HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete 1 för Grundlärarexamen inriktning 4–6

Avancerad nivå

Matematiska samband i en algebraisk lärandemiljö

Studiens syfte är att undersöka om eleverna får djupare förståelse för matematik genom att arbeta med matematiska samband i en algebraisk lärandeverksamhet

Författare: Lennart Karlsson
Handledare: Eva-Lena Erixon
Examinator: Helen Sterner
Ämne/huvudområde: Matematikdidaktik
Kurskod:PG2070
Poäng:15hp
Examinationsdatum: 180903

Högskolan Dalarna – SE-791 88 Falun – Tel 023-77 80 00

Abstract:

Nyckelord:
matematiska samband, djupare förståelse av matematik, algebraisk lärandeverksamhet

Innehållsförteckning:

1. Inledning

Inom matematiken finns olika traditioner och Eriksson (2015, s 12–13) beskriver dessa kortfattat på följande vis. Utan att värdera eller rangordna dessa. Den aritmetiska traditionen innebär att eleverna tränas i att utföra aritmetiska räkneoperationer. En strukturell inlärning innebär att kunskaper ska konstrueras hos eleverna. Den problemlösande traditionen innebär att eleverna skaffar sig kunskaper genom att arbeta med problemlösningar och att använda *medierande redskap* som stöd i en algebraisk lärandeverksamhet (Eriksson ibid). I en australisk studie anser Ormond (2016, S. 122) att matematiklärare behöver lära sig mer om hur viktigt det är att undervisa om de breda sambanden inom matematiken, för *förståelse på djupet* och inte i isolerade fickor. När Larsson (2016, s. 25) beskriver *förståelse* av matematik är kunskap om *sammanfogning* av metoder och begrepp centralt. Kunskap om metoder innebär att utföra räkneoperationer steg för steg. Begreppskunskap beskrivs som att kunna sammankoppla olika kunskaper till ett nätverk av kunskap (Larsson ibid). Många forskare hävdar att de kompletterar varandra och att de arbetar dubbelriktat. En väl sammankopplad begrepps och metodkunskap ses som ett tecken för *djupare förståelse* i många sammanhang (Larsson 2016, s. 26).

När jag tänker tillbaka på min första kontakt med VFU klassen och matematik så arbetade eleverna med att nöta in multiplikationstabellen på tid. En del elever tyckte att det var roligt att tävla och triggade varandra att nå nästa nivå. Andra elever hade svårigheter och var kvar på de låga talen i tabellen. Den fråga som uppstår i efterhand är vilken *djupare förståelse* eleverna får för multiplikation och insåg de några *samband* med andra matematiska begrepp vid de här lektionstillfällena. Eleverna arbetade parallellt med tal i läroboken och även här var fokuset på att ha rätt och snabbt ta sig framåt. Vid en tillbakablick på min egen skolgång så lärde jag mig aldrig den fullständiga multiplikationstabellen. Jag tyckte det var så tråkigt, repetitivt och abstrakt med denna nötning av siffror.

Under matematikkursen på högskolan arbetade vi med en förklaring där a och b skulle förenklas och då plötsligt dök en rektangel upp för att illustrera detta och allt blev lättare att förstå. Detta att arbeta med rektanglar och kvadrater skulle kunna användas vid inlärning av multiplikationstabellen för att göra matematiken mindre abstrakt och belysa sambandet mellan multiplikation och area. Genom att kombinera olika begrepp belyses de *matematiska sambanden*. Eleverna kan också experimentera, utforska och resonera om dessa. Ett samband mellan aritmetik och geometri är multiplikationstabellen(multiplikation) och rektanglar även då kvadrater. Talet 6 *3 blir även en rektangel med sidorna 6 och 3 och arean 18. Kvadraterna blir extra intressanta då 7*7=49. Det blir då naturligt att diskutera kvadrattal och se samband till talserier där kvadrattalen finns såsom 4,9,16,25,49. Skolverket beskriver i en av förmågorna i syftet att eleverna ska kunna analysera och använda matematiska begrepp och *sambanden emellan dessa* (Skolverket 2011, s. 48).

