HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete 2 för Grundlärarexamen inriktning F-3

Avancerad nivå

Matematiska problem i undervisningen

En intervjustudie med sex lärare i årskurs 1-3 på tre skolor om hur de arbetar med matematiska problem

Författare: Sandra Blom
Handledare: Eva-Lena Erixon
Examinator: Anna Teledahl
Ämne/inriktning: Pedagogiskt arbete/matematik
Kurskod: PG3037
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 2017-03-29

Sammandrag:

Syftet med denna studie har varit att få kunskap om vilka matematiska problem som används i skolan, samt hur lärares arbete ser ut kring dessa. Syftet har uppfyllts genom att svar sökts på två frågeställningar: vilka matematiska problem används i undervisningen i årskurs 1-3 och hur arbetar lärare med dessa problem. Svaren har sökts genom kvalitativa lärarintervjuer som utgått från en intervjuguide. Intervjuerna spelades in och transkriberades för att sedan analyseras med hjälp av en innehållsanalys. Studiens resultat visar att lärare har olika uppfattningar kring hur ett matematiskt problem ska se ut. Enighet finns dock kring att problemet ska vara lätt att förstå, ha olika lösningsmetoder, samt att eleverna ska kunna rita upp problemet. Resultatet visar även att lärare arbetar med matematiska problem på olika sätt. Ett mönster kan dock ses i att de flesta lärare har introduktion, eget arbete (enskilt eller i grupp) och sedan en eventuell genomgång.

Nyckelord: Matematik, undervisning, årskurs 1-3, problemlösning, matematiska problem

Innehåll

1. Inledning

Större utrymme har getts till problemlösning i Lgr11 (Skolverket 2015) än i tidigare läroplaner. Numera ses problemlösning både som ett mål och medel i matematikundervisningen. Med mål menas att eleverna ska utveckla förmågan att lösa matematiska problem. Medel innebär att problemlösning ska användas för att utveckla övriga matematiska förmågor (Skolverket u.å.). Dessa förmågor är: begreppsförmåga, metodförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga (Skolverket 2015, s. 48). Ett av skolans viktigaste uppdrag är att stimulera eleverna till kreativitet, nyfikenhet och att eleverna ska få självförtroende. De ska även stimuleras till att vilja prova egna idéer och lösa problem (Skolverket 2015, s. 9). Genom detta ska eleverna ges möjlighet att ta egna initiativ och eget ansvar, samtidigt som de ska få utveckla sin förmåga att arbeta både självständigt och tillsammans med andra. Därigenom bidrar skolan till att eleverna utvecklar en inställning som främjar entreprenörskap (ibid., s. 9).

Taflin (2007, s. 39) menar att undervisningen i matematik bör vara probleminriktad. Om eleverna hela tiden möts av rutinuppgifter tappar matematiken sin udd och mening. Det är i problemlösningsprocessen som det egna tänkandet utvecklas och en djupare förståelse skapas för det område som berörs. Arbete med problemlösning ger möjligheter för eleven att på ett naturligt sätt utveckla problemlösningsförmåga, kommunikationsförmåga och resonemangsförmåga. Ett matematiskt problem kan även beröra elevernas utveckling i begreppsförmåga och metodförmåga, beroende på vilket matematiskt innehåll problemet berör (Holgersson 2014, s. 1).

Dagens arbetsgivare efterfrågar anställda som kan klara av obekanta situationer och lösa komplexa problem med hjälp av ett kreativt och flexibelt tänkande. Färre yrken innebär att de anställda ska kunna lösa uppgifter av rutinartad karaktär. Därför behöver skolan fokusera på att utbilda elever till problemlösare för det framtida yrkeslivet (Skolverket 2014, s. 7). Matematikuppgifter är det centrala i matematikundervisning och det är därför viktigt att öka kunskapen om dess egenskaper som ger rika möjligheter för elevernas utveckling och lärande. Kunskapen om uppgifters effektivitet är också viktigt att ta upp på grund av tidsbristen i skolan både för lärare och elever (Liljekvist 2014, s. 4).

I PISA-undersökningen, i problemlösning, utförd 2012 på 15-åringar, visade det sig att svenska elever presterar under OECD-genomsnittet i möte med matematiska problem (Skolverket 2014, s. 21). Undersökningar visar att eleverna behöver få en positiv uppfattning om matematiken. Lärarna bör därför utmana elevernas nyfikenhet genom att vägleda dem i lösningen av komplexa matematiska problem. Således ska läraren skapa intresse för matematikens spännande värld hos eleverna och samtidigt vägleda dem till ett självständigt tänkande (Boaler 2011, s. 8).

Efter att jag läst kurser i matematikdidaktik har jag fått ett ökat intresse för matematiska problem och hur de används i undervisningen. I mitt första examensarbete, där jag gjorde en systematisk litteraturstudie, kom jag fram till att uppgiftens utformning och lärarens roll är mycket viktiga för att eleverna ska få möjlighet att utveckla förmågan att lösa problem och argumentera (detta konkretiseras ytterligare i kapitlet Bakgrund). Eftersom problemlösning inte endast ska utveckla problemlösningsförmågan, utan beröra alla förmågor, vill jag i detta examensarbete ta reda på vilka matematiska problem som används i klassrummet och hur lärare arbetar med dessa. Huruvida problemlösning berör alla förmågor kommer säkerligen att synas i denna studie.

2. Bakgrund

I detta kapitel kommer det inledningsvis tas upp vad som är skolans mål och riktlinjer kring problemlösning, samt förmågorna i matematikämnet (Skolverket 2015). Vidare presenteras vad matematiska problem är och olika karaktärsdrag. Efter detta presenteras ett avsnitt om arbete med matematiska problem där ett ramverk för arbete med matematiska problem presenteras. Här presenteras även arbetsformer och lärarens roll i arbete med matematiska problem, samt faser och strategier som eleverna går igenom/använder. Vidare tas det upp förslag på hur man kan arbeta med matematiska problem i grupp, samt om hur lektionens upplägg kan se ut i ett japanskt klassrum. Avslutningsvis knyts ramverket an till den teori som den bygger på.

2.1 Lgr 11

I Lgr 11 (Skolverket 2015) vill Skolverket betona vikten av att elever får möjlighet att använda matematiken i olika sammanhang, samt utveckla sin problemlösningsförmåga. Det har tidigare kommit fram i forskning att undervisning i matematik mest handlat om enskild räkning. Eleverna har tidigare inte getts möjligheter att lära sig att lösa matematiska problem (Skolverket 2011, s. 6). Undervisning genom problemlösning gör att eleverna får möta flera delar inom matematiken: begrepp, metoder och uttrycksformer (ibid., s. 8).

Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet, kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt, kan lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra och känna tillit till sin egen förmåga (Skolverket 2015, s. 13). Syftet, vad gäller problemlösning i matematik, är att undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem. Undervisningen ska även bidra till att eleverna, vid problemlösningar, ska kunna reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges möjlighet att utveckla kunskaper för att kunna tolka olika matematiska situationer, både i vardagslivet och matematiska sammanhang, samt beskriva och formulera dessa situationer med hjälp av olika matematiska uttrycksformer (ibid., s. 47).

I undervisningen i matematik ska eleverna ges möjlighet att lära sig matematiska begrepp och metoder, samt deras användbarhet. De ska även ges möjlighet att undersöka problemställningar, göra beräkningar, samt presentera och tolka data. Undervisningen ska även bidra till att eleverna får argumentera och resonera, använda olika uttrycksformer och hur dessa uttrycksformer kan användas när man kommunicerar matematik i olika sammanhang (Skolverket 2015, s. 47). I matematikundervisningen ska eleverna således utveckla sin problemlösningsförmåga, begreppsförmåga, metodförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga (ibid., s. 48).

2.1.1 Förmågorna i Lgr 11

Att utveckla problemlösningsförmågan innebär att eleverna ska lära sig att formulera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier och metoder (Skolverket 2015, s. 48). Denna förmåga innebär att eleverna ska lära sig att lösa matematiska problem. Det innebär också att eleverna ska kunna analysera och tolka matematiska problem. I denna analys och tolkning ska eleverna medvetet använda problemlösningsstrategier som till exempel förenkla problemet, tabeller eller ändra förutsättningarna för problemet. I lösning av det matematiska problemet genomför eleverna resonemang; där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt. De ska även kunna värdera både resonemanget och resultatet. Eleverna ska även kunna uppmärksamma egna relevanta matematiska problem, samt vidareutveckla andra problem, både självständigt och tillsammans med andra (Skolverket u.å.).

Med begreppsförmåga menas att eleverna ska lära sig att använda och analysera matematiska begrepp, samt se samband mellan begreppen (Skolverket 2015, s. 48). Att ha begreppsförmåga innebär att eleverna kan använda matematiska begrepp och veta varför begreppen är viktiga, att veta i vilka situationer de är användbara, samt veta hur olika representationer kan vara användbara för olika syften. Kunskapen om sambanden mellan begrepp gör att matematiken kan ses som en helhet där nya begrepp hela tiden knyts an och fördjupar kunskapen om redan bekanta begrepp. Begreppens innebörd, syfte och mening kommer till genom *hur* begreppen används i matematiska situationer (Skolverket u.å.).

Metodförmågan syftar till att eleverna ska kunna välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter (Skolverket 2015, s. 48).

Att utveckla resonemangsförmåga innebär att eleverna utvecklar förmågan att föra och följa matematiska resonemang (Skolverket 2015, s. 48). Denna förmåga innebär att eleverna ska kunna föra matematiska resonemang som involverar begrepp, metoder och lösningar på problem. När eleverna för resonemang själva eller tillsammans med andra innebär detta till exempel att de testar, föreslår, förutsäger, gissar, ifrågasätter, förklarar, hittar mönster, generaliserar eller argumenterar. Eleverna ska även kunna förklara sina lösningar i både tal och skrift (Skolverket u.å.).

Kommunikationsförmåga innebär att eleverna lär sig att använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (Skolverket 2015, s. 48). Kommunikationsförmåga innebär att eleverna utvecklar förmågan att kommunicera med olika hjälpmedel. Dessa kan till exempel vara termer, symboler, ord eller bilder. Eleverna ska även kunna anpassa denna kommunikation till sammanhanget (Skolverket u.å.).

2.2 Matematiskt problem

Enligt Skolverket (2011, s. 9, 25) möter en elev ett matematiskt problem när den inte känner till hur en uppgift ska lösas eller där uppgiften inte är av rutinkaraktär. Eleverna måste undersöka och prova sig fram med hjälp av olika resonemang och lösningsstrategier (se avsnitt 3.3.5 Strategier) för att hitta en lösning eller flera lösningar på uppgiften. För en elev kan en uppgift vara ett matematiskt problem medan för en annan kan samma uppgift vara en rutinuppgift. Huruvida en uppgift är ett problem eller inte bestäms av individens tidigare kunskaper.

Hagland, Hedrén och Taflin (2015, s. 27-28) menar att det inte bara handlar om att eleven inte vet hur problemet ska lösas utan det ska även krävas en ansträngning från eleven för att en uppgift ska klassas som ett matematiskt problem. När eleverna inte har tillgång till en färdig lösningsmetod stimuleras eleverna till ett självständigt tänkande samtidigt som det matematiska problemet förhindrar passivitet hos eleven. Vid invanda mönster riskerar eleverna att tappa den reflekterande delen av matematiken (Möllehed 2001, s. 11). Eleven måste även få lösa problemet på sitt sätt (Pólya 1945, s. V).

Walle (2003) menar att när läraren designar eller väljer ut matematiska problem bör de välja ut problem som är komplexa och utvecklande. Han delar upp matematiska problem i tre karaktärsdrag: vad som är problematiskt måste vara matematik, uppgifter måste vara tillgängliga för eleverna, uppgifter måste kräva motiveringar och förklaringar av lösningsmetoder (ibid., s. 67-69). Det första karaktärsdraget innebär att uppgifterna behöver fokusera elevernas uppmärksamhet på de matematiska idéer som är inbäddade i den. Att använda konkreta exempel kan vara ett bra sätt att få med eleverna i uppgiften.

Det andra karaktärsdraget innebär att läraren bör välja uppgifter som är nära anknutna till elevernas nuvarande kunskaper. Uppgiften ska vara utmanande, men den ska inte vara otillgänglig. Om läraren väljer en för enkel uppgift så ges eleven mindre möjlighet att utvecklas. Om läraren i stället väljer en uppgift som är för svår kan denne frustrera eleverna och få dem omotiverad. Det är endast läraren som vet vilka matematiska problem deras elever är redo för att möta. Förslag kan ges från forskning och andra lärare men det är endast läraren som vet huruvida dessa uppgifter kommer fungera bra med elevernas nuvarande kunskaper. Bra uppgifter borde vara tillgängliga för alla elever i klassrummet oavsett var de befinner sig i sin utveckling (Walle 2003, s. 68-69). Läraren måste variera svårighetsgraden på matematiska problem så att de kan utmana alla elever på deras olika nivåer (Möllehed 2001, s. 1).

Det tredje karaktärsdraget innebär att eleverna behöver lära sig att det inte är bara svaret som är det viktiga, utan även tänkandet i lösningsprocessen. Läraren bör därför få eleverna att förstå att det är lösningsmetoden som ska presenteras. Om eleverna förstår att de förväntas förklara sina svar, sina metoder, och varför de tror de är rätt, så kommer de att lära sig att analys är en central del i matematik (Walle 2003, s. 69).

När läraren för första gången ska introducera problemlösnings bör denne börja med enstegsproblem. Därefter kan läraren successivt börja med komplexare problem. För att eleverna ska lära sig mer om problemlösning bör antalet uppgifter begränsas till cirka 3-4 uppgifter. På så sätt hinner eleverna både lösa och analysera dem. Det är bättre att eleverna löser några uppgifter och hinner med analysen i stället för att lösa 10 uppgifter som de inte hinner reflektera över (Löwing & Kilborn 2002, s. 247,265).

Prusak, Hershkowitz och Schwarz (2013, s. 271, 282) kom, i sin studie, fram till att matematiska problem som har flera lösningar uppmuntrar eleverna till att motivera sina val. Detta leder till att eleverna får repetera sina tankegångar, samtidigt som de får möjlighet att lyssna och lära av andras idéer. Ett matematiskt problem bör utformas så att eleverna provoceras till att använda sina förmågor på ett kreativt sätt (Thom & Pirie 2002, s. 3). Problemet ska leda till undersökande frågor, uppmuntra till gissningar och flera lösningsmetoder. Ett sådant problem gynnar elevernas matematiska utveckling, begreppsförmåga och färdigheter (ibid., s. 3).

