifrån det didaktiska tornet: var de befinner sig och vilka påverkansfaktorer som finns.

Etiska överväganden

Jag har följt Vetenskapsrådets forskningsetiska principer informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav samt nyttjandekrav: Jag har skickat ut informationsbrev till de deltagande lärarna och de har samtyckt till att delta i undersökningen, alla är anonyma och medverkar med fingerade namn. Skolans namn eller ort anges inte. Uppgifterna som jag insamlat om enskilda personer använder jag endast för forskningsändamål.

Resultat och analys

Jag presenterar resultaten av varje intervju för sig, för att sedan sammanfatta dem på slutet. Jag har i intervjuerna ställt frågor för att få svar på mina frågeställningar:

1. Vad anser lärare är en god matematikundervisning?
2. Hur bedriver lärare sin matematikundervisning: reforminriktat eller traditionellt?
3. Vilka hinder eller stöd upplever lärare för att bedriva den matematikundervisning de önskar?

I min analys strävar jag efter att kategorisera de intervjuade lärarnas uppfattningar om matematikundervisning samt deras undervisningspraktiker som traditionella eller reforminriktade. Utifrån mina analyser av lärarnas svar funderar jag även över var i den didaktiska triangeln som läraren befinner sig, var i det didaktiska tornet som de faktorer som läraren tar upp som möjliggörande eller hindrande för den önskade undervisning återfinns samt hur läraren använder läroboken (se bakgrunden för bilder på den didaktiska triangeln, det didaktiska tornet respektive den didaktiska tetraedern).

Fredrik

Fredrik ger i sina svar uttryck för en uppfattning om att reforminriktad matematikundervisning är mer önskvärd, men i praktiken är hans undervisning traditionell. Hans beskrivning av god undervisning innehåller fraser som ”där man kan resonera och komma fram till något på olika sätt, och det behöver kanske inte ens vara rätt eller fel”, och ”de kan få tillfälle att lära av varandra” – en beskrivning som exempelvis för in tankarna på Larsson (2015) som skriver att en reforminriktad undervisning inriktas på att utveckla elevernas förmågor genom samarbete. Men Fredrik kan inte på rak arm ge något konkret exempel på när han har genomfört en sådan undervisning. Han säger till och med att hans matematikundervisning skulle kunna vara bättre än den är. På frågan om vad en ”bättre undervisning” skulle kunna innebära svarar han:

Ja, lite större uppgifter, där var och en får tänka på sin nivå och bidra på olika sätt och få tillfälle och diskutera matte och resonera kring matte på ett annat sätt än vad som kanske sker vanligtvis. Det lägger jag ju in ibland naturligtvis, men inte tillräckligt ofta, som jag skulle vilja.

En vanlig lektion hos honom går i huvudsak ut på att han börjar med en genomgång och sedan får eleverna jobba ganska mycket med egen räkning i boken, enligt en veckoplanering. Den beskrivningen liknar Helenius (2013, s.1) uttalande om att traditionella matematiklektioner oftast går ut på att eleverna arbetar med att lösa uppgifter i sin lärobok på egen hand. Fredrik påpekar att det förmodligen skulle bli bättre om han lät eleverna jobba mer med ”gruppuppgifter och lite annan typ av uppgifter”, men anser sig inte ha den tiden som krävs för att leta fram andra typer av uppgifter än de som finns i boken och bedöma om de är lämpliga.

... för tyvärr som jag upplever det så är det ju så att man behöver ju använda sin tid till allt möjligt och det enda som riktigt går att ta bort på något sätt, för att göra andra akuta saker, det är just tiden till för- och efterarbetet. Och i NO går det ju inte att ta bort, för där måste man

verkligen plocka fram och plocka undan saker och så där. Och då är det enklaste att kanske tänka, vi kör på lite i boken den här mattelektionen också, jag plockar fram de där andra grejerna en annan gång.

Fredrik säger att hans uppfattning om vad som är god matematikundervisning har förändrats sedan han började arbeta som lärare. I takt med att läroplanerna har ändrats, har även Fredriks uppfattning ändrats från att vara mer färdighetsstyrd till att vara åtminstone lite mer problemlösningsinriktad. Av intervjun framgår dock att varken hans uppfattning eller undervisning har genomgått någon drastisk förändring.

De hinder mot att jobba på ett ”bättre sätt”, alltså reforminriktat, som Fredrik pekar ut handlar om praktiska förutsättningar för lärare att bedriva undervisning. Han hänvisar till ”lärares arbetssituation” och menar att den ständiga bristen på tid gör att han prioriterar bort den extra förberedelsestid som skulle krävas. Han upplever inte att han har stött på motstånd från vare sig kollegor eller skolledning, men inte heller något konkret stöd som exempelvis kollegialt samarbete inom matematiken. Han pekar på andra praktiska förutsättningar som skulle kunna underlätta, så som en färdig bank med problem att hugga tag i på väg till lektionen. Det han beskriver är främst vad *han* ska göra för att en ändring ska ske i undervisningen. Jag skulle säga att han placerar sig i lärarhörnet på den didaktiska triangeln. Om man ser till det didaktiska tornet ligger alla de faktorer han tar upp *utanför klassrummet*. Han pratar om lärares arbetssituation och den styrs ju dels av faktorer som exempelvis pedagogisk miljö och läromedel, som ligger på skolnivå, men också av faktorer som har att göra med utbildningssystemet, som till exempel läroplaner, och inte minst samhällsfaktorer, som politiska beslut. Fredriks undervisning styrs i hög grad av läroboken: ”Jag jobbar enligt boken rätt mycket”. Det som han framförallt vill att eleverna ska få med sig av hans undervisning är de kunskaper som står i kunskapsmålen, och han lyfter också fram att det läromedel han använder ”som tur är” följer läroplanen relativt väl. Han lutar sig med andra ord mycket på läroboken, så till den grad att man kan säga att den har klivit in som en auktoritet i hans klassrum: hans undervisning skulle kunna beskrivas utifrån Rezats och Strässers (2012) didaktiska tetraeder, där läroboken utgör en fjärde nod.

Johan

Johan är den svåraste att kategorisera i traditionell/reform. Hans uppfattning om god matematikundervisning är en undervisning som engagerar eleverna. Han är som mest nöjd då han lyckas väcka elevernas intresse för matematik. Hans högsta önskan är att eleverna ska känna att de *kan* matte. Men att en lärare vill få sina elever engagerade i undervisningen behöver i sig inte betyda att läraren önskar eller bedriver en reforminriktad undervisning. Det skulle givetvis kunna vara så: Exempelvis kan Yackel och Rasmussens (2002) och Boalers (1998) tal om att matematiken ska upplevas meningsfull för eleverna kopplas till den reforminriktade praktiken, och upplevelsen av meningsfullhet kan i sin tur leda till engagemang och intresse hos eleverna. Även formuleringen ”utvecklar intresse för matematik” i kursplanens (Lgr 11, s. 47) syfte kan kopplas till reforminriktning, men elevernas engagemang och intresse skulle även kunna väckas av en traditionell undervisning. De allra flesta lärare vill nog engagera sina elever. Johan har visserligen insett fördelen med att alla i klassen jobbar med samma sak, att det då är lättare att få igång en klassrumsdiskussion där alla kan bidra på sin

nivå, och där de kan resonera kring och jämföra samt värdera varandras lösningar. En insikt som andas reforminriktning och kan jämföras med formuleringar som ”värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat” och ”föra matematiska resonemang” i kursplanens syfte (Lgr 11, s. 47). Han brottas dock med hur han ska få till sådana situationer.

När Johan började på sin nuvarande skola upplevde att han stötte på motstånd när han införde ett upplägg som innebar att alla elever fick en specifik läxa varje vecka. Skolledningen uppmuntrade visserligen honom, men hans kollegor i ämneslaget kunde säga ”nej nu ska vi ju köra likadant allihop. Vi har den här veckoplaneringen och vi ska gå igenom kapitlet från början till slut”. Johan upplevde att det fanns en mer eller mindre outtalad överenskommelse om att man i matematiken körde med de här planeringarna: ”Den här veckan ska ni hinna det här och den som inte hinner ska göra klart hemma”. Han var, och är, kritisk till det upplägget, för då riskerar det att bli så att bara de som är svaga får läxa, de andra får ju aldrig någon läxa. I stället gav Johan alla elever läxa varje vecka. Läxorna var nivågrupperade; gröna, blå och röda uppgifter. Upplägget var att alla skulle göra den gröna, de skulle försöka den blåa och de som ville försöka den röda så att de åtminstone hade läst den och visste vad den handlade om. Utöver rättvisaspekten hade Johan ett till syfte med läxorna och det var att få igång klassrumsdiskussionen. För att alla har gjort samma sak och då kan alla bidra på sin nivå. De kunde exempelvis diskutera vilken lösning som var tydligast, vilken som var effektivast och vilken lösning som de bara tyckte var bäst. Sedan kunde Johan gå igenom några olika varianter av lösningar på tavlan.