I sin didaktiska forskning beskriver Eriksson (2016) en *algebraisk lärandeverksamhet* med medierande redskap. Eleverna arbetar med *problemlösningar* där manipulerande av längder, volymer och areor är centralt. En grundbult i denna lärandeverksamhet är att eleverna behöver komma i kontakt med matematikens natur för förståelse och för att se sambanden (Eriksson ibid). Vidare beskriver hon att eleverna löser problem och reflekterar över hur de nådde sina lösningar med hjälp av algebraiska symboler och medierande redskap till exempel olikfärgade stavar (Eriksson 2015, s. 12–13). Detta låter som intressant undervisning att pröva i klassrummet i kombination med att belysa och resonera om matematiska samband. Skolverket (2017, s. 5) skriver i syftet på sitt kommentarmaterial att *problemlösning* är ett kreativt moment som skall genomsyra matematikundervisning och vara en återkommande del av elevernas matematiska vardag. Eleverna ska kunna både formulera egna problem och känna tillfredställelsen av att hitta lösningar och diskutera processen dit (Skolverket ibid).

Teorin om att underlätta inlärning av matematik genom att åstadkomma samband mellan olika matematiska delar och verkligheten är ett vedertaget och erkänt arbetssätt (Turner 2015, s. 51-52). Här menar Turner (ibid) att inom samma svär av förståelse genom samband att det verkar logiskt att anta att matematiska *kunskaper på djupet* uppstår i sinnet på eleven när ett samband görs mellan annars isolerade begrepp eller fragmentariska mentala eller fysiska händelser *inom* matematiken (Turner ibid). Han skriver att eleverna säger ibland, när ska vi ha användning för det här? Det kan bero på att eleven inte förstått *sambanden inom* matematiken, utan det läraren säger är irrelevant frånkopplat jidder (Turner ibid).

Skolverkets kommentarmaterial (Skolverket (2017, s. 5) trycker på att problemlösning ska vara en av hörnstenarna i undervisningen vilket det inte alltid levs upp till i skolan idag. Problemet som *kan* uppstå vid undervisning av *övervägande* aritmetisk tradition är att om inte eleverna får resonera om matematiska samband och processen vid arbete med olika typer av problemlösning kan de komma att sakna *djupare förståelse* för matematiken. Vilket Turners (2015, s. 51–52) beskrivning om eleven som frågar när ska vi ha användning för det här, också *kan* vara en indikation på. Denna studie vill undersöka om eleverna får *djupare förståelse* för matematiken genom att arbeta aktiv med *matematiska samband* i en *algebraisk lärandeverksamhet*. Tanken är att bidra till den didaktiska forskningen och den lärandeverksamhet som Eriksson beskriver i sin forskning.

2. Syfte med frågeställning

Syftet med den här studien är att undersöka om eleverna får *djupare förståelse* för matematiken när de arbetar aktivt med *matematiska samband* i en *algebraisk lärandeverksamhet.* Dessa samband kommer att belysas i designade lektioner. Eleverna kommer att arbeta med multiplikationstabellen och sambandet som kommer att belysas är mellan begreppen multiplikation och area.

Får eleverna *djupare förståelse* för matematiken genom att arbeta med *matematiska samband* i en *algebraisk lärandeverksamhet?*

3. Bakgrund

I denna bakgrund kommer relevanta delar ur kursplanen för matematik samt kommentarmaterialet från skolverket att redogöras. Vidare följer en beskrivning av olika traditioner inom matematikundervisning. Under rubriken *matematiska samband* återfinns forskning och vetenskapliga artiklar som belyser detta begrepp. Därefter följer ett avsnitt som sammanfattar olika synvinklar på *djupare förståelse* av matematik. Under rubriken inlärning av matematik beskrivs olika teorier kring detta. Avslutningsvis följer ett avsnitt som summerar olika insikter vid arbete med multiplikationstabellen.

3.1 Kursplanen och kommentarmaterialet

En av förmågorna i kursplanen för matematik är att kunna följa och föra resonemang om matematik (Skolverket 2011, s. 47–48). Att arbeta med samband mellan begrepp och att analysera och använda dessa beskrivs som en av förmågorna som undervisningen syftar till. Den ska också stimulera eleverna att formulera och lösa problem och kunna värdera och reflektera över dessa (Skolverket ibid). I syftet på skolverkets kommentarmaterial ifrån förra året trycks det på vikten av att arbeta med problemlösning på ett övergripande plan som en av hörnstenarna inom matematiken (Skolverket 2017, s. 5). Eleverna ska kunna både lösa problem, konstruera egna och kunna beskriva processen fram. Matematiska samband omnämns också i syftet som en del av den estetiska matematiken. Skolverket skriver att uppleva samband mellan olika delar av matematiken utan att behöva direkt ha användning av det praktiskt är en del av den matematiska skönheten (Ibid). När eleverna arbetar med matematiska problem är det uppgifter som inte har en uppenbar, direkt lösning. Vid arbete med dessa tvingas eleverna att pröva och undersöka sig fram till lösningen till skillnad mot rutinuppgifter (Skolverket 2017, s. 7). I undervisningen skall eleverna ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda och analysera samband mellan begrepp. Detta omfattar kunskap om begrepp och samband emellan dessa. Det omfattar också användande av begreppen och deras samband (Skolverket 2017, s. 8).