2.2.1 Olika karaktärer hos problem

Lester (1989, s. 36) delar upp matematiska problem i två huvudtyper: rutinproblem och icke rutinproblem. Rutinproblem innebär övningar vars syfte är att ge eleverna erfarenheter av att översätta verbala problem som kan uppstå i verkliga sammanhang med matematiska uttryck. Han ger ett exempel för ett sådant problem: "Laura och Beth började läsa samma bok på måndag. Laura läste 19 sidor per dag och Beth läste 4 sidor per dag. Vilken sida var Beth på när Laura var på sida 133?" (ibid., s. 36-37, egen översättning). De rutinproblem som innehåller flera steg för att nå en lösning tränar eleverna i att orientera och organisera problemet (ibid., s. 37). Enligt tidigare definitioner av vad ett matematiskt problem är, i denna studie, liknar denna uppgift mer en rutinuppgift.

Icke rutinproblem delade Lester in i tre kategorier: processproblem, problem med överflödig information och problem med tillräcklig information (Lester 1989, s. 37). De två sistnämna anser Lester beskriver sig själva och han tar således inte upp något exempel för denna typ av problem. Han talar i stället vidare om processproblem. Vid processproblem kräver det att eleven får mer än att bara översätta ord till matematiska uttryck, tillämpa algoritm eller göra beräkningar. Han tar upp ett exempel för denna typ av problem:

> En husvagn är strandsatt i öknen med en sex dagars vandring tillbaka till civilisationen. Varje person i vagnen kan bära en fyra dagars leverans av mat och vatten. En enda person kan inte bära tillräckligt med mat och vatten för hela resan och skulle dö. Hur många människor måste börja gå för att en person ska hämta hjälp och för de andra att komma tillbaka till husvagnen på ett säkert sätt? (Lester 1989, s. 37, egen översättning).

De problem som har otillräcklig eller överflödig information framkallar orienterings- och verifieringsbeteenden hos eleverna. Processproblemen gör att eleverna tränar sitt orienterande och organiserande beteende (Lester 1989, s. 37).

Vidare kan ett problem vara öppet eller slutet. Ett öppet problem innebär ett övningsproblem där eleven själv ska använda rimliga omständigheter och värden. Villkoren för uppgiften är således inte given (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 133). Holgersson (2014, s. 1) menar att lärare måste utmana eleverna i matematik genom att ge dem öppna uppgifter. I en öppen uppgift finns det flera olika svar. En sluten uppgift är ett problem där det bara finns ett svar. Exempelvis: "En sommar klippte Maria gräsmattan åt sin mormor 5 gånger och fick 80 kr varje gång. Hur mycket pengar fick hon sammanlagt under sommaren?" (ibid., s. 1). För att göra detta problem till ett öppet problem ger Holgersson (ibid., s. 1) detta exempel: "En sommar klippte Maria gräsmattan åt sin mormor och fick sammanlagt 400 kr. Hur många gånger kan hon ha klippt gräsmattan under sommaren och hur mycket fick hon varje gång?" (ibid., s. 1). Genom en öppen uppgift ges eleverna möjlighet att arbeta på olika sätt på sin nivå. Således kan de forma uppgiften efter deras tidigare erfarenheter och nuvarande kunskaper (ibid., s. 1).

Holgersson (2014, s. 3) menar att i Japan (se avsnitt 2.3.7 för vidare information kring hur de undervisar genom problemlösning) arbetar man mycket med öppna problem i skolan. Uppgifterna har flera möjliga svar och kan således leda till många olika lösningar. Eleverna får inte endast träna på att komma ihåg fakta och reproducera en färdighet. Uppgifterna gör att eleverna lär sig matematik genom att uppgifterna fokuserar på samband mellan tal och arbetssätt. Genom öppna uppgifter kan läraren lättare följa var eleven befinner sig i sin utveckling (ibid., s. 3).

2.3 Arbete med matematiska problem

Betoning på träning och färdigheter, som tidigare varit traditionell undervisning i skolan, anses inte längre vara den kunskap som eleverna behöver i sitt framtida liv (Lesh & Zawojewski 2007, s. 764). I samband med denna syn har matematikundervisning successivt förändrats i många länder och således ses matematik numera som "en process att konstruera kunnande och att förklara, skapa och anpassa detta till komplexa system i vår omvärld" (Boesen 2006, s. 1). Problemlösning kan utveckla elevernas kompetenser:

- Social kompetens utvecklas i arbete i grupp
- Eleverna utvecklar sitt språk i kommunikation
- Det logiska och kreativa tänkandet utvecklas
- Eleverna får lära sig att kommunicera och reflektera genom att de får berätta om och argumentera för sina lösningar. De får även lyssna på och tolka andras lösningar.
- Problemlösning hjälper barn att upptäcka matematiken i vardagen
- Eleverna får möjlighet att upptäcka och förstå sambanden mellan de fyra räknesätten.
- Elevernas taluppfattning ökar genom att de praktiskt använder aritmetiken.
- Problemlösningen hjälper eleverna att förstå andra ämnen (ibid., s. 188-189).

En av anledningarna till varför elever har svårigheter med problemlösningsförmågan är på grund av att de inte erbjuds lämpliga möjligheter att utveckla den. Problemlösning är komplext, därför behöver läraren erbjuda noga utformade problemlösningsinstruktioner och eleverna måste samtidigt erbjudas omfattande erfarenheter inom problemlösning (Lester 1989, s. 11-12). Många elever utvecklar inte expertis inom problemlösning eftersom de varken får ledning eller utmaning att utveckla det (ibid., s. 12).

Lester (1989, s. 15) har därför skapat ett ramverk över metoder och material som kan vara användbara för lärare i problemlösningsarbete. För att ett ramverk ska fungera måste det kunna användas oavsett vilka möjliga kognitiva och icke kognitiva beteenden som läraren kan möta. Ramverket behöver också belysa elevernas prestationer där metakognitiva åtgärder är synliga eller är frånvarande. Ramverket som han skapat refererar till kognitiva och metakognitiva faktorer och kan användas på flera olika problem eller andra uppgifter (ibid., s. 18).

2.3.1 Ramverk för arbete med matematiska problem

I detta ramverk (se Tabell 1) har Lester delat upp lektionen i tre delar; innan eleverna arbetar med problemet, under tiden de arbetar med problemet och efter de arbetat med problemet. Detta ramverk har satts upp för att guida läraren under problemlösningslektioner (Lester 1989, s. 31).

Tabell 1. Ramverk för arbete med matematiska problem (Lester 1989, s. 32-33, egen översättning).

Läraren	**Syfte**
Innan	
1. Läs problemet för klassen eller låt en elev läsa problemet. Diskutera ord och fraser som eleverna kanske inte förstår. 2. Ha helklassdiskussion för att skapa förståelse för problemet. 3. (Frivilligt) Ha helklassdiskussion om möjliga lösningsstrategier.	1. Visar vikten av att läsa problemet försiktigt och lägga fokus på ord som har speciella tolkningar i matematik. 2. Fokuserar på viktiga data i problemet och förtydligar delar av problemet. 3. Framkallar idéer på möjliga vägar att ta för att lösa problemet
Under	
4. Observera och fråga eleverna för att fastställa var de är i problemlös-	4. Visar elevernas styrkor och svagheter relaterat till problemlösning.

ningsprocessen. 5. Ge ledtrådar om det behövs. 6. Förläng problemet om det behövs. 7. Elever som har hittat en lösning får möjlighet att se över den innan presentation.	5. Hjälper elever att ta sig förbi blockeringar i problemlösningsprocessen. 6. Utmana de som blir klara före de andra genom att be dem generalisera deras lösningsstrategi till ett liknade problem. 7. Eleverna tittar på sitt arbete och ser till att det är rimligt.
Efter	
8. Visa och diskutera olika lösningar. 9. Relatera problemet till tidigare lösta problem och diskutera eller låt en elev lösa en utökning av problemet 10. Diskutera speciella funktioner av problemet, som till exempel en bild som samspelar med problemet.	8. Visa och ge namn till olika strategier som är användbara för att hitta en lösning. 9. Visar att problemlösningsstrategier inte är problemspecifika och att de hjälper eleverna att se olika situationer i vilket vissa strategier kan vara användbara. 10. Visa hur de speciella funktionerna av problem påverkar. Det kanske påverkar hur eleverna tänker kring problemet.

2.3.2 Arbetsformer och lärarens roll

Swan (2006, s. 163) menar att undervisning i matematik är mer effektiv om man går efter åtta punkter som han satt upp: bygga på elevernas förkunskaper; exponera och diskutera vanliga missuppfattningar; använder givande frågor; använder kooperativa smågrupper i arbetet; uppmuntra till resonemang hellre än färdiga svar; använder rika kooperativa uppgifter; skapar kopplingar mellan ämnen; samt använder teknologi på rätt sätt.

Att bygga på elevernas förkunskaper innebär att läraren anpassar undervisningen efter varje elevs enskilda behov. När läraren tar upp och diskuterar vanliga missuppfattningar bör läraren ta upp de missuppfattningar som eleverna har just då, konfrontera de tankar som är inkonsekventa och tillåta att diskussioner tas upp kring beslut om dessa missuppfattningar. Att läraren använder givande frågor innebär att läraren använder frågor som skapar förklaringar, tillämpningar, hellre än bara upprepning. Undervisningen i små grupper är mer effektiv om den uppmuntrar till kritisk och konstruktiv diskussion hellre än argument och okritiskt accepterande av dessa argument. Att ha gemensamma mål och gruppansvarighet är viktigt för en effektiv undervisning. Läraren bör även uppmuntra eleverna till resonemang, samt sikta på att skapa djupt lärande hellre än ytliga kunskaper. Uppgifterna som används bör vara utformade på ett sådant sätt att: alla förstår, de kan utökas, de uppmuntrar till beslutsfattande, de främjar till diskussion, de uppmuntrar till kreativitet, samt uppmuntrar till frågor som "tänk om..?" och "vad händer om inte?". Läraren bör även skapa kopplingar mellan ämnen. Detta eftersom elever oftast tycker det är svårt att generalisera och överföra kunskaper till andra ämnen och kontexter. Teknologiska hjälpmedel bör användas på rätt sätt genom exempelvis användning av dator för att presentera olika diagram. Att använda teknologi har visat sig vara väldigt motiverande för elever (Swan 2006, s. 163).

Lester (1989, s. 40) var i sin studie intresserad av att se effekterna på elevernas problemlösningsbeteenden. Således skapade han tre roller för läraren som tog med alla de aspekter som påverkade elevernas beteenden i problemlösning. Dessa tre roller var: extern bildskärm, kontaktperson för elevernas metakognitiva utveckling och modell för problemlösning.

Den första lärarrollen, extern bildskärm, innebär att läraren för det första riktar uppmärksamhet till det problem som ska lösas. När eleverna arbetar individuellt eller i grupp observerar, frågar och vägleder läraren eleverna för att lösa problemet, för att sedan leda en helklassdiskussion om olika lösningar som eleverna tar upp. Denna roll delas upp i tio undervisningsåtgärder som presenteras i Tabell 1.

Rollen som kontaktperson innebär att läraren ställer frågor och utmanar eleverna att analysera deras matematiska prestationer. Läraren kan även påpeka olika aspekter av matematik och matematiska aktiviteter som är av betydelse för elevens prestationer, samt bygga upp elevernas register över olika strategier och deras kunskap om deras användbarhet. För att få eleverna att själva reflektera över sina kognitiva prestationer kan de få skriva ner sina styrkor och svagheter vad gäller deras problemlösning eller att eleverna direkt efter lösning av problem skriver ner korta fraser om sitt tänkande under problemlösningsprocessen (Lester 1989, s. 40-43).

När läraren agerar som modell visar de eleverna hur man kan lösa problem, så kallad modellering. Avsikten med denna roll är att ge eleverna verktyg för att lösa olika problem som de tidigare inte mött. När läraren visar får eleverna observera hur läraren använder sig av olika strategier och hur problemlösningsprocessen fungerar. Samtidigt som läraren modellerar leder även läraren en diskussion med klassen om problemlösningsprocessen som sker (Lester 1989, s. 43).

2.3.4 Faser

Pólya (1945, s. 5-6) delar in problemlösningsprocessen i fyra faser. Den första fasen innebär att eleven skapar sig en förståelse för vad problemet handlar om. Här funderar även eleven på vad som krävs för en lösning. Därefter går eleven vidare, till nästa fas, genom att göra upp en plan för hur lösningen ska gå till. Här söker eleven de samband som finns mellan den information som finns att tillgå i uppgiften. Därefter går eleven över till den tredje fasen genom att utföra sin plan, kontrollerar sina steg och kommer fram till en lösning (ibid., s. 5-6; Boaler 2011, s. 159). När eleven kommit fram till en lösning ser den, i den fjärde fasen, tillbaka på vad som gjorts och funderar på om svaret är rimligt (ibid., s. 159).

Boaler (2011, s. 159) menar att de faser som Pólya satt upp kan vara svåra att följa för lågpresterande elever. Oftast rusar dessa elever in i problemet för snabbt och lägger inte upp en plan för lösningen. Således misslyckas de med att hitta en lösning. Dessa elever har även svårt att dokumentera de steg de tar i lösningen och har således svårt att kunna se tillbaka på hur de har resonerat fram till lösningen eller var det har gått fel i lösningen. De tappar bort sig i problemlösningsprocessen. Det är viktigt att lära dessa barn att exempelvis rita upp det matematiska problem som de ställs inför för att få en överblick. Andra strategier kan också hjälpa dessa elever i problemlösningsprocessen. Med hjälp av strategier kan eleverna få hjälp att se hur data i uppgiften hänger ihop (ibid., s. 159-163).

2.3.5 Strategier

En heuristisk strategi kan definieras som en teknik eller ett förslag som hjälper eleven att förstå eller lösa det matematiska problemet (Schoenfeld 1980, s. 795). För att eleverna ska bli goda problemlösare behöver de få möjlighet att lära sig flera lösningsmetoder. Dessa lösningsmetoder kan de lära sig vid diskussioner och analys av olika alternativ för att lösa ett problem (Löwing & Kilborn 2002, s. 264). Strategier som eleverna kan använda vid lösning av matematiska problem är till exempel: rita upp problemet, göra upp ett diagram eller en tabell med talen och pröva ett enklare fall (Boaler 2011, s. 159). Att rita upp problemet är en mycket viktig strategi. Genom att rita hjälper det eleven att se hur saker och ting hänger samman i problemet (ibid., s. 160). Lester (1989, s. 282) tar i sin studie upp tretton strategier som elever kan använda vid lösning av problem: gissa och testa, arbeta baklänges, leta efter mönster, använda ekvationer, använda logik, rita en bild, organiserad lista, tabell, dramatisera, modell, förenkla, leta efter nyckelord, och använd resurser så som böcker, miniräknare eller lärare.