Men det var faktiskt, ja det var stort motstånd känner jag. Från alla möjliga håll. Det var svårt när både kollegor, elever och föräldrar tyckte ”vad är det här får något? Ska de ha läxor, men de har ju planeringen i läxa?” Eftersom det här didaktiska kontraktet som vi pratade om tidigare, var ju så att man skulle få den här planeringen och jobba efter den och sedan hade man prov på slutet.

Johan anser sig alltså främst motarbetad av starka ämneskollegor, vilka även påverkade elevers och föräldrars uppfattningar om matematikundervisning. Eleverna tyckte att klassrumsdiskussionerna tog av deras tid att räkna i boken. Det slutade med att Johan gick ifrån det arbetssättet och nu följer han i stället veckoplaneringarna, där eleverna jobbar i boken i sin takt. Emellanåt varvar han med andra typer av aktiviteter i undervisningen. Han har exempelvis låtit elever leda lektioner, något som han gärna vill testa igen, då han tyckte att det ledde till att eleverna blev engagerade i undervisningen och han tyckte att han lärde sig av deras lektionsupplägg. Ett annat exempel som han lyfter fram är när han startade upp ett geometriavsnitt med att ge eleverna var sitt A4-papper: ”De har någonting i handen och då märker man direkt att alla på något sätt blir mer engagerade.” Det är tydligt att han ser vinsten med en undervisning där eleverna får upptäcka samband och mönster, snarare än att han ska berätta för dem, men han skulle behöva ett kollegialt samarbete för att göra verklighet av det. Han tycker inte att de har uppmuntrat varandra tillräckligt inom kollegiet, förutom när de gick mattelyftet. Då fick de diskutera under vägledning av en handledare och han upplevde att de hade bra diskussioner kollegor emellan. Nya möjligheter

öppnades, men när de tillfällena försvann gick alla tillbaka till det vanliga, traditionella:

... När vi kom överens om att den här uppgiften ska vi göra den här veckan, då var ju på något sätt tvungen att göra den. Och man hade också tid att planera den och utvärdera den tillsammans. ... Men när man inte var tvungen längre, då är det ju den här lilla tiden som det krävs, att förbereda något sådant och sedan utvärdera det ... Man är ju vanemänniska, och tidsbristen är ju stor. Så då känner man det är nog enklast att gå tillbaka till mitt veckoschema och köra det. Och eleverna är trygga i det...

Så Johans undervisning är traditionell, och hans uppfattning om god matematikundervisning rör sig mellan traditionell och reforminriktad. Han är inte riktigt tillfreds med sin undervisningssituation. Han vill bygga relation med eleverna, men känner inte riktigt att han lyckas fullt ut:

Det är vissa elever som ... de lyssnar inte alls när jag går igenom saker. De stänger av öronen och ögonen och säger nej jag förstår ingenting när du pratar och det är ju jättejobbigt för då har jag ju ingen chans att nå dem.

Det matematiska innehållet är inte alltid synligt i hans berättelse. Den handlar mer om relationen mellan honom och eleverna än om matematiken och han tycks röra sig längs sidan mellan elevhörnet och lärarhörnet i den didaktiska triangeln. Han har försökt att styra användningen av läroboken genom att ge läxor med ett specifikt syfte, men lyckades inte få med eleverna på tåget, och låter nu läroboken styra undervisningen till stor del. Så pass att läroboken har plats i form av en auktoritet, eller en fjärde nod i Rezats och Strässers (2012) tetraeder, även i hans klassrum. De faktorer som hindrar honom från att bedriva den undervisning han önskar finns både i klassrummet och utanför. Utanför klassrummet finns främst faktorer som verkar på skolnivå, dels i form av kollegors uppfattningar om matematik och rådande normer som säger att ”så här gör vi på den här skolan”, men också elevers erfarenheter av tidigare skolgång, som kan sägas höra till utbildningssystemet och samhället. I klassrummet har Johan återkommande misslyckats med att förhandla om de sociala och sociomatematiska normerna.

Anders och Karin

Anders och Karin jobbar på samma skola och de har sedan över 20 år tillbaka ett nära samarbete. För närvarande arbetar de i ett tvåläraresystem, vilket innebär att Anders är med på Karins mattelektioner minst en gång i veckan och vice versa. Båda två lyfter fram att det innebär att de kan hjälpas åt och vara flexibla och verkligen jobba utifrån elevernas behov. Karin och Anders undervisar genom problemlösning ungefär en gång i veckan, ibland oftare.

Anders

Anders är kanske den som allra tydligast ger uttryck för så väl en reforminriktad uppfattning om god matematikundervisning som en reforminriktad undervisningspraktik. Hans intervju innehåller en mängd ord och uttalanden som förknippas med reforminriktad undervisning. När jag frågar Anders vad han vill att eleverna ska få med sig av hans undervisning är hans första ord *kreativitet*, något som för tankarna till Jonsson med fleras studie (2014) om kreativa resonemang:

En kreativitet där man vågar använda verktyg för att se vad som händer och en grundkunskap så att man känner en säkerhet i att man har bra verktyg också. ...

God matematikundervisning enligt Anders innebär *lärarledd upptäcktsinläring*, vilket han beskriver med att man som lärare har ett tydligt mål med vad det är för moment man ska gå igenom, vilka övningar man ska jobba med och vilket matematiskt innehåll eleverna ska få möjlighet att upptäcka i de olika övningarna. Han tycker mycket om att jobba med *problemlösning* – något som förknippas med det reforminriktade - och gärna problemlösning där man har tillgång till någon form av *konkret material* som stöd, förutsatt att man är *medveten om vad det är för matematik* man jobbar med:

Man kanske har en aktivitet där det finns en väldig tydlig koppling till ett matematiskt begrepp, kanske en funktion. Man ska t.ex. ta ett antal människor över en flod. Och då kan man använda sig utav knappar och någon liten plastbåt, eller något sådant, och sedan ser man till att människorna kommer från den ena sidan till den andra. Men om man inte följer upp det med de här frågorna, alltså hur många turer blev det här? Hur påverkar antalet människor hur många turer det blir? Kan du åskådliggöra det här i en tabell? Kan du beskriva med ord eller symboler vad det finns för samband? Om man inte gör det så kommer man ju inte till det läget när det kan bli inläring, utan då blir det just bara som ett roligt spel eller en lek i värsta fall. Så det är oerhört viktigt att man har fokus på: vad är det matematiska innehållet, vad är det eleverna ska upptäcka med det här, så att när de går därifrån i första hand ska tänka på kanske en funktion, inte en situation när de höll på med en båt och några som var i djungeln.

Grunden i Anders undervisning är att eleverna ska få *upptäcka samband*, inte att han som lärare ska berätta och förklara. Han avstår aktivt från att tala om och gå igenom saker för eleverna, men han styr vad de ska upptäcka genom att hela tiden ha fokus på det matematiska innehållet. Han har hela tiden en tanke med varje aktivitet. På så sätt kan han liknas vid en skicklig dirigent som leder en orkester. Det för tankarna till Larssons (2015) avhandling som handlar om hur lärare kan iscensätta helklassdiskussioner och samtidigt låta eleverna vara *autonoma tänkare*; liksom till Brousseaus (1997) *adidaktiska situationer*, vilka ryms inom didaktiska situationer vilka läraren styr. På frågan om han tycker att det är svårt att låta bli att förklara för eleverna svarar han inte tycker att det är svårt nuförtiden:

För att det är **jättelätt**. Börjar man göra det så är det där som eleverna känner igen som klassisk skolgång, och så hugger de direkt på det och så säger de så här vill vi att det ska vara. För många elever tror att de lär sig mer när de ser hur jag går igenom saker. De kan inte själva identifiera att de kan förstå kanske när jag går igenom saker, men de klarar inte av att lösa egna uppgifter.

Larsson (2015, s. 29) uttrycker liknande tankegångar när hon påpekar att om läraren hjälper till för mycket överger eleven sin egen tankeprocess för att istället följa lärarens instruktioner.