3.2 Olika traditioner angående matematikundervisning

En kortfattad beskrivning av den aritmetiska traditionen innebär att eleverna tränas i aritmetiska operationer (Eriksson 2015, s. 12–13). Vid en strukturell inlärning skall förståelsen och kunnandet i matematik konstrueras hos eleverna. Piagets teori menar att eleverna lär sig genom individuella tankekonstruktioner av psykologisk natur Den problemlösande traditionen innebär att eleverna genom deltagande i problemlösningsuppgifter med stöd av medierande redskap skaffar sig kunskaper. Van Oers beskriver matematikämnet som ett ämne som framför allt handlar om problemlösning med symboliska verktyg. Denna tradition stämmer överens med den algebraiska lärandeverksamhet Davydov förespråkar i sitt perspektiv. Lektionerna syftar till att främja deltagandet hos eleverna i det Vygotski beskriver som utveckling av teoretiska begrepp (Eriksson 2015, s. 12-13).

Vid en jämförande studie mellan den amerikanska läroplanen baserad på aritmetisk tradition och Davydovs läroplan framkommer häpnadsväckande skillnader (Schmittau & Morris 2004, s. 60-61). I Davydovs läroplan används relationer mellan mängder, area, längder, volym och vikt som utgångspunkt vid inlärning av matematik. Studier av algebra föregår studier i aritmetik. Algebra utvecklas genom utforskandet av relationer mellan kvantiteter. Den aritmetiska förståelsen av användandet av siffror och olika operationer på dessa är också sprungna ur relationer mellan kvantiteter som en logisk utveckling på dessa. Davydovs metod syftar först och främst till att utveckla elevernas kognitiva förståelse (ibid).

Läroplanen består av noggrant utvalda problem som utgör en progressiv sekvens. Eleverna blir presenterade för problemen som de förväntas att lösa ett i taget. Problemen presenteras inte didaktiskt, bryts inte ner i mindre delar och eleverna får inte några tips på lösningen (Schmittau & Morris 2004, s. 62). Förutom problemen som kommer i en progressiv serie finns ingenting att läsa. Läroplanen i det tredje året består av 900 uppgifter. Läraren presenterar innehållet i problemen och eleverna ges inte ett rätt eller fel utan skall snarare lära sig att argumentera för sin sak utan att bli påstridiga. Vygotskys och Lurias tes är att lärande uppstår när vi ställs inför problem vid vilka våra tidigare metoder är otillräckliga för att lösa. Sålunda består Davydovs Läroplan av denna serie av noggrant utvalda problem (ibid). Dessa gör att eleverna utvecklar sina metoder steg för steg eller utmanar de att se på sina tidigare metoder på ett nytt sätt, för att förstå de teoretiska begreppen till fullo. Ännu viktigare är att deras konstanta användande av dessa processer utvecklar deras förmåga att analysera problem på en teoretisk basis snarare än empirisk och forma teoretiska snarare än empiriska generaliseringar, vilket är det utmärkande draget i Davydovs arbete (ibid).

Det första eleverna gör i Davydovs modell är att dra två lika långa linjer, detta för att representera egenskaperna för något som är lika långt (Schmittau & Morris 2004, s. 63). De drar sedan två linjer som är olika. Eleverna lär sig sedan att använda stor bokstav för att representera en kvantitet hos ett objekt och att använda tecknen lika med, inte lika med, större än och mindre än. Därefter jämför de till exempel brädor och som de ger bokstavsnamn A och B (algebraiska symboler). De utvecklar sin modell genom att använde tecknen för att visa vilka förhållandena det är mellan brädorna. Eleverna använder inga siffror utan A representerar den omätta längden av brädan(ibid).

3.3 Matematiska samband

Ormond (2016, s. 122) anser att matematiklärare behöver lära sig mer om hur viktigt det är att undervisa om de breda sambanden inom matematiken, för *förståelse på djupet* och inte i isolerade fickor(ibid). Vidare skriver hon att arbeta kontinuerligt i klassrummet med mönster och samband är en större utmaning än att arbeta kontinuerligt med den strukturella matematiken (Ormond 2016, s. 131). Även de enklaste matematiska uppgifterna innehåller olika typer av samband inom olika idéer av matematiken (Turner 2015, s. 51–52). När läraren har en gedigen ämnes grund att stå på kan denne använda och understryka samband i klassrummet genom väldesignade lektioner och projekt. Läraren kan själv använda sin kreativitet för att