2.3.6 Grupparbete

Schoenfeld (1985, s. 372) föreslår två olika metoder för grupparbete med matematiska problem.

Den första metoden kallar han för "Method A: The Class Works the Problem as a Whole While the Teacher Acts as "Manager"". Denna metod innebär att läraren börjar med att presentera ett problem. Efter introduktionen frågar läraren om alla förstår. Om det är någon som inte förstår kan det vara lämpligt att rita upp på tavlan, exempelvis ett diagram, för att skapa förståelse. Därefter tar läraren emot förslag på hur de tillsammans ska lösa problemet (Schoenfeld 1985, s. 373). Läraren bör inte omedelbart kommentera det som eleverna säger, utan i stället låta eleverna förklara. När eleverna förklarar kommer de ofta på själva fram till vad som har gått fel. Det är därför viktigt att läraren håller sig till att endast leda och observera klassrumsdiskussionen (ibid., s. 373-374). När eleverna kommit fram till flera lösningsmetoder, som ofta är fallet, får eleverna diskutera vilken som lämpar sig bäst att utföra. Därefter påbörjas den utvalda lösningsmetoden. Efter cirka fem minuter tar läraren en paus och frågar om lösningsmetoden verkar fungera, om allt går enligt planerna eller om de borde ändra sina planer.

Det är viktigt att ställa dessa frågor när lösningsmetoden verkar fungera bra. Om dessa frågor endast används när det går dåligt, fungerar de som en vink för eleverna att de gör något fel. Avslutningsvis kan läraren ta upp representationsformer, kunskaper som borde tagits upp under lektionen, elevernas sätt att använda kontrollstrategier, samt andra aspekter i elevernas lösningsmetoder som kunde ha gjorts annorlunda (Schoenfeld 1985, s. 373-374).

Läraren ska försöka bidra så lite som möjligt när eleverna löser problem. Om eleverna väljer en lösningsmetod som läraren vet är fel, så ska läraren låta dem göra det, så länge de har kommit på en rimlig lösningsmetod. Vidare menar han att lärarens uppgift i denna klassrumsdiskussion är att försöka få ut så mycket som möjligt av vad eleverna vet för att vara säker på att de förstår problemet innan genomförandet av lösningsmetoden inleds. Eleverna ska även ha letat efter bra representationsformer, valt ut lösningsmetoder med försiktighet, använda de resurser de har, samt att lägga energi på de idéer som är passande (Schoenfeld 1985, s. 373-374).

Den andra gruppmetoden kallar Schoenfeld (1985, s. 374) för: "Method B: The Class Breaks Into Small Groups to Work on Problems While The Teacher Acts as Roving "Consultant"". Under denna lektionsform delar läraren ut problemen till grupper om cirka 4 elever. När eleverna arbetar med problemen cirkulerar läraren runt i grupperna för att hjälpa till. Lärarens roll är inte att ge eleverna information eller ledtrådar, men kan göra det om det verkligen behövs i situationen. Om eleverna önskar en ledtråd kan läraren ställa frågor, exempelvis: påminner problemet dig om någonting; har du gjort något liknande på senaste tiden; eller kan du förenkla problemet. Under diskussionen i grupperna fungerar även de frågor som togs upp i diskussion i föregående lektionsupplägg. Dessa frågor används för att eleven ska påminnas om att ha kontroll över lösningsprocessen (ibid., s. 375). Läraren bör inte lägga fokus på hur många frågor denne ställer utan på funktionen i dessa frågor. Läraren bör ställa frågor som uppmuntrar till resonemang. Varför-frågan är en bra fråga att använda i klassrummet. Tillslut kommer eleverna själva att ställa sig den frågan när de arbetar och resonerar (Drageset 2013, s. 285, 288). Läraren bör skapa en klassrumsatmosfär där det är tillåtet att ifrågasätta, utmana och reflektera över olika lösningar (Burton 1984, s. 47).

Även Boaler (2011, s. 156) menar att det är bra att ställa frågor. Genom att läraren ställer bra frågor till eleverna får läraren en inblick i elevernas matematiska tankar. På så sätt kan läraren bättre stödja eleverna i deras utveckling. Genom frågor kan läraren hjälpa elevernas resonemang vidare på ett produktivt sätt. Till en början brukar elever, som inte är vana vid dessa frågor, ändra sina svar då de tror att de gjort något fel. Tillslut vänjer sig eleverna vid att läraren faktiskt är intresserad över deras tankar. Frågor som läraren kan ställa är: vad tror du att du ska göra, varför tror du det och hur kom du fram till det (ibid., s. 156). Barn bör uppmuntras att ställa frågor till sig själva under arbetets gång. Genom att eleverna ställer frågor till sig själv kan de se matematiken tydligare och kan för det mesta besvara frågorna själva (ibid., s. 157). Det är viktigt att styra bort eleverna från regeltänkande och i stället uppmuntra eleverna till flexibilitet med tal genom att tala matematik med dem. Syftet med detta är att uppmuntra eleverna till att tänka på alla olika sätt som man kan räkna (ibid., s. 165).

2.3.7 Lektionens upplägg i ett japansk klassrum

Stigler & Hiebert (1999, s. 126-127) menar att Japan har lyckats skapa ett system som inte bara utvecklar lärares kompetens, utan även kunskaper om hur man ska lära ut. Denna utveckling kan de inte se i USA's klassrum. I PISA-undersökningen, gjord i problemlösning år 2014, kom Japan på tredje plats av alla länder som deltog med 552 poäng. Sverige fick i detta test 491 poäng och USA 508 poäng. OECD-genomsnittet i detta test blev 500 poäng (OECD 2014, s. 15). I detta arbete kan det därför vara intressant att se hur en lektion i problemlösning kan se ut i ett utav de topp-presterade länderna i problemlösning enligt PISA-undersökningen. Stigler & Hierbert (ibid., s. 79-78) har delat in den typiska japanska matematiklektionen i fem steg:

- Återblick på den senaste matematiklektionen
- Presentation av dagens problem
- Självständigt arbete eller i grupp
- Diskussion av lösningsmetoder
- Läraren lyfter upp och summerar viktiga aspekter

I början av lektionen, när de gör en återblick, kan läraren göra en kort summering av vad de kommit fram till. Ibland ges även tid för diskussion angående problemet och läraren kan be eleverna att presentera mer detaljrikt hur de kommit fram till lösningen. Därefter introducerar läraren dagens matematiska problem. Det är oftast ett problem som eleverna arbetar med under hela lektionen. När introduktionen har skett får eleverna börja arbeta självständigt för att därefter arbeta gruppvis. När eleverna har arbetat fram minst en lösningsmetod görs en klassrumsdiskussion där eleverna får presentera sina lösningsmetoder. Oftast väljer läraren vem som ska presentera en lösning. Ibland presenterar läraren lösningsmetoder som denne sett att eleverna genomfört under lektionen eller lösningsmetoder som läraren vill att eleverna ska lära sig. Efter att eleverna presenterat sina lösningsmetoder brukar läraren summera och utveckla diskussionen. Innan lektionen slutar lyfter läraren upp och summerar viktiga aspekter som kommit upp under lektionen. Ibland kan det finnas tid för två problem under en lektion. I detta fall brukar läraren göra dessa fem steg för vardera problem. Under lektionerna är de japanska lärarnas roll att leda klassrumsdiskussionerna, ställa frågor om lösningsmetoder, peka ut viktiga egenskaper i olika lösningsmetoder och presentera olika lösningsmetoder som de vill att eleverna ska lära sig (Stigler & Hierbert 1999, s. 30-31, 79-78, 93).

Japanska lärare tror att elever lär sig bäst genom att först få brottas med problemet, för att därefter diskutera lösningar och lyssna på fördelar och nackdelar med olika lösningsmetoder. Stigler och Hierbert (1999, s. 91) gör en jämförelse med USA's lärare som tror att elever lär sig bäst steg för steg, bit för bit. I USA ska eleverna utföra lösningar utan frustration eller förvirring. Eleverna får träna på samma procedur för att lära sig en bit i taget. I japanska klassrum däremot ses frustration och förvirring som något naturligt. Detta eftersom varje elev först måste brottas med problemet för att sedan kunna förstå de olika lösningsmetoder som sedan diskuteras. För att eleverna ska förstå kopplingar mellan metoder och matematiska problem tror japanska lärare att eleverna ska ges tid att utforska och uppfinna, göra misstag, reflektera, samt motta information vid lämplig tid. En mycket väsentlig del, vad gäller lärande, i japanska klassrum är att eleverna ska få kämpa och göra fel med matematiska problem för att sedan se varför deras lösning var fel. På så sätt skapas större förståelse för metoderna och de matematiska problem de arbetar med (ibid., s. 90-91). Pólya (1965, s. 116) menar även han att eleverna ska låtas lära genom att gissa och bevisa.

2.4 Teorianknytning

I detta kapitel presenteras den teori som ligger bakom det ramverk som används i denna studie. Det ramverk som ska stå till grund för analys av lärarnas utformning av och arbete med matematiska problem är taget från Lester (1989) (se Tabell 1, under avsnitt 4.2.1). Utveckling av matematiskt tänkande påverkas av det sammanhang och den kultur som eleverna verkar i (Lester 1989, s. 14). Ramverket som Lester tagit fram bygger på metakognition.

2.4.1 Metakognition

Metakognition anses vara nära kopplad till problemlösning (Lester 1989, s. 9). Det handlar om att eleven har kunskap och kontroll över sina egna kognitiva funktioner (se avsnitt 2.4.5 Kognitiva funktioner). Att eleverna har metakognitiv kunskap om sin matematiska utveckling innebär att eleverna är medvetna om sina styrkor, svagheter och processer. Eleverna bör också ha en medvetenhet och ett "förråd" med taktiker och strategier, samt veta hur dessa kan förbättra lösningar av matematiska problem. De kunskaper och föreställningar som eleverna har om matematik påverkar de resultat som eleverna kommer fram till. Att ha kontroll och kunna reglera inom problemlösning innebär att eleverna frågar sig själv *när*, *varför* och *hur* man bör undersöka ett problem. Det innebär också att eleverna planerar tillvägagångssätt, kontrollerar sina steg i problemlösningsprocessen, samt utvärderar problemlösningsprocessen och resultatet (ibid., s. 9).

2.4.2 Kognitiva funktioner

Lester (1989, s. 12) menar att både kognitiva och icke kognitiva funktioner påverkar elevernas problemlösningsförmåga. Dessa delar han upp i fem olika övergripande faktorer; knowledge, control, affect, beliefs och contextual factors. Kunskapfunktionen (knowledge factor) handlar om de kunskaper eleverna bär med sig vad gäller resurser för att lösa problem, exempelvis: definitioner (primtal, heltal), fakta (multiplikationstabellen), algoritmer (lång division), heuristik (sökande efter mönster), problemscheman (problemtyper) och olika rutin och icke algoritmiska tillvägagångssätt (metoder för integration). Det är av särskild betydelse att individer representerar, organiserar och utnyttjar dessa kunskaper i möte av matematiska problem. När dessa kunskaper inte är befästa kan det brista i utveckling av problemlösningsförmågan och begreppsförståelse (ibid., s. 12).

Med kontrollfunktionen (control) menas att eleverna ska reglera sitt beteende under problemlösningsprocessen. Denna kontroll behövs främst när eleverna ser över sina beslut och åtgärder för att analysera och utforska de olika processer som eleverna går igenom vid problemlösning. Exempelvis behöver eleverna analysera och utforska de strategier de använt eller det resultat de kommit fram till. Brist på kontroll under dessa processer kan bidra till katastrofala följder för elevens prestationer inom problemlösningen. För att reglera beteenden används metakognitiva processer (Lester 1989, s. 12).

Övertygelsefunktionen (affect) hänvisar till elevens matematiska världsbild. Alltså det perspektiv eleven har på matematik och matematiska uppgifter. Den matematiska världsbilden eleven har påverkas av elevens föreställningar om matematik, matematiska uppgifter, sig själv som matematiker, samt den miljö eller det sammanhang som eleven befinner sig i. Exempelvis kan en föreställning om matematiska uppgifter vara att alla matematiska problem kan lösas med direkt tillämpning av en eller flera aritmetiska operationer eller att alla matematiska problem kan lösas inom tio minuter (Lester 1989, s. 13).

Påverkningsfunktionen (beliefs) syftar till elevens känslor och attityder, exempelvis: ångest, rädsla, glädje, förtroende, motivation. Här ingår även en föreställelse om eleven själv som en matematiker. Attityder som har visat sig positiv för att eleverna ska prestera bra inom problemlösning är bland annat: vilja att ta risker, förtroende, intresse och motivation. Det är inte säkert att eleverna försvagas eller förstärks av positiva eller negativa känslor eller attityder. Hur en känsla eller attityd påverkar är olika från individ till individ. Denna faktor har fått ett ökat intresse inom forskning och det har kommit en växande mängd forskning som visar att känslor och kognitiva åtgärder samverkar i viktiga avseenden (Lester1989, s. 13).

Med den kontextuella funktionen (contextual) menas att eleverna påverkas av den kontext de lever och verkar i. Eleverna påverkar och påverkas av de mänskliga beteenden som de möter. Det är viktigt att tänka på hur dessa sociokulturella faktorer påverkar elevernas kognitiva förmågor, exempelvis: förståelse, utveckling, användning av matematiska idéer och tekniker. Dessa faktorer växer i det sociala och kulturella förhållanden som eleverna lever i. Det samspel som finns på skolan mellan eleverna och med läraren, samt de värderingar och förväntningar som skapas i skolan, kan forma elevernas syn på matematik och hur man lär och uppfattar matematiken (Lester 1989, s. 14).

Dessa fem kategorier överlappar varandra. Utveckling av matematiskt tänkande påverkas av det sammanhang och den kultur som eleverna verkar i. Alla fem kategorier påverkar eller berör varandra (Lester 1989, s. 14).

3. Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att få kunskap om vilka matematiska problem som används i skolan och hur lärares arbete ser ut kring dessa. Syftet konkretiserades i två frågeställningar:

- Vilka matematiska problem används i undervisningen i årskurs 1-3?
- Hur arbetar lärarna med dessa problem?

5. Metod

I detta kapitel beskrivs valet av metod, hur urvalet gått till och genomförandet av undersökningen. Här presenteras även etiska överväganden, samt tillförlitlighet och äkthet. Avslutningsvis presenteras bearbetning och analys av data.

5.1 Val av metod

Syftet med denna studie är att få kunskap om vilka matematiska problem som används i skolan och hur lärares arbete ser ut kring dessa, detta besvaras genom ett lärarperspektiv. Med utgångspunkt i studiens syfte var kvalitativ metod ett lämpligt val. Detta eftersom studien inte ämnar att generalisera utan vill förstå lärarens sätt att tänka kring undervisningen med matematiska problem. Ämnet ska stå i fokus för vilken metod som används i en studie (Brinkmann & Kvale 2009, s. 326). Således blev lärarintervjuer en lämplig metod för att besvara syftet och frågeställningarna för denna studie.

5.1.1 Kvalitativa lärarintervjuer

I kvalitativa intervjuer ligger intresset på att ta reda på respondenternas ståndpunkter. Det är därför önskvärt att låta respondenterna skena iväg i olika riktningar. Detta eftersom det är av intresse att få reda på vad respondenten anser vara relevant och viktigt kring ämnet (Bryman 2011, s. 413).

För att svara på syftet och frågeställningarna i denna studie valdes att använda sig av lärarnas uppfattningar kring matematiska problem och hur de använder sig av dessa i undervisningen. För att ta reda på detta valdes en semistrukturerad intervju som forskningsmetod. Denna intervju påminner om ett samtal men det finns ett professionellt syfte med samtalet. Således kan de valda temafrågorna leda in på nya frågor under intervjuns gång (Brinkmann & Kvale 2009, s. 43). Vid utformning av en semistrukturerad intervju har forskaren angett specifika teman som ska beröras. Dessa teman ska utgöra basen för intervjun men respondenterna har stor frihet att utforma svaren på sitt sätt (Bryman 2011, s. 415). En intervjuguide (se Bilaga 1) sammanställdes inför intervjuerna som grundar sig i denna studies syfte, frågeställningar och bakgrund. I intervjuguiden ställdes övergripande frågor. Under varje övergripande frågor fanns stödord som kunde användas för att ställa följdfrågor. Dessa övergripande frågor och följdfrågor ställdes i olika ordning, beroende på hur samtalet såg ut. Således kunde vissa följdfrågor ställas under olika temafrågor, eller så tog respondenten upp punkter som stod under andra övergripande frågor. Således är kvalitativa intervjuer flexibla och följer den riktning som respondenten svar ger (ibid., s. 413).

Intervjuerna spelades in. Detta eftersom det är önskvärt att ett samtal ska ske och att inte forskaren sitter och antecknar mitt i samtalet. Således kan forskaren vara mer lyhörd för de svar respondenterna ger och kan då ställa följdfrågor (Bryman 2011, s. 420). Bryman (ibid., s. 420) menar att om man antecknar kan man gå miste om viktiga fraser och uttryck som respondenten använder. Att spela in intervju underlättar för en detaljerad analys, samtidigt som man får med respondenternas svar med deras egna ordval.

5.2 Urval

I kvalitativa studier är målet att uppnå kunskap om ett ämne som inte nödvändigtvis ska kunna generaliseras. Eftersom denna studie inte avser att generalisera utan gå på djupet om ämnet så har ett icke-sannolikhetsurval använts (Larsen 2009, s. 77).

Ett snöbollsurval användes eftersom respondenter behövde vara lärare som antas ha goda kunskaper inom denna studies syfte och frågeställningar (Larsen 2009, s. 78). Detta urval kan även kallas för målstyrt då respondenterna väljs ut på grund av att de anses kunna svara på forskningsfrågan (Bryman 2011, s. 350). Urvalet av informanter gjordes genom att slumpmässigt välja ut fem skolor i en kommun. När skolorna valts ut skickades ett mejl till varje rektor där det tillfrågades om tillåtelse att kontakta lärarna på skolan. I detta mejl förklarades även syftet för denna studie. Därefter fick lärare själv välja om de ville delta, urval enligt självselektion (Larsen 2009, s. 77). Ingen lärare på två av skolorna deltog. Sex lärare i grundskolans tidigare år, på tre skolor, valde att delta i denna studie. Lärarna benämns: Lärare 1, Lärare 2, osv. Skolorna benämns Skola 1, Skola 2, osv. Genom att ge informanterna, och skolorna, kodnamn har denna studie säkerhetsställt konfidentialitet. Nedan presenteras en sammanställning av respondenterna där även bakgrundsvariabler tas upp. Larsen (ibid., s. 78) menar att variabler är av intresse för att få en helhetsförståelse eller djupförståelse för studien.

Tabell 2. *Sammanställning av informanterna*

Kodnamn:	Undervisar på:	Antal år i yrket:	Undervisar i årskurs:	Undervisar på skolan i årskurs:
Lärare 1	Skola 1	40	1	1-3
Lärare 2	Skola 1	33	2	1-3
Lärare 3	Skola 2	17	3	1-3
Lärare 4	Skola 2	44	2	F-3 (vikarie)
Lärare 5	Skola 3	13	3-6	3-6 (i matematik)
Lärare 6	Skola 3	38	1-2	1-2 (i matematik) utbildad till idrottslärare

5.3 Genomförande

Innan datainsamlingen påbörjades tillfrågades rektorer på fem skolor om forskaren för detta examensarbete fick kontakta skolans lärare för att utföra lärarintervjuer. Godkännande skickades från två rektorer, en rektor skickade två mejladresser till lärare som skulle kunna tänka sig att delta och de resterande två rektorerna skickade vidare frågan till lärare som kunde tänka sig att delta. Informationsbrev skickades ut till lärarna (se Bilaga 2). Sex intervjuer bokades in, via mejl eller telefon, på tre olika skolor.

5.3.1 Intervjuerna

Intervjuerna (se Bilaga 1) påbörjades med en inledning där intervjuaren informerade om studien, att det var frivilligt att delta, att det spelades in, samt att det var konfidentiellt. Därefter påbörjades intervjun med en kort bakgrund om vilken årskurs läraren undervisar i, samt hur många år läraren varit i yrket. Efter detta påbörjades intervjufrågorna där arbetet med matematiska problem togs upp. Avslutningsvis frågades det om respondenten ville lägga till någonting innan inspelningen avbröts. Därefter tackades det för respondentens deltagande. Det informerades även om att examensarbetet skickas ut till de medverkande lärarna när uppsatsen är färdig.

5.4 Etiska ställningstaganden

I denna studie har vetenskapsrådets forskningsetiska principer, vad gäller individskyddskravet, följts genom att studien tagit hänsyn till de fyra huvudkrav som de ställt upp. Dessa är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet 2002, s. 6).

Informationskravet innebär att "Forskaren ska informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte" (Vetenskapsrådet 2002, s. 7). Med detta menas att forskaren ska ge information till uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare om deras uppgift i projektet och de villkor som gäller vid deras deltagande. De ska även upplysas om att deltagandet är frivilligt och att de har rätt att avbryta sin medverkan. Vidare ska det klargöras att de uppgifter som samlats in inte kommer att användas till annat än syftet för undersökningen. Informationen som ges ska innehålla alla inslag i undersökningen som rimligen kan tänkas påverka deras vilja att delta. Syftet med undersökningen och beskrivning av hur undersökningen ska gå till ska också ingå i informationen (ibid., s. 7).

Samtyckeskravet innebär att "Deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan" (Vetenskapsrådet 2002, s. 9). Detta innebär att forskaren ska ha uppgiftslämnarens och undersökningsdeltagares samtycke till medverkan. Vidare ska de medverkande i undersökningen ha rätt att själva bestämma om, hur länge och på vilka villkor de ska delta. De har rätt att avbryta sin medverkan när som helst (ibid., s. 9-10).

Konfidentialitetskravet innebär att "Uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådan sätt att obehöriga inte kan ta del av dem" (Vetenskapsrådet 2002, s. 12). Detta kan konkretiseras i två regler. Den första regeln innebär att forskaren ska underteckna en förbindelse om tystnadsplikt beträffande etiskt känsliga uppgifter. Den andra regeln innebär att alla uppgifter om de medverkandes identifierbarhet ska antecknas, lagras och avrapporteras på ett sätt så att de medverkande inte kan identifieras av utomstående. Forskaren bör även vara medveten om att även om personuppgifter inte publiceras, kan detaljerad data innebära att vissa läsare kan identifiera någon individ. Därför måste forskaren försöka försvåra för utomstående att identifiera individer vid presentation av forskningsresultatet (ibid., s. 12-13).

Nyttjandekravet innebär att "Uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forskningsändamål" (Vetenskapsrådet 2002, s. 14). Vetenskapsrådet har konkretiserat detta krav i två regler. Den första regeln innebär att uppgifterna i undersökningen om enskilda inte får användas eller utlånas för kommersiellt bruk eller icke-vetenskapliga syften. Detta innebär att den insamlade datan endast får utlånas eller doneras till andra forskare som tar sig samma förpliktelser mot uppgiftslämnare som den ursprungliga forskaren utlovat. Den andra regeln innebär att personuppgifter som samlats in inte får användas för beslut eller åtgärder som direkt kan påverka individen (ibid., s. 14).

I informationsbrevet (se Bilaga 2) informerades det om studiens syfte. Vidare informerades det om att endast studenten för detta examensarbete kommer att ha tillgång till inspelningarna. Den data som samlas in kommer att kodas, inga namn eller kommuner kommer att nämnas. När uppsatsen är godkänd kommer all data som samlats in att makuleras. I brevet informerades det även om att deltagande är frivilligt och de tillfrågade kan när som helst avbryta sin medverkan utan närmare motivering. Detta togs även upp i början av intervjun. Tillgång till den färdiga uppsatsen erbjöds till de medverkande i undersökningen. Eftersom denna undersökningen ej anses vara etiskt känslig har ingen förbindelse om tystnadsplikt skrivits.

5.5 Tillförlitlighet och äkthet

Att tala om reliabilitet och validitet i en kvalitativ studie kan vara svårt då avsikten med en sådan studie inte är att mäta (Bryman 2011, s. 351-352). Åsikter finns om att två andra begrepp passar bättre att använda vid kvalitativa studier: tillförlitlighet och äkthet. Emellertid är inte forskare ense om vilka kriteriescheman som ska användas i kvalitativ forskning (ibid., s. 352-357). Denna studie väljer att följa de kriterier som satts upp för tillförlitlighet och äkthet.

5.5.1 Tillförlitlighet

Det finns fyra delkriterier för tillförlitlighet. Den första är trovärdighet, som innebär att det är trovärdigheten i forskarens beskrivning av informanternas verklighetsbild som avgör hur acceptabel den är i andras ögon. För att skapa trovärdighet i kvalitativ forskning bör man säkerställa att forskningen utförts enligt regler som är uppställda och att resultat visas för respondenterna så att dessa kan bekräfta att forskaren uppfattat deras verklighetsuppfattning på rätt sätt, så kallad respondentvalidering (Bryman 2011, s. 354-355). I enlighet med detta skickades därför transkriberingarna ut till var och en av respondenterna där de uppmanades att läsa igenom och lägga till eller ta bort om de kände att det blivit fel. Ingen av respondenterna svarade på detta mejl, vilket indikerar på att de inte hade något att tillägga eller något de ville ändra på.

Det andra delkriteriet handlar om studiens överförbarhet. Med detta menas att forskare som utför kvalitativ forskning bör göra fylliga beskrivningar över de detaljer som ingår i en kultur. På detta sätt förses läsaren av forskningen med en databas som de kan använda för att se hur pass överförbart resultaten är till en annan miljö (Bryman 2011, s. 355). Med anledning av detta ges en kort beskrivning på om hur många år lärarna har arbetat inom skolorna och i vilken årskurs de undervisar i vid undersökningstillfället.

Det tredje delkriteriet innebär att studien ska vara pålitlig. Dessa kan ses som en motsvarighet till reliabilitet. Pålitligheten i studien innebär att forskaren ska anta ett granskande synsätt. Därför ska en fullständig redogörelse ske av alla de faser som skett i forskningsprocessen (Bryman 2011, s. 355). Dessa faser presenteras i metodkapitlet i denna studie.

Det fjärde, och sista, delkriteriet heter möjlighet att styrka och konfirmera. Detta innebär att forskaren säkerställer att denne har handlat i god tro. Det går inte att få fullständig objektivitet i samhällelig forskning. Forskaren ska därför se till att denne inte medvetet har låtit studien påverkats av personliga värderingar eller teoretisk inriktning (Bryman 2011, s. 355).

5.5.2 Äkthet

Inom äkthet har även ett antal kriterier satts upp:

- Rättvis bild
  Detta innebär att studien ska ge en rättvis bild av de åsikter och uppfattningar som finns i den studerade gruppen.

- Ontologisk autenticitet
  Detta kriterium innebär att studien ska försöka hjälpa de studerade att komma fram till en bättre förståelse av sin sociala situation och miljö de verkar i.
- Pedagogisk autenticitet
  I detta kriterium frågas det om studien bidrar till att respondenterna får en bättre bild av hur andra i miljön upplever miljön.
- Katalytisk autenticitet
  Detta kriterium frågar om studien har gjort så att deltagarna kan förändra sin situation.
- Taktisk autenticitet
  Har studien bidragit till att ge deltagarna bättre möjligheter att göra de åtgärder som krävs? (Bryman 2011, s. 356-357).

Denna studie har gjort ett försök att ge så rättvis bild som denne förmår. Detta har gjorts genom noga transkribering av intervjuerna. Genom resultatdelen kan respondenterna förhoppningsvis få en ökad förståelse av sin sociala situation och där kan de även få en förståelse för hur andra lärares situationer ser ut. Vidare försöker denna studie utveckla lärarnas arbete genom att ta upp forskning kring ämnet och analysera deras undervisning i förhållande till forskningsbaserade ramverk. Genom denna studie är förhoppningen att respondenterna och andra verksamma inom skolan ska ges verktyg för att förbättra verksamheten i arbete med matematiska problem.