Anders tycker att han och Karin generellt sett får många elever att komma långt. Han säger att deras elever uppnår bra resultat, om man tittar på deras betyg och prestationer på nationella prov. Han betonar också hur roligt det är att undervisa när man har "hittat en modell som fungerar bra för eleverna och som lyfter fram det som är intressant i matematiken på ett bra och roligt sätt." Ett konkret exempel är vad de har uppnått med de sjuor som de har nu. De har fokuserat mycket på att träna dem i problemlösning. I början av den här terminen var arbetet upplagt så att ca 6 av 9 lektioner i princip bara handlade om att eleverna jobbade med problemuppgifter kring taluppfattning. Anders ser en väldigt stor skillnad hos eleverna nu jämfört med när de träffade eleverna i början av hösten. När de började var eleverna inte vana vid den här undervisningsmodellen. De var mer inkörda på en traditionell undervisning, där läraren går igenom och så sitter eleverna och repeterar och övar på ett antal liknande uppgifter.

När de börjar med det här så är de väldigt osjälvständiga. De behöver väldigt mycket vägledning, väldigt mycket hjälp för de vågar inte ta ut svängarna, de vågar inte prova eller lita på att de har de här verktygen och förmågorna som de kanske egentligen hade. Men det har blivit en **mycket, mycket** stor skillnad ... Nu när vi säger att vi ska ha lite problemlösning, frustar halva klassen nästan till för nu ska det liksom huggas tag och kämpas. Och det är ju dit jag vill komma.

Exemplet ovan visar på hur väl Anders och Karin lyckas med att förverkliga sina intentioner med sin undervisning: De möter elever som är vana vid och förväntar sig en traditionell undervisning, men några veckors "kickstart" i form av intensivt arbete med problemlösning följt av fortsatt liknande arbete under terminen har lett till så väl förändrade uppfattningar som beteenden hos eleverna. Det påminner om Yackels och Rasmussens (2002) undersökning av amerikanska studenter, där studenterna ändrade sina uppfattningar, dels om matematikundervisning, dels om sociala normer som deltagande i klassrummet, under studiens gång. Minst lika stora skiften i uppfattningar och beteenden ses hos eleverna i Anders berättelse: de går från att inta en passiv och "osjälvständig" roll till ett aktivt deltagande, där de med glädje tar sig an ett nytt problem och vågar ta ut svängarna. Anders upplever att de har lyckas väldigt bra med att få ett klimat där eleverna vågar ställa frågor och prova nya saker. I deras klasser blir det "lite ballt om man har tänkt annorlunda, även om man kanske vet att det här inte var den smidigaste vägen fram, men man kunde ta sig fram så här också." För Anders är det viktigt att eleverna får lära sig, och uppleva, att det är väldigt sällan matematiken går ut på att man "kör ner näsan i en fåra och så går man rakt fram", utan att man kan få prova alla möjliga olika strategier innan man kan se var det kan finnas en möjlig väg fram. Här ger han uttryck för sociala normer som att det är viktigt att resonera kring sina lösningar och att använda sig av ett undersökande arbetssätt, något som präglar klassrummen som undersöks av Yackel och Cobb (1996). Anders och Karins elever verkar, till skillnad från eleverna i Westers (2015, s. 115) undersökning, förstå och därför kunna ta till sig de nya, aktiva sociala rollerna som deras undervisning innebär.

Anders och Karin har ett starkt stöd i varandra, vilket bidrar till att de lyckas med att genomföra den undervisning som de vill. Vidare lyfter Anders fram att han och Karin har lagt ner väldigt mycket tid på att ta del av problemlösning och laborativa aktiviteter. De har under många år läst allt de har kunnat hitta om ämnet, allt från

forskning och tidsskrifter till allmänna råd från Skolverket, och haft mycket kontakt med människor som jobbar på det här sättet, både inom och utanför Sverige. De har tagit del av hur andra tänker kring undervisning, bland annat genom att observera andra lärares lektioner med elever, men de har också fått möjlighet att föreläsa för andra. Anders upplever även att han har fått det stöd han behöver från skolledningen för att kunna bedriva den undervisning han önskar. Han tror att det är svårt att bedriva ett sådant förändringsarbete som de gjort utan stöd och uppmuntran från skolledningen. Deras kollegor har inte helt och fullt anammat deras sätt att undervisa, men de har uttryckt uppmuntran. Han har inte mött motstånd från föräldrar eller skolledning, inte ens när de under en period för dryga 20 år sedan experimenterade med att inte använda lärobok. Det motstånd han har mött har handlat om initialt motstånd från vissa elever:

När vi träffar nya grupper, inte i de här tre klasserna men tidigare, brukar det ibland kunna finnas, framförallt sådana som är formellt väldigt duktiga som inte riktigt ser nyttan med det. För de tycker att de tar för mycket tid att hålla på med en enda uppgift när de istället hade kunnat lösa 10 uppgifter i en mattebok kanske. Och de tror att jag stjäl nyttig tid från dem till saker som de inte lär sig någonting av. De ser inte själva hur de utvecklas som problemlösare. Och de har kanske en tanke om att matematik handlar om att kunna tillämpa ett antal olika regler och begrepp och sådana saker.

De elever beskrivna ovan som enligt Anders initialt tycker att det vore bättre att räkna 10 uppgifter i stället för att hålla på så länge med en enda uppgift, uttrycker sig likt de elever i Westers studie (2015, s. 108) som tycker att läraren med sina genomgångar och aktiviteter tar tid från dem, så att de inte hinner räkna så många uppgifter som de skulle vilja. Anders tror att dessa duktiga elevers initiala skepsis också kan bero på att de inte lika självklart blir bäst i klassen. Han menar att alla elever i en klass vanligtvis brukar ha en klar uppfattning om vilken eller vilka elever som är bäst i klassen på matematik, men när man jobbar med problemlösning blir det inte lika tydligt. Den sociala strukturen i klassen ändras och det har han märkt kan upplevas som lite otryggt i hela klassen. Men det initiala motståndet brukar inte vara länge. Anders erfarenhet att hans elever förr eller senare ändrar sina uppfattningar:

”... för att de som har den här formella kunskapen i matematik, de har ju fler och kraftfullare verktyg för att kunna lösa problem, så det handlar ju om att de måste bli trygga i att våga ge sig ut på lite hal is. Och det har jag inte varit med om någon gång att det är någon som inte tycker att det blir roligt, för att det *är* ett roligare sätt att bedriva lärande på, när man får brottas med sådana här problem, för att se om man kan saker.

Hela den didaktiska triangeln finns med i Anders berättelse. Undervisningen blir till i samspelet elev-lärare-innehåll. Hans roll som lärare är att leda undervisningen mot ett bestämt mål, men han låter eleverna ta plats som autonoma tänkare. De får brottas med det matematiska innehållet och han finns där för att fylla i de detaljer som eventuellt fattas för att de ska tillägna sig kunskapen. Han tycks även förhålla sig ständigt nyfiken på matematiken och uttrycker att ”matematik kan vara konst, den kan vara skönhet, lite roligt, att man kan rita omöjliga perspektiv ... och matematiken har utvecklats och utvecklas fortfarande”. Hans uppfattning om vad

som är god matematikundervisning förändras hela tiden. När han började var han färgad av den undervisning han själv hade fått.

Då hade jag ju aldrig mött någon annan undervisning än att läraren kom in, gick igenom exempel, varpå eleverna gjorde ett antal enklare uppgifter och så fick man lite svårare och på slutet så var det några textuppgifter där man skulle försöka tillämpa det i någon form utav nästan problemlösningssituation, som inte så ofta var ren problemlösning.

Från början utgick hans undervisning från någon form av genomgång, och därifrån har en gradvis förändring skett. Han reflekterar över att den matematikundervisning han bedriver idag, där han aktivt avstår från att gå igenom saker, har få likheter med det sättet han undervisade på för många år sedan.

Anders och Karins placering i det didaktiska tornet analyseras efter redovisningen av Karins intervju.

Karin

I Karins intervju framkommer inte lika tydliga kännetecken för en reforminriktad uppfattning om god matematikundervisning som hos Anders. God matematikundervisning enligt Karin är när eleverna känner sig trygga att anta utmaningar. Att det vet hur de kan få hjälp och att de får hjälp. Det är viktigt för henne att börja med en låg tröskel, för att sedan utmana de elever som behöver det mer. Hon vill hjälpa sina elever att komma så långt som de själva upplever att de har möjlighet till, och gärna lite till. Hon har arbetat en del med att uppmuntra *dynamiskt tänkande* istället för *statiskt tänkande*, det som på engelska brukar benämnas *growth* respektive *fixed* mindset (Dweck 2007), för att få eleverna att inse att de har en del i sitt eget lärande. Dessa uttalanden skulle likväl kunna handla om en traditionell uppfattning om god matematikundervisning som en reforminriktad. Men genom hennes samarbete med Anders blir det tydligt att den undervisning hon bedriver är reforminriktad. Inte minst visar det faktum att de undervisar *genom problemlösning* ca en gång i veckan på reforminriktning. Riktig problemlösning, där eleverna får kämpa för att lösa problemet (Larsson 2013, s. 2), förknippas starkt med det reforminriktade. Hon berättar att de bedriver ett samarbetslärande:

Vi jobbar ganska mycket med att man ska jobba med den man sitter med. Så att man hjälps åt, att det är ett samarbetslärande. Framförallt när man jobbar med problemlösning, men även när man bara jobbar i boken, för att träna på det som ingår i planeringen.