exemplifiera och arbeta med matematiska samband. Denna illustration påvisar att arbeta med matematik inte är en enkelspårig rak process. Studenter skall alltid känna att misstag och prövande av olika strategier är en del av vägen framåt. De skall vara medvetna om att presentationen av uppgiften sker efter en hård, slitsam process av individuellt och kollaborativt utforskande (Turner ibid). Dessa enkla samband kan vara mellan multiplikation och area. Lektionen designas för att arbeta med multiplikationstabellen och belysa sambanden. Turner(2015,s.61) skriver att arbeta med samband *inom* matematiken överbryggar matematiska områden, belyser och ger klarhet till matematiken och ger eleverna en djupare förståelse (Turner ibid). Ormond (ibid) poängterar att i läroplanen är ofta den strukturella matematiken väl beskriven, sammanhang och *samband* inte är lika framträdande. Den kompletterande utbildningsenhet hon har skapat är framtagen för att stötta och undervisa i de matematiska sambanden. Den är i huvudsak designad för att lärarna ska ställa effektiva frågor till sig själva och eleverna. Det är fyra didaktiska frågor och den som är intressant i detta perspektiv är frågan: vilka samband och mönster innehåller denna matematik (ibid).
Teorin om att underlätta inlärning av matematik genom att åstadkomma samband mellan olika matematiska delar och verkligheten är ett vedertaget och erkänt arbetssätt (Turner 2015, s. 51-52). Här menar Turner (ibid) att inom samma svär av förståelse genom samband, verkar det logiskt, att anta att matematiska kunskaper på djupet uppstår i sinnet på eleven när ett samband görs mellan annars isolerade begrepp eller fragmentariska mentala eller fysiska händelser *inom* matematiken (Turner ibid). Han skriver att eleverna säger ibland, när ska vi ha användning för det här? Det kan bero på att eleven inte förstått sambanden *inom* matematiken, utan det läraren säger är irrelevant frånkopplat jidder (Turner ibid). Rhorer, Didrick & Burgess (2013, s. 2-3) belyser att genom att interfoliera, skjuta in olika matematiska begrepp i elevernas tester, istället för att arbeta enbart med ett område i taget blockvis nåddes effektivare undervisning. Detta sätt att arbeta kan enkelt implementeras i undervisning och läroböcker (ibid).

3.3 Elevers förståelse av matematik

Elevers *djupare förståelse* för matematik är av central vikt i denna studie, här följer en sammanfattning. Att förstå matematik har blivit beskrivet som att sammanfoga kunskap om metoder och matematiska begrepp (Larsson 2016, s. 25). Dessa begrepp är en utveckling av Skemps urskiljning instrumentell och relationell kunskap. Det råder viss oenighet runt dessa och vilken kvalité de representerar. Kunskap om metoder innefattar att kunna utföra räkneoperationer steg för steg i en algoritm, kunskap om begrepp beskrivs som sammankopplad med andra kunskaper som ett nätverk av kunskap. Det har lett till att metodkunskap betraktas som av sämre kvalité, med det sagt, kan även denna kunskap vara av god kvalité och väl sammankopplad i begreppen och andra metoder. Kvalitén på kunskap ligger snarare i att ha mer och välorganiserad kunskap om samhörigheten (Larsson ibid). Ett flertal forskare hävdar att dessa kompletterar varandra och detta sker dubbelriktat (Larsson 2016, s. 26). Detta innebär att både begreppskunskap och metodkunskap är beroende av varandra för att kunna befästas och bli djupare. När eleven arbetar med en metod som en räkne operation i en algoritm så förstås principerna på ett djupare plan och

när detta sker stärks kunskapen om metoden. En väl sammankopplad begrepps och metodkunskap ses som ett tecken för *djupare förståelse* i många sammanhang(ibid).
Det finns både empiriska bevis och teoretiska antaganden att olika typer av representationer är centralt för förståelsen av metoder och begrepp (Larsson 2016, s. 26-27). De fyller en viktig roll i uppbyggnaden av förståelsen av begreppen både internt och externt. Dessa representationer blir också ett nav i diskussioner runt begrepp och metoder. Externa representationer är öppna och ses av alla däremot interna är personliga och individens egen visuella lagring av begreppet (Larsson ibid). *Förståelse* kan ses som en förmåga att se *samband* mellan olika typer av kunskap (Larsson 2016, s. 27). Denna *förståelse* uppnås genom *resonerande*. Just *resonerande* är ett stort matematiskt forskningsfält inom matematisk utbildning. Det finns olika sätt att beskriva denna kunskap. Ett sätt är att kunna göra generaliseringar och bygga upp argument för dessa. Ett annat sätt är att kunna följa en *röd tråd i elevens tankebanor* vid problemlösning. I dessa tankebanor finns antaganden som till slut blir till en slutsats. När *resonerande* sätts i ett bredare spektrum så innebär förmågan att oavsett uppgift kunna *resonera* sig fram till en slutsats (ibid). Vid denna studie blir det högsta fokus på att få fatt i *elevernas resonerande om de matematiska sambanden* för att tolka vilken *djupare förståelse* de uppnår.