5.6 Bearbetning och analys av data

För att kunna göra data redo för analys behövde datan först bearbetas (Kvale & Brinkmann 2009, s. 207). Detta gjordes genom en innehållsanalys. Det innebär att de inspelade intervjuerna har transkriberats och skrivits ut för att ge en överblick över materialet. På så sätt blir det lättare att analysera materialet och jämföra de mönster och samband som eventuellt finns. Transkriberingarna skrevs i skriftspråk med ambitionen att inte förändra innebörden av vad respondenterna sagt. På så sätt försvann överflödiga ord eller ljud som till exempel: hostningar, a, å, mhm, osv. Genom att transkriberingarna skrevs i skriftspråk blev det enklare att läsa, hitta mönster och analysera materialet. Även citat har skrivits i skriftspråk. Detta borde göras av hänsyn till respondenterna, enligt Trost (2010, s. 156) Transkriberingarna skrevs sedan ut för att lättare hitta samband och mönster.

Därefter sorterades uppgifterna och ordnades i olika kategorier. För att underlätta denna sortering användes färgmarkörer (Malmqvist 2007, s. 122, 125; Larsen 2009, s. 101-102). Här letades det efter liknande och olika uppfattningar (Kihlström 2007, s. 162). Datan kategoriserades sedan i ett nytt dokument där de sorterats efter rubriker. Det främsta målet med kvalitativa studier är att hitta variationer. Genom dessa variationer kan datan grupperas för att sedan ligga till grund för rubrikerna som används i resultatdelen (Malmqvist 2007, s. 126). I de kategorier som skapats hittades ytterligare mönster som delades upp i underkategorier.

Den data som hämtats från intervjuer strukturerades i två kategorier: användning av matematiska problem och arbete med matematiska problem. Dessa kategorier svarar var för sig på de frågeställningar som konkretiserats ur denna studies syfte. Därefter bröts dessa kategorier ner i underkategorier genom de mönster som visade sig i analysen. Dessa underkategorier delades därefter upp ytterligare med några punkter. Utifrån innehållsanalysen kom dessa kategorier, underkategorier och punkter fram:

1. Användning av matematiska problem (frågeställning 1)
    - Hur väljs problemen ut?
        - Samarbete?
    - Kriterier för ett problem
        - Öppna eller slutna
        - Abstrakta eller konkreta
2. Arbete med matematiska problem (frågeställning 2)
    - Före
        - Förståelse
        - Modellering
        - Lösningsförslag
        - Begrepp
    - Under
        - Enskilt eller grupp
        - Respons
        - Resonemang
        - Utmaningar/andra uppgifter
    - Efter
        - Gemensam diskussion/diskussion i grupper
        - Olika lösningsmetoder
        - Tar upp andra/nya lösningsmetoder

6. Resultat

Denna empiriska undersökning har syftat till att fördjupa kunskaperna om vilka matematiska problem som används i skolan och hur lärares arbete ser ut kring dessa. Detta syfte konkretiserades i två frågeställningar:

- Vilka matematiska problem används i undervisningen i årskurs 1-3?
- Hur arbetar lärarna med dessa problem?

I resultatet presenteras först lärarens attityder till matematiska problem. Detta för att läsaren ska få en bild av hur lärarna ser på problemlösning. Det är relevant att veta om respondenterna är positivt eller negativt inställd till denna studies ämne eftersom det påverkar resultatet. Vidare presenteras lärares syn på användning av matematiska problem och arbete med matematiska problem (se avsnitt 5.6 om hur kategorierna blev till).

6.1 Lärarnas tankar kring matematiska problem

Utifrån intervjuerna ses tydligt att samtliga lärare har en positiv inställning till att arbeta med matematiska problem. De flesta lyfte upp att problemlösning är väldigt viktigt i matematikundervisningen, både för lärare och elever. Att arbeta med matematiska problem ses som en fördel för elevernas utveckling. De uttrycker även att det är roligt både för läraren och eleverna att arbeta med matematiska problem. När eleverna arbetar med matematiska problem och lyckas, växer deras självkänsla. Eleverna tycker att det är roligt när de lyckas lösa problem vilket leder till att de får en bra inställning till matematik. Att skola in eleverna i att arbeta med problemlösning tycks vara en lång process, men det är också en process som ger så mycket till elevernas utveckling i matematik. Problemlösning berör så många andra delar och sammanhang. "Det är verklighetsnära. Det är där du kommer in och förstår att matematiken är så stor som den är" (Lärare 6, Skola 3). Eleverna tränas i att kunna lösa problem som de möter i det vardagliga livet. Genom problemlösning får eleverna en förståelse för att talen har en innebörd.

Några lärare uttrycker att de "svagare" eleverna i matematik kan ha svårare att ta till sig det logiska tänkandet som de möter i problemlösning. De kan ha svårt att lära sig en strategi att använda. De hakar upp sig och fastnar i problemet. När dessa elever väl förstår problemlösning kanske en djupare förståelse för matematiken skapas. Genom problemlösning kan man göra det så mycket tydligare för eleverna med hjälp av praktiska hjälpmedel.

6.2 Användning av matematiska problem

6.2.1 Hur väljs de matematiska problemen ut?

De flesta lärare följer det område de är i just då när de väljer ut matematiska problem. Oftast är det matematiska problem i matematikboken. I vissa fall gör lärarna egna stenciler med fler matematiska problem eller tar ut problem som de hittar på exempelvis lektion.se. De fyra lärare som utgår från matematikböcker, har ett samarbete på skolan i arbete med matematiska problem (Skola 2, Skola 3). En skola har tillsammans gjort en matematisk plan över vilka områden de ska beröra. I varje område är det problemlösning. En av dessa lärare gör egna prov för varje område där det är problemlösning (se Bilaga 10.3, 10.3.2). Den andra skolan plockar tillsammans fram problem som de arbetar med i respektive klass (Skola 2). Efter arbetet med de matematiska problemen diskuterar lärarna, från de olika klasserna, om hur det har gått.

De andra två lärarna på den andra skolan jobbar lite annorlunda (Skola 1). Den ene läraren sätter upp egna problem kring teman. Exempelvis Lucia-matte (se Bilaga 10.3, 10.3.1). Denne lärare försöker göra problem efter vad som händer omkring eleverna, exempelvis jul eller påsk. Den andra läraren gör också egna problem där hen inspireras väldigt mycket av Montessori-matematik, alltså mycket konkreta problem där eleverna får arbeta genom att göra. "Att sitta och hålla på med en dator eller padda, det är inte konkret material bara för att man ser en bild [...]. Bilder är bara symboler för mig" (Lärare 2, Skola 1). Hen menar att man lär med alla sinnen. De två lärare som intervjuades på denna skola har inget samarbete med andra klasser vad gäller matematiska problem. Dock har de båda en varsin kollega i klassen som de samarbetar med.

6.2.2 Vilka kriterier har lärarna för ett matematiskt problem?

De lärare som intervjuades tog alla upp olika kriterier för ett matematiskt problem. Nästan alla uttryckte att det var viktigt att eleverna skulle kunna rita till problemet. Det är även av vikt att det finns flera olika lösningsmetoder. Samtliga lärare använder många konkreta problem. "Det kan vara både abstrakta och konkreta problem. I trean är det väl mer abstrakt men i ettan är det väldigt konkret" (Lärare 4, Skola 2). Det är lättare för eleverna i de yngre åldrarna att förstå när det är konkret. "En rutinuppgift är när man räknar talen som står i boken. Ett problem är när du måste ha olika tillvägagångssätt och kanske diskutera med någon. Det är mer en berättelse och du ska kunna lösa uppgiften utifrån den berättelsen" (Lärare 6, Skola 3). Några lärare uttrycker även att det är bra att ha bilder till problemet för att konkretisera det. Problemet bör även vara utformad på sådant sätt att det är tydligt, det ska vara lätt att förstå.

Lärarna arbetar både med öppna och slutna problem i olika mängd. En del jobbar mest med öppna och en del mest med slutna. En lärare menar att i ämnesprov är det oftast slutna problem, därför behöver eleverna tränas i att lösa sådana problem (Lärare 5, Skola 3). Flera lärare uttrycker att vid öppna problem kan man anpassa till elevernas kunskapsnivåer. En del kanske bara räknar det problem som satts upp medan andra får en utökning av problemet: "Hur blir det om du köper 4 saker i stället?". En av lärarna uttrycker att denne inte känner behovet av att anpassa problemet, i de lägre åldrarna får eleverna möta samma problematik. Hen anpassar årskursvis de problem som eleverna möter. Hen menar att eleverna ligger rätt lika kunskapsmässigt (Lärare 6, Skola 3).

Lärarna är oense om hur lång tid ett problem ska ta. Det är väldigt olika från problem till problem. De flesta lärare utformar (eller arbete i böcker) flera problem för en lektion som eleverna får arbeta med. En lärare menar att i de yngre årskurserna är inte problemen så stora, man hinner lösa flera problem under en lektion (Lärare 6, Skola 3). En annan lärare menar att ett matematiskt problem förhoppningsvis ska ta lång tid, annars är det inget problem. Det är bra om ett problem tar ungefär en lektion så att eleverna får vara i uppgiften och tänkandet under en längre tid (Lärare 2, Skola 1).

6.3 Arbete med matematiska problem

I ramverket för arbete med matematiska problem bygger Lester (1989) upp en lektion kring tre kategorier: innan, under och efter. Dessa kategorier står som rubriker i denna del av resultatet. "Innan" står för vad som sker innan eleverna arbetar med problemet. "Under" hänvisar till hur det ser ut när eleverna arbetar med problemet. Med "efter" menas vad som sker efter att eleverna arbetat med problemet.

6.3.1 Innan arbetet med matematiska problem

De sex intervjuade lärarna beskriver alla olika sätt att introducera ett matematiskt problem när de bads om att ge exempel på hur en lektion kan gå till med problemlösning. Trots detta kan man se många likheter mellan respondenterna. Många av lärarna beskriver hur de läser problemet, ritar upp på tavlan och tar upp svåra eller nya begrepp. "Vi jobbade med bråk för ett tag sen. Då pratade vi först om ordet bråk för det händer ju mycket bråk på rasterna. Vi pratar mycket om deras vardag" (Lärare 3, Skola 2). Att rita upp problemet gör att eleverna förstår bättre genom att det blir mer konkret. Man kan även använda konkret material, exempelvis klossar och pennor, för att skapa förståelse för problemet. Flera lärare är ense om att eleverna får hjälpas åt att spåna på olika lösningar. Vissa lärare uttrycker också att de först tränar på det tema som de har just då, exempelvis volym, och när kunskaperna är befästa kan volym tas upp i matematiska problem under en annan lektion. "Det ska inte vara något nytt när det kommer till problemlösning för då blir det jättesvårt för eleverna" (Lärare 5, Skola 3).

En av lärarna gjorde exempelvis en berättelse där problemet handlade om apor som hänger i ett träd, 100 någonting (händer, fötter eller svans) hänger i trädet, Hur många apor är det? Därefter pratade de tillsammans om hur apor kan hänga. På så sätt fick eleverna förslag på hur en apa kunde hänga och fick således idéer om hur de kunde lösa uppgiften (Lärare 2, Skola 1). En annan lärare pratar om hur hen vill få in eleverna i en händelse som redan utspelat sig, exempelvis en friluftsdag. Läraren menar att hen vill få eleverna att känna att de är där igen. Därefter kan man göra ett skådespel om vad som utspelar sig i problemet, exempelvis utdelning av hamburgare. Denna lärare, precis som många andra lärare uttrycker, försöker göra problemet så konkret som möjligt (Lärare 1, Skola 1). Läraren ska hjälpa eleverna att bena upp de olika delar som uttrycks i problemet. En mening i taget. Vad handlar det här om? Vad vet vi? Vad ska vi ta reda på? Hur ska man börja? I vilken ordning ska vi ta det?

Flera lärare påpekar att man måste låta eleverna tänka och inte ta den som först räcker upp handen. Genom att vänta in fler händer kan fler elever få chans att hinna tänka ut ett lösningsförslag. På så sätt kan förhoppningsvis flera lösningsförslag komma på tal och eleverna får se andras strategier för att lösa problemet. Vidare kan man diskutera vilken lösningsmetod som är mest effektiv för just det problemet. Flera lärare uttrycker också att man inte ska vara rädd för att modellera. Att visa eleverna hur man kan göra innan eleverna får påbörja sitt självständiga arbete. Då tar lärarna inte upp och visar just det problem som eleverna ska arbeta med, utan ett liknande där de kan få se vilka strategier man kan använda för att lösa ett liknande problem. Att bara släppa iväg eleverna i arbetet kan leda till att eleverna känner att de inte kan vilket kan leda till dålig självkänsla och motivation.

Genom att modellera kan lärarna lära ut olika strategier som eleverna kan använda när de löser problem. Samtliga lärare uttrycker att de pratar väldigt mycket om strategier, speciellt strategin: rita. Genom att eleverna ritar upp problemet kan de enklare se hur allt hänger ihop. Att använda plockmaterial tycks också vara ett attraktivt sätt att använda som hjälp vid lösning av matematiska problem. Genom olika strategier kan eleverna hitta mönster i problemen som de möter.

En lärare uttrycker att ibland kan det vara så att en annan elev förklarar bättre än vad läraren gör (Lärare 4, Skola 2). Därför kan det vara bra att eleverna får höra flera förklaringar av problemet eftersom de kanske inte förstod den första förklaringen. En av läraren beskrev hur hen spelade teater för att få eleverna att förklara för varandra och läraren vad decimeter var på en meterlinjal. Genom att göra detta skådespel fick hen eleverna att förklara väldigt grundligt vad dessa begrepp stod för (Lärare 5, Skola 3).

Lärarna uttrycker att det är viktigt att skapa förståelse för problemet innan man släpper iväg eleverna i eget arbete. Att ta upp svåra och nya begrepp ansågs vara väldigt viktigt så att inte elever fastnar på grund av att de inte förstår ett ord. Alla lärare uttryckte att de tar upp nya begrepp innan eleverna möter ett problem. I det fall att ett nytt begrepp dyker upp när eleverna arbetar självständigt så tas det upp vid det tillfället. Vissa ord kanske inte är svåra att förstå, men de kan vara svåra att läsa, exempelvis hamburgare. En av lärarna menar att det kan vara bra att skriva dessa ord på tavlan så att eleverna får en ordbild (Lärare 1, Skola 1). I de yngre årskurserna kan det även vara bra att läsa problemet för eleverna då vissa elever inte ännu har läsförståelse. "I bok är man så beroende av läsförståelse. Många i denna klass har läsförståelse men en del har inge alls. Då är det en fördel att arbeta i grupp" (Lärare 2, Skola 1). När läraren introducerar problemet läser och pratar läraren om problemet och sedan skapas en diskussion om lösningar samtidigt som läraren kan rita och visa på tavlan.