Just nu testar Karin och Anders en betaversion av ett digitalt läromedel. Arbetet med läromedlet kan gå till så att Karin väljer ut en uppgift som hon vill att eleverna ska jobba med. Vissa kanske redan har gjort den, men det tycker hon inte gör så mycket, för de kanske bara har skrivit ett svar och nu får de i uppgift att utveckla sitt svar. Först får varje elev tänka själv, sedan pratar de ihop sig i par och sedan lyfter hon upp det i helklass. Hon upplever att i och med att hon bjuder in till samarbete ibland så samarbetar eleverna även när hon inte säger till. Om de kör fast frågar de sin kompis om hur man kan lösa uppgiften. Hon nämner en positiv följd effekt av samarbetslärandet:

Jag upplever att jag inte måste titta på olika nivåer i matematik. Utan man kan prata med vem som helst och man kan få input ändå på de här uppgifterna. Så det måste inte vara någon slags nivågruppering för att det ska fungera.

Att eleverna kan be varandra om hjälp visar att hon har klivit tillbaka och låter eleverna kliva fram som autonoma tänkare, något som Larsson (2015, s. 23) betonar vikten av att lärare gör. Även samarbetslärandet som Karin beskriver stöds av Larsson (ibid., s. 23): Hon skriver om de nya elev- och lärarroller som är på frammarsch i Europa och USA, där målet är att utveckla elevernas förmågor och fokus är på samarbete snarare än på faktakunskaper och inbördes konkurrens mellan elever. Det är inte nödvändigtvis så att alla samtal måste gå via Karin, men hon är fortfarande en tydlig ledare av undervisningssituationen. I Karins sammanfattning av en bra lektion är det påtagligt att hon där har lyckats styra undervisningen åt det håll hon vill. Liksom i Anders fall för hennes berättelse tankarna till en dirigent som leder en orkester (Larsson):

Man hade en plan, man kommunicerade den till eleverna, man genomförde det och upplevde att eleverna nådde vissa mål till exempel. Att man upplever att eleverna vågar resonera till exempel, om det är det jag är ute efter, och det är olika i olika klasser. ... Det har hänt någonting som jag ville skulle hända.

Det är viktigt för Karin att det är *hon* som styr undervisningen, inte läroboken. En stor del i att hon lyckas med det tillskriver hon det experiment som hon och Anders genomförde för många år sedan då de inte använde sig av någon lärobok. Hon säger att hon tack vare experimentet *frigjorde sig från bokstyrning*. Sedan dess har de använt sig av läromedel i undervisningen, men nuförtiden styr Karin själva användandet. Hon tycker inte att man behöver räkna alla uppgifter för då kanske man "bara gör och gör och gör utan att tänka". Hon betonar vikten av att hela tiden hålla fokus på vad som är viktigast i det här kapitlet, och att undervisningen måste hänga ihop med planeringen. "Alltså *vi har ju en målstyrd skola*, och då måste det ju vara tydliga mål". Karin är kanske den som tydligast ger uttryck för vikten av att jobba i enlighet med styrdokumentet i sin berättelse. Hon har ett fokus på målen och betonar "alignment", att planering och undervisning ska hänga ihop.

Jag tycker att man ska följa sina läroplaner, även om man kanske tycker att någon annan var bättre, det spelar ingen roll, man ska följa den som är. Det är inte något fritt val, det är starkt styrande, det är som vilken lag som helst.

Hon lyfter fram att hennes uppfattningar om matematikundervisning dels har påverkats av de förändrade läroplanerna, men även för att det hände saker med henne när de tog bort läroboken från undervisningen under en period. Nuförtiden tycker hon att det är viktigare och ger mer kunskap med sådant som *samarbetslärande, att diskutera och resonera*. Hon anser att både hon och läroplanerna har mer *fokus på lärandet* idag jämfört med tiden innan Lpo94, då det var "fokus på en normalfördelningskurva." Hon har med andra ord genomgått ett skifte i sina uppfattningar om matematikundervisning och det har lett till en förändring i hur hon bedriver sin undervisning.

Liksom i Anders berättelse finns hela den didaktiska triangeln med hos Karin. Det blir tydligt att hon värdesätter samt lyckas åstadkomma ett samspel mellan lärare, elev och matematiken. Karin säger sig överhuvudtaget inte ha upplevt något motstånd mot att kunna bedriva den undervisning hon vill. Inte ens då hon och Anders bestämde sig för att ta bort läroboken från undervisningen. Hon värdesätter samarbetet med Anders högt:

Absolut! Absolut. Jättejättemycket. Både att man gör saker, att saker blir av, men också att man känner sig trygg i det man gör, eftersom vi planerar tillsammans. Så det har jättestor påverkan.

Anders och Karin i det didaktiska tornet

Anders och Karin har tillsammans skapat de praktiska förutsättningar som behövs för att kunna bedriva den undervisning som de tror på. De styr undervisningen och användandet av läroboken. Läroboken är en av påverkansfaktorerna som ligger på nivån under klassrummet, den tar inte plats som en egen auktoritet i klassrummet. Den är en del av matematiken (innehållet) i den didaktiska triangeln. De tar stöd av faktorer på alla nivåer i det didaktiska tornet, nerifrån och upp: De har byggt en gedigen grund i tornet i och med att de har ett stort kollegialt nätverk och är pålästa på samhällsfaktorer såsom politik, media, och forskning. Vidare jobbar de i linje med läroplaner och har på så sätt stöd i utbildningssystemet. På skolenivå får de uppmuntran och fria händer att bedriva sitt arbete samt har ett stort stöd i sitt samarbete med varandra. När de väl är i klassrummet är de trygga och välgrundade i sin undervisningspraktik, och de lyckas bra med att förhandla om klassrumsnormerna.

Helena

Såväl Helenas uppfattning om vad som är god matematikundervisning som hennes faktiska undervisning har förändrats över tid, från traditionell till reforminriktad. I början visste hon exakt vilka uppgifter eleverna skulle räkna i boken under hela läsåret och problemlösning var något som de gjorde på fredag eftermiddag när hon inte orkade med något mera. Hon gav dem problemlösning och hoppades på att de skulle vara upptagna hela lektionen: ”Vi gick inte igenom lösningar, utan det var bara att gå hem, och vi var lyckliga.” Idag vet Helena allt som problemlösning kräver och hur mycket man får tillbaka av en bra förberedd problemlösningsslektion:

Jag väljer problem med omsorg. Jag tar inte vilket problem som helst. Jag går igenom alla möjliga lösningar som eleverna kanske kan ha. Och sedan går jag runt i klassrummet och väljer just olika som kan belysa olika saker. Både rätt och fel. I början, precis när jag började, var det väldigt mycket att jag visar ni gör. Men nu är det mera vi gör tillsammans. Och eleverna ställer frågor och diskuterar. Så det är helt, helt annorlunda.