3.4 Teorier angående inlärning av matematik

En teori som talar för inlärning genom repetitivt tränande av multiplikationstabellerna är associationsteorin från 1922. Thorndike menar att lärandet inte sker genom insikter och nyskapande utan är ett resultat av träning. Denna teori ligger kvar som grund till den undervisningen som syftar till att lära sig tabellerna utantill och snabbt kunna svara rätt (Ahlberg 1995, s. 18). Inom behaviorismen är teorin att elevernas inlärning sker i små steg genom positiv förstärkning och snabb återkoppling för att bekräfta kunskaperna. I undervisningen ställs lätta frågor som eleverna får omedelbar respons på. Denna typ av undervisning ligger till grund för mycket arbetsblad och material (Ahlberg 1995, s. 23). Multiplikationstabellen lämpar sig för denna typ av inlärning. Forskarna Alan Schoenfeld och Frank Lester (Ahlberg 1995, s. 28) menar att det väsentliga i matematikundervisningen är att eleverna utvecklar sina metakognitiva färdigheter och lär sig använda olika lösningsstrategier. När eleverna står inför ett matematiskt problem krävs det att de har en förmåga att utnyttja sin befintliga kunskap effektivt och att de tänker flexibelt. Även deras syn på matematiken och sig själva är avgörande för tillvägagångssättet. Dessa faktorer parat med goda ämneskunskaper krävs för att eleverna ska utveckla sitt matematiska tänkande menar forskarna i sin teoretiska forskningsinriktning human information processing från 1985 (ibid).

3.5 Insikter vid arbete med multiplikationstabellen

I läromedel presenteras ofta multiplikation som en upprepad addition i uppgifterna. Detta är en vidareutveckling från tiden när multiplikation inte förklarades alls, räkne drillen med tabellerna startade på en gång (Johnsen Høines 2000, s. 173–174).

Läromedelstillverkarna har insett vikten av att veta vad multiplikation är och när det
används. Utöver detta så råder det inga tvivel om att eleverna bör kunna tabellerna, däremot är det upp till varje lärare att känna av när de ska börja drillen och kräva att eleverna kan de (ibid). Magne (1998, s. 237) lyfter fram att fel som är vanliga eller rentav vanligast enligt en klassisk undersökning är när faktorn noll är med. Felet beror på att nollan är diffus för eleverna och beror på bristande taluppfattning (Magne ibid). Formell matematik är en kulturprodukt och den har en viss vardagsanknytning. Multiplikationstabellen har också en sådan koppling. Genom att återkommande åskådliggöra multiplikation med hjälp av olika modeller, lär sig barnen de logiska kärnmetoder som ligger till grund för multiplikation (Magne 1998, s. 240). En sådan metod är nätmetoden där barnen till exempel ställer upp pjäser i en rektangel med färdiga rutor. Under dessa förhållanden kan barnen studera rektangeln från olika håll. Detta arrangemang kan göra att ett ljus går upp för de som redan undervisats i multiplikation och division. Denna sortens lärandeverksamhet och påföljande prat ger barnen tillfälle att resonera om språkliga uttryck i skolmatematiken (ibid). Läraren kan ge extra uppmärksamhet till kvadraterna. Eleverna kan klippa ut kvadrater med olika skidlängder och tabellinlärandet kan exemplifieras med 8*8=64 (Magne 1998, s. 242).

4. Teoretiskt ramverk

I detta stycke beskrivs det perspektiv som valts, lärandeverksamhet, för att designa lektionerna i studien. Repkin beskriver att målet för en lärandeverksamhet är inte en yttre produkt utan en förändring hos eleven som en agent av aktiviteten (Eriksson 2015 s. 37).

4.1 Val av teoretiskt ramverk

I algebraisk lärandeverksamhet lär sig eleverna matematikens teoretiska begrepp genom att använda algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap i en lärandeverksamhet. Detta sagt med Vygotskys definition av empiriska och teoretiska begrepp (Eriksson 2015 s. 37). Detta arbetssätt lämpar sig mot bakgrund av det syfte studien har och den forskarfråga som ställts.