6.3.2 Under arbetet med matematiska problem

I fyra av klasserna jobbar de mest enskilt med matematiska problem, för det mesta i en matematikbok där problemlösning finns med. I böckerna kan det även förekomma tal där de ska jobba parvis. Vissa av lärarna har även stenciler för att träna mer på matematiska problem på de olika områden som de arbetar med. En av lärarna menar att eleverna jobbar mest enskilt för att de först måste befästa grunderna. Det ska nötas in genom att de jobbar sida för sida i matematikboken (Lärare 4, Skola 2).

Lärarna uttrycker även att de jobbar i helklass, parvis eller i grupp i vissa fall. Exempelvis använder de olika spel, datorspel, tipspromenad eller ett problem som de löser tillsammans på tavlan. En av dessa lärare uttrycker att de arbetar väldigt mycket med praktisk matematik. Hen har gjort i ordning olika lådor med matematiska problem som eleverna kan arbeta med tillsammans. Denna lärare är idrottslärare från början. En gång i veckan har de "ute-matematik" där de får göra mycket praktisk matematik på skolgården. I det fall det är snö är de i gymnastiksalen (Lärare 6, Skola 3).

En annan lärare menar att eleverna jobbar ungefär lika mycket med någon annan/flera andra som de jobbar enskilt (Lärare 1, Skola 1). Ibland jobbar de tillsammans i helklass och ibland i mindre grupper. Vid det fall de jobbar enskilt påbörjas det ofta med en diskussion med bänkkamraten eller i helklass om hur man kan lösa problemet. Att de jobbar enskilt beror oftast på att eleverna vill lösa uppgifterna på olika sätt. Exempelvis vill de köpa olika saker ur en butik i ett öppet problem där de själva får välja om de vill köpa en docka, bil eller andra saker. I dessa fall kan eleverna bli oense och då är det bättre att de jobbar enskilt men har en diskussion med bänkkamraten om hur man kan göra.

En annan lärare menar att de mest jobbar med matematiska problem i grupp, eller en kombination av både enskilt och parvis (Lärare 2, Skola 1). Denna lärare har jobbat på en Montessori-skola tidigare och håller därför på med väldigt mycket praktisk matematik. Exempelvis får de bygga på bänkarna med klossar för att visa ett tal ur multiplikationstabellen. Läraren uttrycker även att de får jobba i olika grupper varje gång där de är mellan två till tre elever i varje grupp.

Om någon blir klar med problemet/problemen tidigare brukar de flesta lärare ha andra uppgifter som eleverna kan lösa eller en matematikbok som de kan fortsätta i. Några av lärarna brukar utmana dessa elever genom att förlänga problemet eller låta eleverna skapa ett eget problem kring de problem de just löst. Exempelvis om de ska handla två saker ur en butik kanske eleverna i stället ombeds att handla tre eller fyra saker. Några lärare har olika elevspel som eleverna kan göra i det fall de är färdiga före de andra. Det kan exempelvis vara ett matematikspel på datorn eller olika brädspel med problemlösning.

Vid det fall eleverna frågar om hjälp brukar lärarna hjälpa dem genom att ställa frågor. Vad står det? Hur ska vi göra? Ibland får de hjälpa till att läsa en mening i taget för att se vad varje mening ger för ledtrådar till hur man ska lösa problemet. I vissa fall får eleverna hjälp med att börja rita. "Oftast när de frågar om hjälp så har de inte ritat. Det verkar som att det är det som ställer till det. Men så fort jag kommer dit och hjälper dem att rita så klarnar det upp" (Lärare 1, Skola 1). Samtliga lärare menar att de inte ger eleverna svaret utan försöker få dem att tänka själva genom att ge dem verktyg, konkreta hjälpmedel eller genom att ställa frågor. Ibland ges även ledtrådar ut för att få eleverna att komma vidare i det de fastnat i. En av lärarna uttrycker att eleverna gärna vill att man matar dem med svaret när de ber om hjälp (Lärare 2, Skola 1). I dessa fall får man försöka leda eleverna i problemlösningsprocessen genom frågor och andra hjälpmedel. Hen menar att man får peppa eleverna väldigt mycket för att de inte ska ge upp när de fastnat. "Vad vet du?", är en viktig fråga att ställa i dessa situationer. I enstaka fall kan läraren även börja modellera för att sedan låta eleven fortsätta självständigt med problemet. En annan lärare menar att det är vikigt att låta eleverna berätta vad det är de inte förstår. Om läraren lyssnar på elevernas resonemang kan läraren ganska enkelt se var de har fastnat i problemet (Lärare 1, Skola 1).

När eleverna sitter och arbetar självständigt eller i grupp brukar de flesta lärare, för det mesta, gå runt och lyssna på deras resonemang. Ibland kan de även ställa någon fråga om de märker att eleverna är på väg till en återvändsgränd. På så sätt kanske eleverna själva uppmärksammar felet. Lärarens roll vid arbetet blir således att vara en lyssnare och ställa frågor, men även den som man kan bolla idéer med. "Jag går runt och kikar och frågar hur det går. Jag har en elev som inte vill be om hjälp så henne går jag och kikar hos lite extra, kollar hur det går. Hen kan få berätta för mig så att jag ser att hen fattat" (Lärare 5, Skola 3). En av lärarna menar att de har svårt att hinna med att bara gå runt och lyssna. Den mesta tiden går åt till att hjälpa de elever som behöver hjälp (Lärare 4, Skola 2).

6.3.3 Efter arbetet med matematiska problem

I det fall elever inte hunnit arbeta klart med problemet/problemen menar en av lärarna att de är med och löser problemet ändå när de gör en gemensam genomgång av arbetet (Lärare 1, Skola 1). Hen menar att det är nästan omöjligt att få alla att hinna färdigt. Därför är det bra med en gemensam genomgång där man går igenom de lösningsmetoder som framkommit. På så sätt är de elever som inte hunnit färdigt ändå med och löser problemet tillsammans i helklass.

Två andra lärare uttrycker att är de inte färdiga så får de fortsätta nästa lektion. Oftast försöker lärarna se till att eleverna hinner färdigt genom att eleverna får fokusera på ett problem, medan andra elever kanske gör flera. "Det är sällan vi skickar hem för att någon inte hunnit färdigt. Vi försöker se till att vi ger dem chansen att jobba färdigt" (Lärare 3, Skola 2).

En lärare menar att det är svårt att göra en gemensam avslutning. Tiden rinner ofta iväg och det är dags för frukt eller lunch. Ibland tar denna lärare något tal på tavlan där eleverna får förklara hur de löst problemet men oftast räcker inte tiden till (Lärare 3, Skola 2). Andra lärare uttrycker också att tiden är knapp. En annan lärare menar att de inte har några gemensamma avslutningar eftersom de är så få elever. Lärarna går då runt i stället och diskuterar i grupperna. I det fall klassen fastnar i något tar de upp det tillsammans på tavlan. "När de arbetat färdigt kan de får berätta för varandra hur de har löst problemet eller för klassen, om de vågar. Det är lite olika" (Lärare 4, Skola 2).

De andra lärarna brukar ha en gemensam genomgång av de olika lösningsmetoder som kommit upp under lektionen. En av dessa lärare brukar under lektionens gång gå runt och kolla på de olika lösningsmetoder som eleverna använt och brukar då låta elever gå fram och skriva sin lösning på tavlan (Lärare 1, Skola 1). Vid dessa fall ser läraren till att denne elev gjort helt rätt. Hen vill inte utsätta eleverna för att bli granskade av alla andra när de gjort fel. Läraren vill gärna ta fram de lösningar där eleven har gjort lite annorlunda lösning. När eleven sedan skrivit sin lösning på tavlan får de andra eleverna försöka lista ut hur denne tänkt. Därefter får eleven själv berätta hur den gjort. Oftast tas flera olika lösningsmetoder upp för att eleverna ska få se att det finns flera sätt att lösa ett problem på, exempelvis är 3x2 äpplen samma sak som 3+3 äpplen. En viktig fråga i arbete med problemlösning, enligt denna lärare är: "Varför det?". Det är inte svaret som är det viktiga, utan vägen dit, "varför blir det 8?" (Lärare 1, Skola 1). Denne lärare menar att hen alltid har ett syfte med lektionen och i det fall det syftet inte framkommer i genomgången tar hen själv upp det. Det kan till exempel vara att hen vill att eleverna ska se kopplingen mellan addition och multiplikation. Eleverna har då kanske skrivit 4+4+4. Då kan läraren fråga: "Kan man skriva på något annat sätt?". Läraren frågar alltså klassen för att de själva ska komma fram till kopplingen. Detta gör även en av de andra lärarna. Om hen vet ett bättre sätt att lösa problemet så brukar hen ta upp det (Lärare 2, Skola 1).

En annan av de lärare som har gemensam genomgång använder en liten box med namnlappar för att dra vem som ska få berätta hur den/de löst problemet (Lärare 2, Skola 1). Ibland kan då likadana lösningsmetoder komma fram och i detta fall kan man fråga om det är någon annan som löst på ett annat sätt. Om det inte finns något annat sätt som eleverna löst på kan läraren försöka att hålla samtalet igång genom att eleverna får försöka tänka och komma på andra sätt. Då dyker oftast fler lösningsmetoder upp när de diskuterar. De brukar även diskutera vilken lösningsmetod som är smidigast och varför den är smidigast att använda för det problem de diskuterar. I det fall eleverna har byggt på bänkarna med klossar brukar de gå runt och titta och diskutera vilken metod som verkar mest lämpad att använda för tydlighetens skull.

Samtliga lärare menar att de arbetar med rimlighet i klassen i olika grad. En lärare menar att hen kan vara den som hittar på tokiga saker som är orimliga för att eleverna ska reagera på vad som är rimligt i matematik (Lärare 1, Skola 1). Att läraren är den som presenterar orimlig fakta för eleverna, i stället för att en elev utsätts för det, är bra. Att sätta en elev i den situationen är inte att önska för deras självkänsla.

Lärarna frågades vad de ansåg att de hade för roll vid diskussioner. Samtliga lärare är eniga om att de har en ledande och stöttande roll, att de ska leda diskussionen framåt genom exempelvis frågor eller ge ledtrådar. Läraren ska försöka få med alla elever i diskussionen och ställa utmanande frågor såsom: "Varför det?", "Finns det andra sätt?" eller "Hur kan man göra för att räkna mindre (exempelvis 3x4 i stället för 3+3+3+3)?". En lärare menar att det är viktigt att man ställer ärliga frågor. Läraren vet redan att 3+3 är 6. Läraren vill i stället ställa frågor kring hur eleverna tänkt, "hur kan det bli 6?". Läraren vet inte hur eleven har tänkt och därför är det en ärlig fråga. Denne lärare menar att de frågor som läraren själv redan vet svaret på är oärliga att ställa till eleverna (Lärare 1, Skola 1).

Två av lärarna uttrycker att man måste vänta in eleverna i diskussionen så att alla hinner tänka (Lärare 5, Skola 3; Lärare 1, Skola 1). En av dessa lärare menar att de flesta lärare inte kan vänta i mer än tre sekunder, på att en elev ska svara, innan de frågar en annan elev (Lärare 1, Skola 1). Hen menar att eleverna måste ges tid att fundera när de tillfrågas om att dela med sig av sina idéer. Vid det fall att en elev svarar fel brukar några av lärarna inte direkt säga att det är fel utan i stället fråga hur eleven tänkt. På så sätt kanske eleven själv kommer fram till lösningen när den förklarar.

En av lärarna försöker binda ihop problemet med tidigare lösta problem. Genom återkoppling kanske eleverna får hjälp i hur de ska tänka i det nuvarande problemet (Lärare 5, Skola 3). Denne lärare försöker även prata mycket om när eleverna är i behov av att kunna de färdigheter som tränas när de löser problem, "När behöver vi kunna mäta?".

7. Diskussion

I detta kapitel diskuteras metoden för denna studie. Diskussion sker även över resultatet av denna studie.

7.1 Metoddiskussion

För att besvara denna studies frågeställningar, om vilka matematiska problem som lärare använder och hur de arbetar med dessa, gjordes intervjuer med lärare som undervisar i ämnet matematik i årskurserna 1-3. I detta avsnitt diskuteras den metod som valts, de val som gjorts och hur det kan ha påverkat resultatet.

7.1.1 Urval

I denna studie valdes det att intervjua lärare. Dessa lärare valdes ut genom att mejl skickades till rektorer på fem skolor och sedan togs kontakt med intresserade lärare. Deltagandet var frivilligt och detta kan ha lett till att endast de som är positiva till denna studies ämne har valt att delta.

Detta icke-sannolikhetsurvalet användes för att gå in på djupet kring ämnet för denna studie (Larsen 2009, s. 77). Urvalet är inte slumpmässigt och det är inte tillräckligt många lärare representerade för att det ska gå att generalisera resultatet. Denna studie kan dock vara av intresse för lärare som arbetar med matematiska problem i årskurs 1-3. Detta eftersom enskilda fall kan vara relevanta för andra lärare i liknande situationer (Brinkmann & Kvale 2009, s. 196).

Sex lärare deltog i studien, vilket kan ses som ett litet antal. Att inte fler lärare ville delta kan inte ges svar på. Det kan vara så att de inte tyckte att studiens ämne var intressant, eller att de informationsbrevet inte väckte intresse hos dem. Det kan också ha att göra med den tidsbrist som lärare har i sitt arbete, de kanske inte hade tid under de veckor som intervjuerna skulle genomföras. Brinkmann och Kvale (2009, s. 130) ser en vinst i att ha färre intervjuer för att i stället ägna tiden på att förbereda och analysera dem väl.