Hon tycker att det är viktigt att hon som lärare snabbt kan bilda sig en uppfattning om vilken kunskap eleverna har, vilken del de saknar och att veta vad nästa steg är. Hon ser det som att hon behöver ha ett ”batteri av väldigt många olika möjligheter, för att kunna erbjuda det till eleven när det behövs.” I Helena berättelse ser jag flera av stegen i Stein med fleras modell med fem praktiker beskrivna i Larsson (2015, s. 33): De fem praktikerna är att förutse, överblicka, välja ut och ordna

elevlösningar, samt att koppla ihop elevlösningar med varandra samt med matematiska idéer. Larsson skriver även om vikten av att välja ut och introducera problemet för klassen, något som Helena beskriver att hon lägger ner omsorg på. Vidare består Helenas lektioner nuförtiden nästan uteslutande av diskussioner. Färdighetsträningen gör eleverna hemma, medan ”lektionerna är hela tiden som en pingismatch”. Helena vill inspirera sina elever till att vilja söka. Hon ger ett exempel från i höstas då hon gick igenom bråk med sina sexor. Det uppstod en situation då det blev tydligt att eleverna trodde att man kunde addera samma tal till täljare och nämnare i ett bråk, på samma sätt som man gör vid förkortning och förlängning. Hon har upplevt det många gånger under sina år som lärare och nu tänkte hon att hon måste råda bot på detta. Så hon lät eleverna undersöka vad som händer när de adderar samma tal till täljare och nämnare. Eleverna nöjde sig inte med det att undersöka vad som händer vid addition, utan de undersökte även vad som händer om man subtraherar. ”Och det var så häftigt att se, för det hände häftiga saker. Jag hade aldrig tänkt på det, men det händer väldigt, väldigt märkliga saker.” Det är tydligt att hon använder sig av ett undersökande arbetssätt (Yackel och Cobb 1996, m.fl.). God matematikundervisning för henne finner och fångar eleverna där de är, vilket för tankarna till Hiebert (1999) som menar att den reforminriktade undervisningen utgår från barnens kunskapsnivå och färdigheter.

Helena vill att hennes elever ska kunna tänka logiskt och bli uthålliga problemlösare. Det är något hon upplever att de lär sig med tiden: ”I sexan till exempel, kan det hända att de börjar gråta när de inte vet hur man gör. Men sedan lär de sig att det är jättebra att du inte vet. Problemlösning är det som man gör när man inte vet, så nu är vi på rätt ställe.” Helenas ord ekar Skolverkets definition av problemlösning: ”... en matematisk uppgift som personen inte från början vet hur han/hon kan gå tillväga för att lösa. Det krävs ansträngning för att lösa ett problem” (Larsson 2013, s. 2). Helena vill även att hennes elever ska kunna jobba ordentligt, i ordning, så att de själva eller någon annan kan läsa vad de har skrivit och följa deras resonemang. Sedan vill hon också att de ska bli bra människor. Hon pratar mycket med sina elever om vikten av att hjälpa varandra och att man också lär sig av det. Hennes fokus är på samarbete snarare än konkurrens mellan elever, som i de nya klassrumsnormer Larsson beskriver (2015, s. 23).

Helena läser på om både matematikdidaktik och matematikämnet: ”Alltså jag fortbildar mig exakt hela tiden. Läser och läser och läser.” Hon säger att matematikdidaktik handlar mycket om att förstå en grupp och att hitta formen för att kunna förmedla matematiska kunskaper, och då måste hon kunna sitt ämne bra. Hon ägnar väldigt mycket tid till att förbereda lektioner, lyssna på andra lärare, besöka lärare och titta på lärare som undervisar. Det behöver inte vara matematik, det kan även vara lärare i andra ämnen. Hon berättar att hon har fått väldigt många tips från att vara i klassrum där en lärare jobbar med sina elever, för då kan hon få tips som inte går att läsa i någon bok. Liksom hos Anders och Karin för hennes tal om undervisning tankarna till en orkester som leds av en skicklig dirigent:

Kan du beskriva en konsert? Ja, det kan jag väl, men det bästa är att vara med på konserten och lyssna. Och uppleva den. Det tycker jag är det viktigaste med matematikundervisningen, att man är i klassrummet och man ser det som händer, vad läraren gör, vad eleverna gör, hur man möter... det är svårt att beskriva, för det är så komplext och så stort.

Hon beskriver den kick hon som lärare får i klassrummet när hon tillsammans med eleverna upptäcker ett nytt sätt att förklara en del av matematiken, som når fram lättare. Hon brukar skriva ner sina kickar och fundera över dem, men också delge dem till andra lärare och lyssna när andra lärare får en sådan kick. Hon tror också på att filma lektioner. Det hjälper henne att se vad hon vill förbättra, vad hon inte vill göra och vill göra. Då studerar hon hur hon reagerar, svarar på frågor och hur hon bemöter eleverna. Hon vill gärna fånga det enkla som samtidigt ger upphov till väldigt mycket matematikdiskussion: ”Det är det som är stort för mig.”

Helena är inte styrd av läroboken: hon tycker att ”alla matteböcker är väldigt otillräckliga”, men hon plockar ur olika böcker och stenciler för att ge eleverna uppgifter som belyser det område de håller på med. Läroboken använder hon även till att välja ut uppgifter som eleverna jobbar med hemma. Hennes elever gillar inte att lösa uppgifter i boken på lektionerna. Då tycker de att det är mycket roligare med diskussioner:

Om jag har en vikarie så lämnar jag uppgifter i boken, och då brukar eleverna säga att jag inte ska göra om det, för de är inte slavar som ska sitta en hel mattelektion och lösa uppgifter i boken.

På frågan om hon stött på något motstånd är det hjälpsamheten hon tar upp först. Hon har ibland märkt att det finns en motvilja mot att hjälpa andra. Hon vet inte vad den beror på, men när hon har märkt det har hon låtit eleverna göra en självskattning av sådant som sin egen ambition, insats och hjälpsamhet. Då visar det sig att de flesta elever ligger lägst på hjälpsamhet, och det område som de vill utveckla mest är just hjälpsamheten. Hon har kommit fram till att det är en sak som hon medvetet behöver kommunicera till eleverna. Då brukar eleverna märka att när de är mer hjälpsamma, exempelvis förklarar för en annan person, lär de sig också mer. Andra hinder hon tar upp är den tunga administrativa bördan på lärare och hennes egen ambitionsnivå. När hon är för stressad kör hon bara på och har inte lugn och ro för att verkligen gå ner helt i sin undervisning och hjälpa var och en där de befinner sig.

Hon har inte stött på något motstånd från kollegor eller skolledning, tvärtom väldigt mycket stöd och uppmuntran. Hon beskriver ett kollegium som vill ungefär samma sak, att alla elever ska lära sig så mycket som möjligt, och som jobbar väldigt mycket tillsammans. De ordnar inspirationskvällar och middagar där de pratar matematikdidaktik. De hjälper varandra, t.ex. om de hittar något bra material kan en lärare förbereda och skicka till resten. De träffas en gång i veckan och diskuterar matematikdidaktik. Rektor är väldigt positiv och uppmuntrar henne att åka på konferenser och sedan kan hon komma tillbaka och delge det hon har lärt sig till övriga lärare. Ett exempel var när Helena hade gått en problemlösningskurs som hon tyckte var toppen. Hon berättade för rektorn att hon hade gått en superkurs varpå rektorn ordnade så att läraren som hållit kursen kom till skolan fyra gånger på ett läsår, så att alla matematiklärare på skolan, från F-9, fick gå kursen. Vid varje tillfälle fick de problem som de jobbade med i klassrummet, och så träffades gruppen igen. Då visade förskoleklassläraren hur deras barn hade löst problemet, årskurs 3 hur de hade gjort det, årskurs 6, 8 o.s.v. Samma problem, hela vägen. Det ledde till att alla lärare samtidigt lärde sig

språket. De kunde prata på samma sätt om problemlösning. Effekten av denna kurs och deras fortsatta kollegiala samarbete märks på skolans elever:

Eleverna vet vad vi pratar om. När jag får elever i sexan och jag säger ”lös det här problemet algebraiskt eller grafiskt” så vet de vad jag menar, för de har lärt sig sedan de var små att det finns fyra olika representationsformer*. De är medvetna om vilken de använder när de löser problem.
*KLAG = Konkret lösning, Logisk/språklig, Aritmetisk-algebraisk, Grafisk/geometrisk med ritade bilder.

Liksom i Anders och Karins fall är hela den didaktiska triangeln representerad i Helenas berättelse. Hennes undervisning är ett harmoniskt samspel mellan henne, hennes elever och det matematiska innehållet. Hon liknar sina lektioner vid pingismatcher, för de diskuterar så mycket, hon och eleverna och eleverna med varandra. Hon lär sig ständigt mer om matematiken men avstår från att bara förklara för sina elever. De får möjlighet att utforska matematiken utan begränsning. Helena tar precis som Anders och Karin stöd av alla faktorer i det didaktiska tornet. Läroboken har inte klivit in som en auktoritet i hennes klassrum, den är en faktor på skolnivå som hon använder sig av efter behov. Andra stödjande faktorer på skolnivå är det kollegiala samarbetet och det aktiva stödet från rektor. På utbildnings- och samhällsnivå tar hon stöd i att hon hela tiden läser på och har ett brett utvidgat kollegialt nätverk. Alla dessa faktorer bidrar till att hon har väldigt bra förutsättningar för att förhandla fram de klassrumsnormer hon önskar.