4.2 Verksamhetsteori och didaktisk inriktning

I detta avsnitt sammanfattas kort den verksamhetsteori som ligger som grund för lärandeverksamhet samt den didaktiska inriktningen lärandeverksamhet.
Den verksamhetsteoretiska traditionen har ett sociokulturellt fokus och anser även att kulturhistoriska handlingar är av största vikt för mänskliga handlingar (Eriksson 2015, s. 37). Teorin är grundad i Vygotskys kulturhistoriska skola. Dessa kulturhistoriska aspekter återfinns i såväl det innehåll som fokuseras som i den verksamhet där innehållet gestaltas. Verksamhetsteoretikerna Vygotsky och Leontiev anser att allt mänskligt handlande styrs av behov som bottnar i sociala, kulturella och historiska verksamheter och dessa ses som nödvändiga för mänsklig

utveckling. I denna studie gäller de kulturhistoriska aspekterna för det lärandeobjekt som fokuseras och den *verksamhet* där lärandeobjektet gestaltas(ibid).

Lärandeverksamhet

Kärnan i lärandeverksamhet är Vygotskys arbeten och tankar om hur lärande går till (Eriksson 2015, s. 38). Lärandet sker genom att eleverna deltar i matematikpraktiker. I dessa praktiker används specifika kulturella redskap för mediering. Det centrala i en lärandeverksamhet är att lärandet förstås genom medierande handlingar via medierande redskap. Vygotsky menar att en lärandeverksamhet syftar till att lära ut teoretiska begrepp. Den undervisningspraktik som Leontiev beskriver är att deltagarna deltar i tidigare generationers kollektiva kunnande genom de specifika redskap som tas i bruk. I en sådan verksamhet innebär deltagandet att teoretiska begrepp utvecklas mellan och inom deltagarna (ibid).

Teoretiska och empiriska begrepp

Empiriska och teoretiska begrepp skiljs ifrån varandra (Eriksson 2015, s.38–39). Empiriska begrepp uppfattas perceptuellt av eleverna i stunden i den vardagliga verksamheten genom deltagande i utvecklande spontana aktiviteter. I dessa aktiviteter sker interaktioner och kultur och historia skapas fortlöpande. Teoretiska begrepp är abstrakta vilket innebär att de inte kan upplevas med våra sinnen. Davydov hävdar med stöd i detta faktum att teoretiska begrepp måste utvecklas via medierande redskap som kopplas till teoretiska modeller. Utvecklingen av dessa teoretiska begrepp är centralt för det fortsatta lärandet (ibid)**.** Dessa begrepp kan utvecklas inom ramen för lärande verksamheten enligt följande. Det teoretiska, abstrakta begreppet för att beskriva en cirkel kan innebära att eleverna börjar med att urskilja en punkt, vilket en linje omgärdar som har exakt samma avstånd till mittpunkten. Denna konstruktion medierar ett kunnande till eleverna om det teoretiska begreppet cirkeln och dess grundläggande funktioner radie, mittpunkt, diameter och omkrets. Det empiriska begreppet kan eleverna hitta konkreta exempel på i verkligheten. Sådana exempel kan vara cykelhjul, klocka, botten på ett glas i princip oändligt många (Ibid).

Lärandeuppgift

När eleverna ska gå in i arbetet med en uppgift måste de ha ett motiv (Eriksson 2015, s. 40). Det är grunden för att utveckla en lärandeverksamhet. Kunnandet som eleverna ska erfara måste sedan konstrueras i uppgifterna. Eleverna utvecklar sedan ett kunnande genom att identifiera problemets art och lösa det på olika sätt. På detta sätt utvecklas en lärandeuppgift. Lärarens design av lärandeuppgifterna är avgörande för det kunnande som behövs. För att designa uppgifter kan läraren ställa frågor som besvarar varför behövs ett specifikt kunnande och hur har ett specifikt kunnande utvecklats. Genom att förändra lärandeuppgifterna som skall gestaltas och lösas i verksamheten finns möjligheten att förändra lärandeverksamheten (ibid).

Lärandehandlingar

När elever och lärare arbetar med att lösa ett problem eller en uppgift utförs specifika handlingar i lärandeverksamheten (Eriksson 2015, s. 40. Handlingarna följer ett mönster vilket möjliggör lösandet av en lärandeuppgift. Först görs en analys av problemets natur. Sedan formuleras villkor för hur vi tillsammans förstår problemet. Därefter analyseras de matematiska redskap om behöver utvecklas. Som en modell för lösningen på problemet konstrueras en generell beskrivning. Därefter bedöms om lösningen är trovärdig. Avslutningsvis utvärderas modellen för problemets lösning. Eleverna måste få utrymme att delat i dessa lärandehandlingar för att detta ska betraktas som lärandeverksamhet. Lärandehandlingar utvecklar elevernas kunnande och förmåga att reflektera (Ibid).