7.1.2 Intervjuer

Det intressanta i kvalitativa studier är att veta vad som är relevant för respondenterna kring ämnet. Det är därför av intresse att låta lärarna ta intervjun i olika riktningar i samtalet (Bryman 2011, s. 413). I denna studie lät intervjuaren respondenterna tala om det som de ansåg vara relevant. Givetvis har relevanta delar som tagits upp, som det inte har frågats om, tagits med i denna studie. Att använda en semi-strukturerad intervju visade sig vara väldigt bra för att få fram lärarnas uppfattningar kring denna studies ämne. De temafrågor som valdes ut fungerade som bra stöttepelare för de olika ämnen som berördes i studien. Dock hade frågorna kring lärarens roll kunnat tagits upp under andra temafrågor, exempelvis kunde man ta lärarens roll vid diskussion i samtal kring just diskussioner. Vid analysarbetet märktes de att dessa frågor hade passat bättre under frågor kring lektionens upplägg. Jag anser även att ett förtydligande hade behövts vad gäller vad ett matematiskt problem är i intervjuerna.

Intervjuguiden följdes till stor del, frågor ställdes i princip i samma ordning. Ibland kom någon respondent in på andra delar av intervjuguiden. I vissa fall togs dessa frågor upp igen under "rätt" temafråga och i vissa fall ansågs frågan vara helt besvarad. Att frågorna togs upp igen berodde på att ett förtydligande behövdes på grund av att respondenten bara kortfattat pratat kring ämnet.

Vid intervjuer är risken stor att intervjuaren ställer ledande frågor. Men det är inte avgörande om en fråga är ledande eller inte, utan vart den leder och om den leder till värdefull information (Brinkmann & Kvale 2009, s. 189). För att försöka undvika ledande frågor reflekterades det kring intervjuerna i efterhand och anteckningar gjordes för att försöka förbättra nästkommande intervju. Forskaren bör transkribera direkt efter intervjun för att dessa förbättringar ska kunna göras (ibid., s. 128). Denna studie hade kunnat förbättras genom att transkriberingar skett direkt efter intervjuerna. På så sätt hade mönster lättare setts i tid och intervjufrågorna kanske hade förbättrats.

Att intervjuerna spelades in resulterade i flera timmar av transkribering och analysarbete. Om anteckningar hade gjorts i stället hade det varit enklare att endast ta med det som varit relevant. Att spela in har dock setts som en större fördel eftersom ett samtal har kunnat skapas under intervjuerna, samt att ingenting som lärarna sade har missats att anteckna eller att komma ihåg. Genom att samtalen spelats in blir resultatet trovärdigare eftersom analys har skett på det lärare sagt ordagrant.

Intervjueffekten innebär att intervjuaren eller metoden kan påverka resultatet (Larsen 2009, s. 27-28). Respondenterna kanske svarar så som de tror att intervjuaren vill. De kanske även försöker göra ett gott intryck och döljer brister i verksamheten eller den egna kunskapen. Det är inget forskaren kan påverka, respondenterna berättar om den verklighet de vill framföra. Respondenterna kan exempelvis svarat på vad de tror att de bör svara på vilka matematiska problem de använder eller på för- och nackdelar med matematiska problem. Huruvida det de säger (eller upplever) om sin verklighet är sant eller inte hade kunnat visats genom observationer av verksamheten. Om en observation hade gjorts i denna studie hade resultatet kunnat bli trovärdigare och resultatet hade även blivit fylligare. I vissa fall hade kanske ett annat resultat framkommit kring arbete med matematiska problem (Bryman 2011, s. 380).

7.2 Resultatdiskussion

I detta avsnitt diskuteras resultatet i förhållande till de kapitlet Bakgrund. Detta avsnitt, precis som resultatet, är uppdelat i två avsnitt: användning av matematiska problem och arbete med matematiska problem.

7.2.1 Användning av matematiska problem

Löwing och Kilborn (2002, s. 247, 265) menar att i de yngre åldrarna bör man börja med enstegsproblem. När eleverna sedan blivit mer utvecklade i problemlösning kan man börja med lite komplexare problem. En jämförelse kan göras med Bilaga 10.3.1 och 10.3.2 där ett enstegsproblem presenteras i arbetet med Lucior i årskurs 1, medan ett flerstegsproblem presenteras i årskurs 3:s prov. I enstegsproblemet behöver eleverna bara göra ett steg: "I ett Lucia-tåg fanns fyra Lucior. Varje Lucia har fem levande ljus i sin krona. Hur många ljus har de tillsammans?". De behöver då eventuellt endast rita fem ljus på fyra lucior och sedan räkna ihop, 5x4. I flerstegsproblemet får eleverna lov att räkna i flera steg: "Peter har åtta frukter i en skål. Hälften är bananer. En fjärdedel är äpplen och resten är Kiwifrukter. Rita frukterna!". I detta fall får eleverna först räkna ut hur många bananer det är, därefter äpplen och till sist kiwifrukterna. Definitionen av ett matematiskt problem enligt Skolverket (2011, s. 9,25) är att en uppgift är ett problem om eleverna inte känner till en lösningsmetod eller där uppgiften inte är av rutinkaraktär. Huruvida uppgiften med Lucior är ett problem eller inte kan inte jag svara på då kunskaper inte finns kring elevernas kunskaper. Samma argument gäller för flerstegsproblemet som tas upp. Om uppgifterna är för enkla för eleverna att utföra kan det inte längre ses som ett problem. Ett matematiskt problem ska vara utmanande (Walle 2003, s. 68-69).

Vid flerstegsproblem tränas eleverna i att orientera sig i och organisera problemet (Lester 1989, s. 37). Många av lärarna använder mest det som Lester beskriver som rutinproblem. De använder uppgifter där eleverna behöver översätta verbala problem till siffror. Att använda dessa problem kan ses som en bra grund att arbeta med i yngre årskurser för att sedan avancera i de äldre årskurserna med processproblem. Vid processproblem tränar eleverna inte bara i orientering och organisering, utan de får även försöka bena upp ett problem med mycket logiskt tänkande.

Eftersom många av lärarna menar att de hinner med flera matematiska problem under en lektion så görs ett antagande om att de använder enkla problem, enstegsproblem eller icke tidskrävande flerstegsproblem. Den lärare som uttrycker att ett matematiskt problem helst ska ta en hel lektion är också den lärare som jobbar Montessori-inspirerat, där eleverna får jobba praktiskt med problemen. Att arbeta praktiskt tar generellt sett mycket längre tid, men kan skapa djupare förståelse för matematiken. Löwing och Kilborn (2002, s. 247, 265) menar att det är bättre att ha 3-4 uppgifter under en lektion som eleverna hinner lösa och analysera kring, än att ha 10 uppgifter som de inte hinner reflektera över. Det ses som en fördel att lärare konstruerar egna problem, eller tar inspiration från andra, för att bemöta de område de vill och samtidigt kunna anpassa problemet till den klass de har. Att endast förlita sig på matematikböcker kan vara negativt om inte läraren reflekterar kring varför eleverna löser dessa problem. Frågan är inte om dessa problem är utformade på ett dåligt sätt, utan om de är utformade för det ämne som lektionen ska beröra eller den klass som ska möta dem. Genom att konstruera egna uppgifter kan lärarna lättare bemöta eleverna på deras nivå och i deras värld, som exempelvis händelser kring påsk (Walle 2003, s. 68-69). Genom ett gott samarbete kan lärare tillsammans utforma matematiska problem på skolan som de sedan kan diskutera efter utförandet. På så sätt får även läraren idéer om hur denne kan förbättra sin undervisning.

Vad gäller kriterier menar de flesta lärare att det är viktigt att eleverna ska kunna rita vid lösningen. De talar även om att det ska finnas flera lösningsmetoder och att det ska vara konkret. Att ha flera lösningsmetoder är en fördel för att eleverna ska uppmuntras till att motivera sina val (Prusak, m.fl. 2013, s. 271, 282).

Att ha konkreta problem i de yngre årskurserna ses också som en fördel. Detta eftersom eleverna behöver mer förståelse för hur matematik ser ut innan de kan gå in på att endast tänka i huvudet (det mer abstrakta).

Några lärare förespråkar öppna problem. Genom en öppen uppgift kan eleverna få möta flera olika svar och lösningsmetoder i arbetet och i diskussionen kring matematiska problem. Genom att använda öppna uppgifter kan eleverna själva välja vilka tal de är redo att arbeta med. Således får de arbeta på sin egen nivå och läraren kan lättare se var eleverna befinner sig (Holgersson 2014, s. 1). De lärare som för de mesta använder slutna problem kan försöka göra om dessa till öppna. Holgersson (2014, s. 1) visar hur man enkelt kan göra om ett slutet problem till ett öppet problem (se avsnitt 2.3.2 Öppna och slutna problem). Det menas inte att eleverna bara ska arbeta med öppna uppgifter. De behöver även träna på att arbeta med slutna. Dock ses mer fördelar med att arbeta med öppna uppgifter både för eleverna och läraren.

Ingen av lärarna tar upp det som Skolverket (2011, s. 9, 25) menar, att ett matematiskt problem är när eleven inte känner till hur en uppgift ska lösas. Att ingen poängterat detta som ett kriterium för ett problem är intressant. Om eleverna inte får möta uppgifter som faktiskt är problem, där lösningsmetoden inte är given för dem, resulterar det i att det som lärarna i denna studie kallar för problem faktiskt då blir rutinuppgifter. Ett matematiskt problem ska utmana eleverna och inte ge dem träning på det de redan kan. Åsikten från de flesta respondenter i denna studie är dock att matematiska problem inte får vara för svårt i de yngre åldrarna, att eleverna lätt lessnar om det är för svårt. Lärarna bör vara försiktiga med att lära in invanda mönster för problemlösning. Detta resulterar i att eleverna tappar den reflekterande delen av problemlösningen (Möllehed 2001, s. 11). Uppgifterna som eleverna möter ska vara utmanande, men inte otillgängliga. Det är endast läraren själv som vet vilken nivå av matematiska problem dess elever är redo att möta (Walle 2003, s. 68-69). Frågan är om författaren av och respondenterna i denna studie talar om samma sak när det talas om matematiska problem. Att ingen tar upp Skolverkets definition kan även bero på att de anser att det är en självklarhet. Lärare bör ha insikt i vad som är ett matematiskt problem och hur man ska bemöta dessa för att de just ska bli ett problem för eleverna. Om eleverna tränas på lösningsmetoden som ska användas innan lösningen, kan problemet då ses som ett problem för eleverna? Att spekulera kring huruvida denna studie verkligen bygger på lärares användning av matematiska problem är svårt då Skolverkets definition inte framkommer i verksamheten. Om inte eleverna får möta "något nytt" i matematiska problem, är det då en utmaning för eleverna?

7.2.2 Arbete med matematiska problem

I resultatet av arbete med matematiska problem kommer det fram att när klasserna arbetar med matematiska problem berör de alla förmågor för matematik: problemlösningsförmågan (processen), begreppsförmågan (problemet), metodförmågan (strategier), resonemangsförmågan (processen) och kommunikationsförmågan (exempelvis i diskussioner). Matematiska problem ska inte enbart användas för att utveckla problemlösningsförmågan, utan även de andra förmågorna (Skolverket Uå). Eleverna tränas i de olika förmågorna i olika mån. Mer reflektion tycks behövas över hur matematiska problem berör de olika förmågorna och på vilket sätt läraren ska använda matematiska problem för att utveckla förmågorna i matematik. Ett matematiskt problem bör provocera eleverna till att använda sina förmågor på ett kreativt sätt (Thom & Pirie 2002, s. 3).

Lester (1989, s. 32-33) menar att innan man släpper iväg för arbete med problemet ska man: läsa problemet och diskutera ord, ha en helklassdiskussion för att skapa förståelse och eventuellt ha helklassdiskussion kring möjliga lösningar. Många av lärarna berör dessa punkter. De läser talet, diskuterar svåra ord och matematiska begrepp (då eller vid tidigare tillfällen), samt diskuterar problemet. De kan även rita upp på tavlan för att skapa förståelse. Detta är bra att göra för att konkretisera problemet (Schoenfeld 1985, s. 373). Några av lärarna går även in på möjliga lösningsmetoder att använda. Schoenfeld (1985, s. 37) menar att det är viktigt att läraren inte omedelbart kommenterar elevers felsvar, utan i stället låter eleverna själva komma fram till problemet genom att de får förklara. Några av lärarna uttryckte att det var bra att göra på detta sätt och inte utsätta någon elev för granskning. Om de själva får komma fram till lösningen ökar deras självkänsla. Om läraren i stället hade sagt: "nej, det är fel", kanske de hade gett upp med matematiken för att de känner sig dåliga.

Under tiden eleverna arbetar med problemet, menar Lester (1989, s. 32-33), att läraren ska observera och ställa frågor, ge ledtrådar vid behov, förlänga problemet vid behov och ge de elever som ska presentera deras lösningar möjlighet att se över sitt arbete innan. När eleverna arbetar med matematiska problem uttrycker de flesta lärare i denna studie att de går runt och lyssnar, samt ställer frågor. Genom att de observerar kan de se var eleverna befinner sig kunskapsmässigt och kan även se de styrkor och svagheter eleverna har i problemlösningsprocessen. Genom att lärarna blir medveten om elevernas styrkor och svagheter kan de använda dessa i kommande matematiska problem. I de fall läraren tar upp något som många elever visat svaghet i så kan läraren vara mer tydlig i introduktionsdelen.

De flesta klasser i denna studie jobbar mest enskilt med matematiska problem. Vid enskilt arbete mister eleverna möjligheten att spåna idéer med någon annan och se olika lösningsmetoder (i det fall det inte tas upp efter). Som en av lärarna uttryckte så kan det vara så att en elev ibland kan förklara bättre än läraren. Schoenfeld (1985) menar att det är bra att arbeta med matematiska problem i grupp. Genom grupparbete kan eleverna få hjälp av varandra och utnyttja varandras styrkor och svagheter. Vid arbete med ett öppet matematiskt problem i grupp kan det skapa svårigheter då eleverna vill använda olika tal. Detta löste en lärare genom att eleverna först fick diskutera med varandra, för att sedan välja egna tal och sedan titta på varandras lösningar. På så sätt kan eleverna fortfarande få med sig de fördelar som finns i arbete med grupp. Men att arbeta enskilt innebär att eleverna kan arbeta i sin egen takt och inte känner sig stressade över att någon annan är snabbbare på att exempelvis skriva eller räkna. Således kan även självständigt arbete ses som en fördel i arbete med matematiska problem.