Sammanfattning av lärarna

Tabell 2. En sammanfattning av de intervjuade lärarna

Lärare	Reform/Traditionell uppfattning	Reform/Traditionell undervisning	Fokus i den didaktiska triangeln	Fokus på matematiken	Påverkansfaktorer i didaktiska tornet
Fredrik	Reform	Traditionell	Läraren	Svagt	Troligtvis stöttande klassrumsnormer, lärares arbetssituation, tidsbrist
Johan	Svag Reform/Traditionell	Traditionell	Elev/Lärare	Svagt	Motarbetande klassrumsnormer, ämneskollegor, elevers tidigare skolgång.
Karin	Svag reform	Reform	Samspel elev-lärare-matematik	Starkt	Stöttande klassrumsnormer, tvåläraresystem, stöd från skolledning, utvidgat kollegium, påläst
Anders	Reform	Reform	Samspel elev-lärare-matematik	Starkt	Stöttande klassrumsnormer, tvåläraresystem, stöd från skolledning, utvidgat kollegium, påläst
Helena	Reform	Reform	Samspel elev-lärare-matematik	Starkt	Stöttande klassrumsnormer, stöd från skolledning, samarbete med kollegor, utvidgat kollegium, påläst.

Diskussion

Metoddiskussion

Valet att genomföra kvalitativa intervjuer för att undersöka mitt syfte innebär att jag inte kan generalisera mina slutsatser till en viss population, som Sveriges samlade högstadielärarkår eller dylikt. Man skulle kunna tänka sig att göra en kvantitativ studie, med större och representativa urval, men med risken att inte få samma djup. Jag tror att det kan vara svårt att i en kvantitativ studie fånga normer och uppfattningar. Dessutom finner jag många kopplingar mellan de intervjuade lärarnas utsagor och den forskning jag har läst. Jag tror därför att de lärare jag har intervjuat ger en bra bild av hur de kan se ut för en matematiklärare i Sverige.

Som jag tidigare skrivit är min utgångspunkt för detta arbete en strävan mot en reforminriktad matematikundervisning. Det finns en risk för att mina tolkningar och slutsatser har färgats av min egen inställning till hur matematikundervisning bör gå till. Jag kan även omedvetet ha påverkat mina respondenter med min inställning, trots att jag har strävat efter att hålla mig så neutral som möjligt. Vidare kan respondenterna ha påverkats av ämnet för min undersökning och mina frågor. Detta tillsammans med en medvetenhet om de reformer som skett i Lgr 11 och den stora satsningen mattelyftet kan ha gjort att deras svar blir mer i linje med "vad man förväntas svara". Det kan också vara så att de lärare som är medvetna om att de bedriver en reforminriktad undervisning är mer villiga att dela med sig av sina erfarenheter samt ge fler exempel från sin undervisning, för att de vet att de bedriver en undervisning som är önskvärd. Anders, som jag uppfattar som kanske den mest reforminriktade i så väl uppfattning som praktik, är också den som berättar mest om saker han testat och sådant han reflekterat över, medan Fredrik är mest fåordig. Fredriks intervju är kortast och Anders längst, en skillnad som avspeglas i resultaten, där Fredriks del är kortast och Anders längst. Min bedömning är att trots att Fredriks intervju är kortast har jag även av honom fått den information jag behöver för att kunna svara på mina frågeställningar.

Diskussion av frågeställningarna

Wester (2015) har som tidigare redogjorts för hänvisat till Skemps (1976) grova indelning mellan lärare som bedriver instrumentell respektive relationell matematikundervisning. Skemp (1976, citerad i Wester 2015, s. 34) går så långt som att säga att de är så stor skillnad mellan dessa undervisningspraktiker att de kan betraktas som två olika skolämnen trots att de har samma innehåll. De två skilda undervisningspraktikerna kallas i detta arbete som bekant för traditionell respektive reforminriktad matematikundervisning. Jag ser i mitt material skillnader i såväl lärarnas uppfattningar om matematikundervisning som deras faktiska undervisning. Jag ser även skillnader i upplevt stöd eller motstånd för att bedriva den undervisning som lärarna önskar.

Frågeställning 1. Vad anser lärare är en god matematikundervisning?

Anders och Helena är de två som ger tydligast uttryck för uppfattningen om att god matematikundervisning är reforminriktad undervisning. Johans uttalanden är relativt vaga och kan ibland tolkas som uttryck för så väl traditionell som reforminriktad undervisning. Karins svar kan också stundtals tolkas som både och, men min vetskap om att hon och Anders tillsammans bedriver en reforminriktad undervisning påverkar troligtvis min tolkning av hennes uppfattning i

reforminriktning. Fredrik ger uttryck för att en mer reforminriktad undervisning skulle vara bättre, exempelvis när han säger att han skulle vilja låta eleverna ”diskutera matte och resonera kring matte”, eller ”Man kan komma fram till något på olika sätt, men i praktiken bedriver han en traditionell undervisning.

En uppfattning som tycks sitta djupt hos både lärare och elever är den instrumentella synen på förståelse, d.v.s. att det handlar om att eleverna ska förstå hur procedurer fungerar för att lösa uppgifter (Skemp 1976, citerad i Wester 2015, s. 102). En instrumentell syn på förståelse kan skapa föreställningar om att matematikuppgifter har *ett* korrekt svar och *en* korrekt lösning och att de ska kunna lösas snabbt (Schoenfeld 1992). Den instrumentella synen kan även förknippas med föreställningar om hur en bra lärare ska vara: en som kan förklara bra. En elev i Westers undersökning uttrycker en instrumentell syn på förståelse när hen i sin frustration över att läraren inte vill förklara utbrister (2015, s. 109): ”Ibland menar man verkligen allvar. Man vill ha svaret. Men så försöker hon skoja till det lite. Hon vill att man ska lösa det själv”. Främst Anders och Helena, men i viss mån även Karin, är de som uttrycker att de har gått ifrån den instrumentella synen på förståelse till den relationella synen på förståelse, där den senare handlar om att även förstå hur allt hänger ihop. Anders berättar att han aktivt avstår från att förklara och gå igenom saker för sina elever för att eleverna själva ska bygga sin förståelse. Han vill att eleverna ska förstå - och uppskatta - att matematiken ofta går ut på att man får pröva flera olika strategier innan man kan ana lösningen. Helena vill ha uthålliga problemlösare och beskriver hur hon uppmuntrar eleverna att söka efter matematiska samband, för att förstå hur det hänger ihop. Deras uttalanden överensstämmer med den slutsats Jonsson m.fl. (2015, s.31) drar: att alla elever bör få möjlighet att kämpa med uppgifter, på lagom nivå.

Frågeställning 2. Hur bedriver lärare sin matematikundervisning: reforminriktat eller traditionellt?

Alla fem lärare ger på något sätt uttryck för att reforminriktad matematikundervisning är önskvärd, om än i olika grad, men det är endast tre av dem som bedriver en reforminriktad undervisning i praktiken. Detta är i linje med vad jag noterat i bakgrunden. Wester tar upp det som Boesen m.fl. (2014 citerade i Wester 2015, s. 38-39) har noterat: att de flesta lärare uttrycker sig positivt till reformen med kompetenser som introducerades i Lgr 11, men att många inte kan ta till sig innebörden av reformen, delvis för att kompetenserna är för otydligt beskrivna. Följden är att lärares uppfattningar om matematikundervisning inte förändras i grunden och då förändras inte heller deras undervisning. Detta kan medföra att lärare vet vad de ska svara om god matematikundervisning - exempelvis som Fredrik säger att ”diskutera matte och resonera kring matte” och att det kan finnas flera olika lösningar på en uppgift - men i praktiken bedriver de fortfarande en i huvudsak traditionell undervisning, som Fredrik och Johan i mitt material.

Fredrik och Johan bedriver båda en undervisning som mestadels följer läroboken. Fredrik beskriver att en vanlig lektion oftast börjar med någon form av genomgång, varpå eleverna får jobba ganska mycket i boken på egen hand enligt en veckoplanering. Det repetitiva mönstret med lärarens genomgång följt av eget arbete i boken känns igen från Helenius beskrivning (2103, s. 1) av traditionell

matematikundervisning; men även Blomhøj (1994) och Schoenfeld (1992) med flera har varit inne på det. Gemensamt för så väl Fredriks och Johans berättelser om sina undervisningar samt det litteraturen säger om traditionell matematikundervisning är att läroboken har en central och ofta styrande roll. Som jag tidigare redogjort för menar Rezat och Strässer (2012) att lärobokens roll är så central att den har tagit form av en auktoritet i klassrummet, eller en fjärde nod i den didaktiska tetraedern (ibid.). Jag fick själv känna på hur det är att "konkurrera med läroboken" i den situation jag beskriver i inledningen. Där berättar jag om hur mina försök att arbeta laborativt med ekvationer inte alls gick som jag hade tänkt mig. Jag mötte ett starkt motstånd från eleverna och då kändes det tryggt för mig att gå tillbaka till att jobba i tur och ordning med avsnitten i boken. Det är något jag känner mig hemma med, eftersom jag är uppvuxen med och färgad av traditionell matematikundervisning. Men jag upplevde att jag tappade greppet om undervisningen när eleverna började jobba i boken. Det var inte längre jag som styrde: det var lärobokens innehåll som styrde oss.