Reflektion

En lärandeverksamhet kräver att eleverna reflekterar över sina egna och kamraternas lösningar (Eriksson 2015, s.41–42). Davydov samt Kozulin och Zuckerman samt Kinard menar att detta med reflektion är en grundläggande mänsklig förmåga. Denna förmåga kan eleverna utveckla genom att delta i diskussioner angående problem i uppgifter för att synliggöra motiv, mål och mening med en verksamhet. När eleverna reflekterar över sina kamraters uppgifter tar de en annan människas perspektiv och försöker förstå och reda ut hur dessa har tänkt. Detta att kunna ta en annan människas perspektiv vid reflekterande är en del av en sociokulturell lärandeverksamhet (Eriksson ibid).

4.3 Medierande redskap

Det centrala i lärandet i lärandeverksamheten kan förklaras med att bli förtrogen med specifika medierande redskap i aktiva processer (Eriksson 2015, s.42). Forskare menar att det inte är tillräckligt för eleverna att dessa endast presenteras. För att eleverna ska kunna få denna förtrogenhet krävs att de möjliggörs att ta bruk av dessa relevanta ämnesspecifika redskap vid problemlösning. Eleverna kan sedan med stöd av redskapen utveckla modeller som synliggör kunnandet. Dessa redskap innehåller generationers kunnande lagrat vilket inte skulle var möjligt att förstå utan att använda dessa. För utvecklandet av en lärandeverksamhet blir det därför avgörande *att* dessa medierande redskap etableras och *hur* de etableras. Dessa redskap kan vara av fysisk art eller kommunikativa och utgör då guidning via språket. Dessa redskap möjliggör teoretiskt arbete när nya modeller och redskap utvecklas (ibid).

Symboler

De symboler som enligt Kinard och Kozulin har medierande betydelse av matematiska begrepp kan beskriva kognitiva jämförelser, kvantiteter, operationer och representationer (Eriksson 2015, s.42–43). Dessa symboler kan vara algebraiska

A, B, C, numeriska 1,2,3 vara i form av tecken =, <,>, . Symbolerna kan också utgöras av färger, en tom ruta eller prickar etcetera. Dessa symboler måste representera ett visst kunskapsinnehåll för att utgöra ett medierande redskap med ett specifikt innehåll (ibid).

Generella modeller

Algebraiska symboler används för att utveckla modeller i en algebraisk lärandeverksamhet (Eriksson 2015, s. 43). Dessa modeller synliggör ett specifikt kunnande. Denna utveckling är en del i ett teoretiskt arbete. En växelverkan mellan empiriska och teoretiska begrepp är nödvändig för att dessa modeller ska belysa de teoretiska begreppen. Dessa modeller kan ses som broar mellan det konkret empiriska och det abstrakta. Elevernas deltagande i utvecklingen av modellerna är avgörande för deras teoretiska begreppsbildning (ibid). I denna algebraiska lärandeverksamhet används redskapsmedierande handlingar för att belysa och undersöka teoretiska begrepp (Eriksson 2015, s. 6). Ett exempel på sådana begrepp är areor och multiplikation. Detta går med enkla medel att arbeta med i klassrummet i en algebraisk lärandeverksamhet. När eleverna analyserar och resonerar under lektionerna kommer de *matematiska sambanden* aktivt att belysas med hjälp av den fråga som Ormond (2016, S. 122) definierade. Vilka *matematiska samband* ser eleverna i uppgifterna?

5. Metodansats och teori

I detta avsnitt motiveras och beskrivs den vetenskapsteori och metodansats som valts och utgör grunden i denna studie. Därefter följer det metodval som gjorts och motivering av valet.

5.1 Fenomenografi som forskningsansats

Fenomenografi är en kvalitativ metod och dess huvudsyfte är att ta reda på hur människor uppfattar fenomen i sin omvärld (Kihlström 2007, s. 157). Dessa uppfattas olika av olika människor. Det fenomenografiska sättet att undersöka