Några av lärarna gör precis som, Lester (1989) menar: att förlänga problemet. Detta görs genom att de ställer fler frågor eller ber dem hitta på ett eget problem kring temat. På så sätt får eleverna tillämpa sina lösningsmetoder på liknande problem och se hur det fungerar. Några av lärarna låter eleverna arbeta vidare i matematikboken, ger dem stenciler med matematiska problem eller låter dem spela datorspel eller brädspel. När eleverna får fortsätta med samma ämne i matematikboken eller i stenciler befästs deras kunskaper genom repetition. Å ena sidan kan det ses som bra, å andra sidan kan det trötta ut eleverna om de matas med en massa nya problem. Att ge dessa elever utmanande problem från början i det ursprungliga problemet kan vara en fördel för att eleverna ska stanna i problemet längre och får vara i tänkandet kring det under en längre tid. En lärare ska inte vara rädd för att låta eleverna brottas med problemet (Stigler & Hierbert 1999, s. 91).

Lester (1989, s. 32-33) menar att efter eleverna har arbetat med det matematiska problemet/problemen ska läraren: visa och diskutera olika lösningar, relatera till tidigare lösta problem, samt diskutera speciella funktioner av problemet. Några av lärarna i denna studie uttryckte att tiden var knapp, att de ofta inte hann med en avslutande diskussion. Planeringen av dessa lektioner bör utvecklas så att eleverna får möjlighet att diskutera olika lösningsmetoder. Endast fördelar framkommer i denna studie vad gäller gemensam avslutande diskussion. Det är i den fasen allt knyts samman och eleverna får reflektera kring sin egen och andras lösningsmetoder. Genom dessa diskussioner kan de elever som inte hunnit lösa färdigt uppgifterna vara med ändå och tillammans komma fram till lösningar av problemet. Eleverna behöver lära sig flera lösningsmetoder för att bli goda problemlösare (Löwing & Kilborn 2002, s. 264).

Samtliga lärare är eniga om att de har en ledande roll under diskussionerna. Genom frågar och stöttning kan lärarna leda eleverna till att resonera mer. En viktig fråga som framkommit i denna studie är: "Varför det?". Genom att använda denna, lite utmanande fråga, fokuserar läraren på elevens lösning i stället för på svaret. Således får eleven chans att se tillbaka på sin lösningsmetod och reflektera kring den. Att ställa denna fråga visar för eleverna att det inte är svaret som är viktigt utan vägen dit. Alla kanske kommer fram till samma svar, men det intressanta är egentligen hur många olika lösningsmetoder det finns.

Vad gäller återkoppling till tidigare lösta problem var det endast två lärare som tog upp. Genom att återkoppla kan eleverna får en medvetenhet om att strategier inte är problemspecifika utan kan tillämpas på flera olika problem. På så sätt kanske eleverna ser mönster i olika problem och kan således generalisera vissa problem till att höra ihop med vissa lösningsmetoder.

Samtliga lärare följer de roller, som Lester (1989, s. 40-43) satt upp, på olika sätt. För det första agerar de extern bildskärm genom att följa tabell 1 där de arbetar med problemet i olika faser. De arbetar även som kontaktpersoner genom att ställa frågor och utmanar eleverna är de löser problem. Dock fanns inga tecken på att eleverna själva får reflektera över sina prestationer genom att exempelvis reflektera över sina styrkor och svagheter vad gäller deras problemlösningsförmåga. Genom att eleverna får reflektera kring sin process kanske de i ett senare skede får hjälp genom att de är medvetna om sina styrkor och svagheter. Några av läraren pratade även om den sista rollen som Lester tar upp, att modellera och visa olika tillvägagångssätt. På så sätt kan eleverna få med sig viktiga och eventuellt enklare strategier att använda i möte med liknande matematiska problem i framtiden.

Vad gäller de fyra faser som Pólya satt upp, arbetar samtliga lärare efter dessa principer. Först ska eleverna läsa och förstå problemet. Därefter får de tänka hur de ska lösa problemet. Efter det kan de börja rita eller använda någon annan strategi. När lösningen är färdig pratar man om rimlighet och ser tillbaka på hur lösningen gått till genom att exempelvis berätta för klassen eller en bänkkamrat.

8. Slutsatser och förslag på vidare studier

Slutsatser som kan dras av denna studie är att arbete med matematiska problem är viktigt i matematikundervisningen för elevernas utveckling, enligt lärarna i denna studie. Genom problemlösning kan man beröra flera olika områden och förmågorna i matematik. Huruvida författaren till denna studie och lärarna talat om samma sak när det talas om problem är svårt att svara på. Lärare bör reflektera mer över vad ett matematiskt problem är. Lärare bör även reflektera mer kring vilka matematiska problem som används i klassrummet och varför. Utvecklingsmöjligheter finns alltid i alla aspekter i ett yrke. Lärare kan ur denna studie (i den forskning som presenteras och det resultat som framkommit) få idéer om hur de kan utveckla sin profession.

Mer forskning bör göras på hur lärare ska arbeta med matematiska problem i klassrummet och effekterna av olika tillvägagångssätt. Eftersom Skolverket menar att lärare ska integrera problemlösning med alla förmågor så ses det vara av stor vikt att mer forskning berör hur lärare ska arbeta med detta. Kanske det även behövs en mer utförlig beskrivning på vad matematiska problem är enligt Skolverket för att lärare lättare ska kunna ta till sig dessa riktlinjer.

9. Referenser

Boaler, J. (2011). *Elefanten i klassrummet - att hjälpa elever till ett lustfyllt lärande i matematik.* Stockholm: Liber AB.

Boesen, J.; Emanuelsson, B.; Ryding, R.; Wallby, A. & Wallby, K. (2006). Inspiration för svensk matematikutbildning. I: Boesen, J. (red). *Lära och undervisa matematik - internationella perspektiv.* s. 1-6. Göteborg: NCM.

Brinkmann, S. & Kvale, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Stockholm: Liber AB.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. I: *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15*(1), 35-49.

Hagland, K.; Hedrén, R. & Taflin, E. (2015). *Rika matematiska problem - inspiration till variation.* Stockholm: Liber.

Holgersson, I. (2014). *Lärportalen för matematik, grundskola åk 1-3 - Att arbeta med öppna uppgifter.* Kristianstad: Skolverket.

Kihlström, S. (2007). Fenomenografi som forskningsansats. I: Dimenäs, J. (red.) *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik.* Stockholm: Liber AB.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: NCM.

Larsen, A. K. (2009). *Metod helt enkelt - En introduktion till samhällsvetenskaplig metod.* Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I: Lester, F. K. Jr. (red). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* s. 763-804. NCTM.

Lester, F. K. Jr. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes. Final report.* Indiana: Mathematics Education Development Center.

Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik - Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper.* Karstad: Karlstad University Studies.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Malmqvist, J. (2007). Analys utifrån redskapen. I: Dimenäs, J (red.) *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik.* Stockholm: Liber AB.

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik - En studie av påverkningsfaktorer i årskurserna 4-9*. Malmö: Lärarhögskolan Malmö.

OECD (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving - Students' skills in tackling real-life problems (Volume V).* PISA: OECD Publishing.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Second Edition. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery Volume 11: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley and Sons Inc.

Prusak, N.; Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2013). *Conceptual learning in a principled design problem solving environment*. United Kingdom: Research in Mathematics Education.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. I: Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 361-379.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The american mathematical monthly*, *87*(10), 794-805.

Skolverket (u.å.). *Om ämnet matematik*. Stockholm: Fritzes. Hämtad: 2017-02-08.

Skolverket (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.* Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2014). *PISA 2012- Digital problemlösningsförmåga hos 15-åringar i ett internationellt perspektiv. Rapport 406.* Stockholm: Fritzes.

Skolverket (red.) (2015). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Fritzes.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap - Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.

Swan, M. (2006). *Colloborative learning in mathematics.* England: Shell Centre for Mathematics Education.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan - för att skapa tillfällen till lärande*. Umeå: Umeå Universitet.

Thom, J. S. & Pirie, S. E.B. (2002). *Problems, perseverance, and mathematical residue.* Netherlands: Educational Studiesin Mathematics.

Trost, J. (2010). *Kvalitativa intervjuer*. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer - inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Hämtad 2017-02-08.

Walle, Van de J. A. (2003). Designing and selecting problem-based tasks. I: Lester, F. K. Jr. (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade 6.* US: the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. s. 67-80.

10. Bilagor

10.1 Bilaga 1 - Intervjuguide

Inledning:

- Mitt examensarbete
- Frivilligt
- Spela in? Filen kommer att raderas efter transkribering
- Konfidentiellt, inga namn kommer nämnas i rapporten, lärare 1, 2, 3, osv.

Bakgrund:

- Antal år som lärare
- Undervisar i

Hur väljer du ut vilka matematiska problem som ska användas i undervisningen?

Kriterier

- Förkunskaper (har ni tränat på lösningsmetoden/erna innan)
- Öppna, slutna
- Flera lösningsmetoder
- Komplexa
- Abstrakta, konkreta, vardagsanknutna
- Samarbete kring val av matematiska problem på skolan

Kan du ge ett exempel på ett matematiskt problem som du har använt i undervisningen? Hur arbetade ni med detta?

- Upplägg: Introduktion, genomförande, ev. diskussion (presenteras resultat eller lösningsmetod, olika uttrycksformer, representationer, vem presenterar lösning?), avslutning (summering?)
- Individuellt eller grupparbete, helklass
- Anpassning, förkunskaper

Hur länge arbetar ni generellt med ett och samma problem?

- Vad görs när någon bli klar tidigare? (fler lösningar, forsätta med annat, fortsätta med nytt problem)
- Vad händer när alla är klar förutom någon enstaka?

Har ni pratat om strategier och faser som man kan ha användning för i problemlösningsprocessen?

- Faser: förståelse för problemet, göra upp en plan för lösning, utför plan (kontrollerar steg) och kommer fram till en lösning, tillbakablick på lösningen och svarets rimlighet.
- Strategier, exempel: rita bild, diagram, jobba baklänges, konkreta exempel, enklare exempel

Vilken roll anser du att du har under lektionerna med matematiska problem?

- För elevernas förståelse
- Respons när eleverna behöver hjälp, exempel på respons (frågor?)
- Vid elevernas resonemang
- Diskussioner, vad görs vid fel lösningsmetod

Hur använder eleverna matematiska begrepp i arbetet med matematiska problem?

- Tas nya begrepp i problemlösningsprocessen (om ja, hur fungerar det?)
- Matematiska begrepp eller vardagliga begrepp

Ser du några fördelar och eller nackdelar med att arbeta med matematiska problem?

- För läraren
- För eleverna

Avslutning:

- Övriga tankar kring ämnet
- Tacka

10.2 Bilaga 2 - Informationsbrev till lärare

Undersökning om arbete med matematiska problem.

HÖGSKOLAN
DALARNA

Du tillfrågas härmed om deltagande i denna undersökning. Jag heter Sandra Blom och studerar på lärarprogrammet med inriktning F-3. Jag har tidigare gjort en systematisk litteraturstudie om arbete med matematiska problem i geometri. Nu vill jag ta reda på vilka matematiska problem som används på skolan i den kommun jag har min VFU (verksamhetsförlagda utbildning) i. Syftet med detta examensarbetet är därför att undersöka vilka matematiska problem som används i undervisningen i årskurs 1-3 på dessa skolor. Vidare är syftet att ta reda på hur arbetet kring dessa problem går till och hur detta arbete kan utvecklas. Anledningen till att jag valt att fokusera på matematiska problem är för att dagens yrken efterfrågar fler anställda som kan klara av obekanta situationer och lösa komplexa problem med hjälp av kreativt och flexibelt tänkande. Färre yrken innebär att de anställda ska kunna lösa uppgifter av rutinkaraktär. I belysning av detta behöver skolan därför fokusera på att utbilda elever till problemlösare för det framtida yrkeslivet (Skolverket 2014, *PISA 2012 - Digital problemlösningsförmåga hos 15-åringar i ett internationellt perspektiv*, s. 7)
Samtliga lärare som undervisar i årskurs 1-3 på två skolor har tillfrågats om deltagande. Urvalet har skett genom att jag valt ut två skolor i en kommun. Du har blivit utvald eftersom du undervisar i årskurs 1-3 på någon av dessa skolor.
Du tillfrågas därför att delta i en intervju som kommer att ta cirka 45 minuter. Intervjun kommer att spelas in och transkriberas. Endast jag kommer att ha tillgång till inspelningen. Undersökningen kommer att presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna. Vid intresse av att ta del av det färdiga resultatet kan uppsatsen skickas via mejl. Namn på de intervjuade eller kommunen kommer inte att förekomma i uppsatsen. Ditt deltagande i undersökningen är helt frivilligt. Du kan när som helst avbryta ditt deltagande utan närmare motivering. Efter avslutat arbete kommer allt material som samlats in att makuleras.
Jag är väldigt tacksam för att ni tar er värdefulla tid till att bidra till mitt arbete.
Vid frågor eller fundering, hör gärna av dig till mig eller min handledare. Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga:

Student:	Handledare:
Sandra Blom	Eva-Lena Erixon
h12sanbl@du.se	eer@du.se
073-xxxxxxx	070-xxxxxxx

10.3 Bilaga 3 - Exempel på matematiska problem

10.3.1 Lucia-matte, årskurs 1

Rita och visa hur du tänker!

1. I ett Lucia-tåg fanns fyra Lucior. Varje Lucia har fem levande ljus i sin krona. Hur många ljus har de tillsammans?
2. Varje Luvia bär ett levande ljus i handen. Hur många ljus har varje Lucia?
3. Hur många ljus har alla Lucior tillsammans?
4. I Lucia-tåget går tio tärnor. Varje tärna har ett ljus i handen. Hur många ljus har tärnorna?
5. I Lucia-tåget finns fem stjärngossar. På varje strut finns tre stjärnor. Hur många stjärnor har stjärngossarna tillsammans?
6. Hur många levande ljus finns i Lucia-tåget nu?
7. Alla som är med ska få en lussebulle var. Hur många lussebullar går åt?
8. Alla får också två pepparkakor var. Hur många pepparkakor går åt? (Lärare 1, Skola 1)

10.3.2 Bedömning i matematik, arbetsområdet bråk, årskurs 3

Några problem från provet:

- Peter har åtta frukter i en skål. Hälften är bananer. En fjärdedel är äpplen och resten är kiwifrukter. Rita frukterna!
- Noa har 12 stycken leksaksbilar. Hans lillebror får låna en tredjedel. Hur många bilar leker han med själv? Rita gärna bilarna och ringa in!
- Katten Sessan har nyss fått fem ungar. Tre femtedelar av kattungarna är grå. En femtedel är svar och resten har färgen vit. Hur stor del av katterna är vita? Skriv i bråkform! Rita gärna katterna! (Lärare 5, Skola 3).