De tre reforminriktade lärarna som jag intervjuade, Anders, Karin och Helena, har inte släppt in läroboken som en auktoritet i klassrummet. De tar stöd av kursplaner och andra styrdokument och de använder läromedel för att uppnå sina syften med undervisningen, men det är de som styr. Anders och Karin uttrycker till och med att de har frigjort sig från läroboksstyrning. Med sin undervisningspraktik visar de att det är möjligt att använda läroboken på ett konstruktivt sätt. De visar också att det är möjligt att bedriva en reforminriktad matematikundervisning. Den undervisning de bedriver kan sammanfattas med Anders egna ord: lärarledd upptäcktsinläring. Lärarna iscensätter ett lärande, där eleverna ges möjligheter att brottas med innehållet på egen hand. Utifrån Brousseau (1997) ger deras undervisning utrymme för didaktiska situationer, d.v.s. situationer där lärande konstrueras. Utifrån Larsson (2015) får deras elever möjligheter att vara autonoma tänkare. Vidare uppmuntrar de tre reforminriktade lärarna sina elever att diskutera och argumentera med varandra samt vara resurser för varandra. Deras undervisning uppfyller den "tredje generationens praktik" som Larsson (2015, s. 81) önskar: en praktik som är en kombination av ett undersökande arbetssätt och Stein med fleras modell med de fem praktikerna 1) förutse elevlösningar 2) överblicka elevlösningar 3) välja ut och ordna elevlösningar, samt 4) koppla ihop elevlösningar, dels med varandra, dels med matematiska idéer.

Frågeställning 3. Vilka hinder eller stöd upplever lärare för att bedriva den matematikundervisning de önskar?

Johan är den lärare som uttrycker mest upplevt motstånd och den som verkar minst tillfreds med sin undervisning. När han ville ändra på ett inarbetat koncept med veckoplaneringar och införa ett nytt sätt att arbeta med läxor mötte han motstånd från kollegor. Han har inte lyckats med att ändra på elevernas uppfattningar om matematik. När jag frågar honom om hur man kan bedriva god matematikundervisning säger han först att han inte vet om han är bästa exemplet för det, och säger att han inte lyckas fullt ut med att bygga relation med eleverna: "Det är vissa elever som ... de lyssnar inte alls när jag går igenom saker. De stänger av öronen och ögonen och säger 'nej jag förstår ingenting när du pratar'." Detta, att eleverna säger att de inte förstår när han pratar, påminner om Westers (2015, s. 95) studie, där en elev uttryckte att det var lättare att förstå på

mellanstadiet: ”Och så hade vi inte så jättelånga genomgångar heller. Det var bara tills alla förstod. Sen började alla jobba. Jag tyckte man fick lättare förstå grejer då också.” Utifrån Wester (2015) kan spänningar uppstå om läraren och eleverna har olika syn på förståelse, exempelvis om läraren tolkar förståelse som relationell och eleverna den som instrumentell. Det är möjligt att Johan och hans elever pratar om olika saker när de pratar om förståelse, utan att vara medvetna om det, och att spänningar därför uppstår.

Fredrik verkar ganska tillfreds med den undervisning han bedriver, trots att han inte bedriver en sådan undervisning som han ser som god, och till och med säger att hans matematikundervisning skulle kunna vara bättre än den är. Det skulle kunna bero på att han inte ser sig själv som en aktör. Han kan ju inte rå för att lärares arbetssituation ser ut som den gör, då det handlar om faktorer på en mer övergripande, strukturell nivå. Han tycks ha funnit sig tillrätta i systemet och hittat en gångbar väg. Hans elever verkar inte klaga, troligtvis för att de är vana vid den traditionella matematikundervisningen. Jag noterar inga tecken på spänningar under intervjun: det verkar som att han och eleverna är överens om de sociala och sociomatematiska normerna i hans klassrum.

Anders, Karin och Helena har sett till att skapa de praktiska förutsättningar som behövs för att kunna bedriva den undervisning som de tror på. De är på så sätt starka aktörer. De lyckas återkommande med att förändra elevernas uppfattningar om matematik och matematikundervisning och därigenom förhandla om klassrumsnormerna. Helena vill utbilda tålmodiga problemlösare som diskuterar ivrigt och hjälper varandra och hon får eleverna med sig: de klagar till och med över slavarbete om de får räkna i matteboken en hel lektion. Anders vittnar om att det ibland kan uppstå spänningar när vissa elever har uppfattningar om skolmatematik som inte passar in på hans undervisning. Exempelvis har han noterat att många elever tror att de lär sig mer när han går igenom saker, samtidigt som han är övertygad om att den bästa förståelsen uppnås när de får brottas med uppgifterna själva. Här är det risk för att frustration uppstår, som hos eleven i Westers (2015, s. 109) studie som utbrast ”Ibland menar man verkligen allvar. Man vill ha svaret. Men så försöker hon skoja till det lite. Hon vill att man ska lösa det själv”. Anders hanterar det genom att konsekvent låta bli att förklara saker för eleverna; han fortsätter att ställa motfrågor och följdfrågor till dem. Likt eleverna i Westers studie kan vissa av Anders elever i början tycka att han stjäl nyttig tid från dem till saker som de inte lär sig någonting av. Anders inser att det har att göra med deras förväntningar på skolmatematik sedd med traditionella glasögon, och hans strategi är att fortgå med den planerade undervisningen. Det verkar som att han förstår hur spänningarna uppstår och därför kan bemöta och hantera dem. Han tror på konceptet och litar på att även de skeptiska eleverna kommer att köpa det så småningom. Dessutom kan han stödja sig mot sin och Karins långa erfarenhet av att lyckas; han har hittills inte varit med om någon som inte förr eller senare inser att deras sätt att bedriva lärande på är roligare.

Under min VFU-period hade jag en vilja att jobba elevaktivt. Jag hade försökt skaffa mig praktiska förutsättningar genom att beställa ett laborativt material, något som både min handledare och skollädaressen uppmuntrade. Ingen på skolan hade emellertid erfarenhet av att jobba med ett sådant material. Bristen på egen erfarenhet och vägledning bidrog till att jag inte hade tillräckligt fokus på det

matematiska innehållet, ett vanligt misstag som Anders tar upp i intervjun. Dessutom visste eleverna om att jag bara var på tillfälligt besök i deras klassrum, så mina förutsättningar för att förhandla om klassrumsnormerna var inte de bästa. Jag noterade att spänningar uppstod när eleverna och jag hade skilda uppfattningar om matematik, men jag förstod inte fullt ut var skillnaderna låg och kunde därför inte hantera spänningarna på något konstruktivt sätt. Utifrån Westers (2015) studie kan spänningarna bero på att eleverna och jag hade olika uppfattningar om skolmatematik. Ser man på situationen ur den synvinkeln framstår elevernas beteende som logiskt. De var vana vid att arbeta på det traditionella sättet; med att räkna i boken medan läraren går runt och hjälper till. Det var skolmatematik för dem. När jag införde ett arbetssätt som eleverna inte var vana vid upplevde de inte att det var matematik de sysslade med. En elev sa till och med: ”Ska vi ha prov redan nästa vecka, vi har ju inte haft matte på en vecka!” Eleverna gjorde bara vad de ansåg att de behövde för att lära sig ”riktig matematik”.

De tre reforminriktade lärarna har enligt egen utsago mött relativt lite motstånd och fått mycket stöd, men de vittnar om ett målmedvetet arbete för att kunna bedriva den undervisning de vill. Helena säger: ”Än så länge har jag aldrig någonsin upplevt att jag kan köra på autopilot. Ännu. Det kanske händer någon gång. Då lämnar jag tror jag.”