omvärlden handlar om hur den ter sig inte hur den faktiskt är. Detta kallas det andra ordningens perspektiv. Första ordningens perspektiv innebär att beskriva omvärlden som den är. Det ena utesluter inte det andra och båda kan var sanna eller falska. I fenomenografi sätts människors tankar i centrum. Syftet är att finna variationer och systematisera människors erfarenheter av olika fenomen (Kihlström ibid). Utgångspunkten i fenomenografisk ansats är att människor upplever företeelser olika och dessa framträder på olika sätt. Resultatet av dessa kvalitativt olika tankar blir forskningsresultat och dessa formas till kategorier representerade av olika utsagor (Kihlström 2007, s. 158). I denna studie kommer en kvalitativ ansats att krävas för att undersöka syftet. Syftet är att undersöka om eleverna genom att arbeta
aktivt med *matematiska samband* i en *algebraisk lärandeverksamhet* får en *djupare förståelse* för matematiken. Deras matematiska resonemang är väsentligt att analysera för att kunna tolka deras förståelse. I fenomenografi handlar det ytterst om

att empiriskt studera hur en grupp människor begriper eller erfar ett fenomen i omvärlden (Kihlström 2007, s. 160). Detta gör att fenomenografi lämpar sig för att analysera elevernas resonemang. Data till denna analys kan ske genom intervjuer, self reports, observationer, teckningar med mera (Ibid). Då kan den första tanken vara att intervjua elever (Davidsson 2007, s. 70–71). Ett annat sätt att få information på är att undersöka fenomenet via text. Eleverna blir ombedda att skriva en text som fokuserar på det fenomen som ska undersökas i studien (Davidsson ibid).

5.2 Metodval

Den kvalitativa analysen syftar till att ringa in karaktären eller egenskapen hos ett ting. Den kvantitativa tar reda på mängden av en egenskap eller karaktär hos tinget (Malmqvist 2007, s. 123). Det som särskiljer är att den kvalitativa analysen syftar till att urskilja variation, struktur och process i den urskilda företeelsen (ibid). Syftet med studien är att ta reda på om eleverna får en *djupare förståelse* för matematik när de arbetar aktivt med matematiska samband i en algebraisk lärandeverksamhet vilket är en process. Därav blir datainsamlandet av kvalitativ natur. I denna studie är valet att eleverna ska skriva egna texter så kallade self reports (Davidsson 2007, s. 71). Då har det stor betydelse hur frågeställningen formuleras eftersom det inte går att ställa några följdfrågor som vid en intervju. Frågan ska formuleras så att informanternas erfarenheter, upplevelser och uppfattningar fokuseras i frågan. Därefter uppmanas personen att så noggrant som möjligt beskriva sina upplevelser, bra och dåliga i samband med fenomenet (Davidsson ibid). Det som talar för self reports är att informanten ges tid att besvara frågeställningen, vilket är av betydelse för berättelsens djup och innehåll. I en intervjusituation kan intervjuaren påverka svaren (Davidsson 2007, s. 72).

Referenslista:

Ahlberg, Ann (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Davidsson, Birgitta (2007). Self report- att använda skrivna texter som redskap. i J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik* (ss. 157-173). Stockholm: Liber AB.

Eriksson, Helena (2017). *Designing Algebraic Tasks for 7-Year-Old Students – a Pilot Project Inspired by Davydov's Learning Activity Concept* Artikel i: Journal for Mathematics Teaching and Learning : Vol. 18.2, 257 – 272

Eriksson, Helena (2016). *Hur lång är en stav?* Artikel I: Pedagog Stockholm. Senast uppdaterad 3 oktober 2016. Tillgänglig: http://pedagog.stockholm.se/stockholm-teaching-and-learning-studies/hur-lang-ar-en-stav/

Eriksson, Helena (2015). *Rationella tal som tal, algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.* Licentiatuppsats. Rapporter i matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik. Nummer 6

Johnsen Høines, Marit (2000). *Matematik som språk.* Stockholm: Liber AB.

Kihlström, Sonja (2007). Fenomenografi som forskningsansats. i J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik*. Stockholm: Liber AB.

Larsson, Kerstin (2016). *Students' understandings of multiplication*. Printed in Sweden by Holmbergs, Malmö.Distributor: Department of Mathematics and Science Education

Magne, Olof (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.

Malmqvist, Johan (2007. Analys utifrån redskapen. i J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik*. Stockholm: Liber AB.

Ormond, Cristine. (2016). *Scaffolding the Mathematical "Connections": A New Approach to*
Preparing Teachers for the Teaching of lower secondary algebra. Australian Journal of Teacher Education Volume 41 | Issue 6 Article 8

Rohrer Dough, Dedrick Robert F, Burgess Kaleena. (2013). *An Efficacy Study of Interleaved Mathematics Practice*. University of South Florida

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.* Stockholm: Skolverket

Schmittau, Jean & Morris, Anne (2004). *The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov*. The Mathematics Educator 2004, Vol.8, No.1, 60 - 87

Turner, Paul. (2015). *Making connections*. Australian Senior Mathematics Journal vol. 29 no. 2