Slutsatser och idéer om fortsatt forskning

I mitt material bedriver tre av fem lärare en reforminriktad undervisning. Men trots att de flesta matematiklärare uttrycker sig positivt till reforminriktad matematikundervisning dominerar den traditionella matematikundervisningen i Sverige (Wester 2015, s. 38). De flesta av dagens matematiklärare har endast erfarenhet av traditionell skolmatematik i sin egen skolgång. Vidare är det för många lärare svårt att förstå innebörden av reforminriktad undervisning (Boesen m.fl.(2014), och då är det inte så konstigt att den traditionella skolmatematiken utövar en stark dragningskraft på lärare. Den lärare som vill bedriva en reforminriktad undervisning måste också förstå och hantera de spänningar som kan uppstå när lärarens intentioner krockar med elevernas uppfattningar om matematikundervisning. Wester (2015, s. 38) skriver: ”Svensk skola står fortfarande inför ett paradigmskifte för matematikundervisningen.” Jag tror att mer forskning om spänningar inom och mellan sociala och sociomatematiska normer behövs för att skynda på paradigmskiftet.

Jag hoppas att detta arbete kan bidra till att öka läsarens medvetenhet om de outtalade överenskommelser som finns i en undervisningssituation. Ju fler berättelser som handlar om hur lärare bryter mot den traditionella matematikundervisningen som lärarkollegiet får ta del av, desto större möjlighet har vi lärare (aktörer) att tillsammans ändra på rådande strukturer. Till vidare låter jag mig inspireras av de tre reforminriktade lärarna jag har intervjuat, och de kloka råden jag fått av en klok lärare (Körling 2016):

Gör det du vill i mikrosammanhang.
Tänk dig en spricka i en sten. Var droppen som urholkar stenen!
Ge inte upp. Överge aldrig innehållet!
Våga vara droppen.
Våga tro på din undervisning.

Referenser

- Bergqvist, E m.fl.(2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet. Grundskolan våren 2009*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborg 2010.
- Blomhøj, M. (1994). *Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare*. Nämnaren 1994:4.
- Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., m.fl. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(0), 72-87.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-62.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactiques des Mathématiques 1970-1990*, (Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R, and Warfield, V., trans. and eds.). Dordecht: Kluwer.
- Bryman, Alan (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Stockholm: Liber.
- Cardelus, E (2016). *Motivationer, attityder och moderna språk: En studie om elevers motivationsprocesser och attityder vid studier och lärande av moderna språk*. Diss. Stockholm: Stockholms universitet, 2016
- Cobb, P. (1994). *Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development*. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Dweck, C. S. (2007). *Boosting achievement with messages that motivate*. *Education Canada*, 47(2), 6-10.
- Helenius, O (2013). *Det didaktiska kontraktet*. Skolverket: Lärportalen för matematik. Grundskola åk 1-3.
- Hiebert, J (1999). *Relationships between Research and the NCTM Standards*. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 30, No. 1 (Jan., 1999), pp. 3-19.
- Hyldgaard, K (2008). *Vetenskapsteori: En grundbok för pedagogiska ämnen*. Stockholm: Liber.
- Jonsson, B. mfl (2015). *Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning*. *Journal of Mathematical Behavior* 36 (2014) 20–32.
- Jäder, J. (2015). *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang*. Avhandling vid Linköpings universitet. Norrköping 2015.
- Körling, Anne-Marie (2016). *Handledning*. Ett telefonsamtal.

Lgr 11 (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011 (Reviderad 2015)*. Stockholm: Skolverket.

Larsson, M. (2013). *Undervisa i matematik genom problemlösning*. Skolverket: Lärportalen för matematik. Grundskola åk 7–9.

Larsson, M. (2015). *Orchestrating mathematical whole-class discussions in the problem-solving classroom. Theorizing challenges and support for teachers*. Avhandling vid Mälardalens högskola, Västerås.

Lithner, J. (2008). *A research framework for creative and imitative reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 67(3), 255-276.

Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikkundervisning?* Landås: Bergen lærerhøgskole.

Rezat, S. (2010). *The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning*. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009. Lyon, France 2010.

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). *From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation*. Zdm – The International Journal of Mathematics Education, 44(5), 641-651.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. I D. A. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematical teaching and learning (s. 334-370). New York, NY England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Skemp, R. (1976). *Instrumental understanding and relational understanding*. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

Säljö, R (2015). *Lärande – en introduktion till perspektiv och metaforer*. Malmö: Gleerups.

Trost, J. (2010) *Kvalitativa intervjuer*. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wester, R (2015). *Matematikundervisning utifrån ett elevperspektiv*. Licentiatuppsats, Malmö Högskola.

Yackel, E. and Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 27. No 4. 458-477.

Yackel E. and Rasmussen, C (2002). Beliefs and Norms in the Mathematics Classroom. *Beliefs: A Hidden variable in Mathematics Education?* Kluwer Academic Publishers.

Bilagor

Informationsbrev

Vill du delta i en studie om det didaktiska kontraktet mellan lärare och elever?

Jag heter Anna Wiklund och jag läser till matematiklärare på Kompletterande Pedagogisk Utbildning vid Högskolan Dalarna. Jag är nu inne på min tredje och sista termin och ska skriva mitt examensarbete.

Idén till den undersökning jag vill göra fick jag under min senaste VFU-period när jag undervisade elever i årskurs 9. Jag hade bestämt mig för att eleverna skulle få jobba laborativt med ekvationer, men det blev inte alls som jag hade tänkt mig. Eleverna var skeptiska till det laborativa och bad om att få jobba i boken. Jag övergav min plan och återgick till en mer traditionell undervisning, men jag är intresserad av vad som egentligen händer i klassrummet. Under ett samtal med min VFU-handledare gick det upp för mig att jag hade brutit mot det ”didaktiska kontraktet”. Jag bestämde mig för att undersöka detta närmare i mitt examensarbete.

Syftet med min undersökning är att undersöka hur lärare *ser på* och *förhåller sig till* det didaktiska kontrakt som finns mellan elever och lärare i matematikundervisningen. En viktig del i undersökningen är intervjuer av lärare som är verksamma i årskurserna 7-9. Jag hoppas att du på något sätt har möjlighet att delta!

Intervjun tar mellan 30-60 minuter. Intervjun kommer att spelas in och skrivas ut i text.

Den information som du lämnar kommer att behandlas säkert så att ingen obehörig kommer att få ta del av den. Redovisningen av resultatet kommer att ske så att ingen individ kan identifieras. Resultatet kommer att presenteras i form av en muntlig presentation till andra studerande samt i form av ett examensarbete.

Inspelningarna och den utskrivna texten kommer att förstöras när examensarbetet är godkänt. Du kommer ha möjlighet att ta del av examensarbetet genom att få en kopia av arbetet. Deltagandet är helt frivilligt och du kan när som helst avbryta din medverkan utan närmare motivering.

Jag frågar härmed om du vill delta i denna studie. Jag tar emot svar på epost eller telefon, se kontaktuppgifter nedan. Om du har några frågor eller funderingar är du välkommen att kontakta mig eller min handledare för mer information.

Anna Wiklund
Lärarstudent
handledare
annajuliawiklund@yahoo.se
073-375 86 26

Jonas Jäder
Universitetsadjunkt,
jjd@du.se
023-77 80 55

Intervjuguide

Bakgrundsfrågor

Hur gammal är du?

Vilken utbildning har du?

Under vilka år gick du din utbildning?

Hur länge har du arbetat som lärare?

Hur många skolor har du arbetat på?

I vilka stadier har du undervisat? I matematik, eller andra ämnen? I vilka roller (behörig/obehörig/lärare/assistent)?

Vilka årskurser har du arbetat med?

Vad är din position i organisationen?

Frågor om matematikundervisning och det didaktiska kontraktet

- Vad är god matematikundervisning för dig?
- Vad vill du att dina elever ska få med sig av undervisningen? Osv.
- Vad är det som gör att det är god undervisning?

- Hur gör du för att bedriva den matematikundervisning du önskar?
- Hur har du gjort?
- Kan du ge något/några exempel på när du tycker att du har lyckats bedriva den undervisning du önskar?

- Har du stött på några hinder (motstånd) för att kunna bedriva den matematikundervisning du vill?
- Om ja, vilka hinder har du mött?
- Hur har du hanterat dem?
- Hur reagerade eleverna då?
- Hur reagerade dina kollegor? Skolledning? Föräldrar?

- Vilket stöd har du fått från kollegor och skolledning för att kunna bedriva den undervisning du önskar?
- Anser du att du har fått det stöd du behöver?
- Om inte, vilket stöd hade du velat ha?

- Har din uppfattning om vad som är god matematikundervisning förändrats över tid?

- Har din undervisning förändrats över tid? Om ja, hur?

- Vilka uppfattningar om matematik har du mött bland de elever du har och har haft?