HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete (del 2)
för grundlärarexamen inriktning F–3

Avancerad nivå

Elever pratar matematik, men hur?

En kvalitativ studie om elevers argument i ett matematiskt resonemang

Författare: Johanna Rosén
Handledare: Helena Eriksson
Examinator: Anna Teledahl
Ämne: Pedagogiskt arbete, inriktning matematik
Kurskod: APG246
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 211107

Högskolan Dalarna – SE-791 88 Falun – Tel 023-77 80 00

Abstract:

Studiens syfte är att undersöka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang vid lösandet av en problemlösningsuppgift i årskurs 1. För att undersöka detta har en undersökning av kvalitativ ansats med observation som metod genomförts på en grundskola i Mellansverige. Enligt tidigare forskning finns fyra typer av argument i ett matematiskt resonemang som alla bygger på varandra i en viss ordning och hänger ihop som en kedja. Resultatet av denna studie visar att argumenten inte bygger på varandra i en viss ordning utan kommer utifrån vad tidigare elev har sagt. Bland annat återfinns ett identifierande argument i mitten av ett resonemang och inte i början så som tidigare forskning påstår. Resultatet visar även att eleverna är multimodala vid lösandet av problemet och använder sig av gester, kroppsspråk och symboler för att förstärka eller visa sina argument i resonemanget. Studien har även kommit fram till att valet av uppgift vid problemlösning är av stor vikt då symbolerna som är tänkta att underlätta problemet för eleverna kan göra så att eleverna tolkar uppgiften på ett annat sätt och på så sätt avviker från problemets kärna.

Nyckelord:

matematiska resonemang, argument, identifierande argument, strategival, implementerande argument, evaluerande argument

Innehåll

1. Inledning

Forskning inom matematikdidaktik visar på att elevers problemlösningsförmåga utvecklas när de löser uppgifter där de inte vet uppgiftens lösningsmetod i förväg, det vill säga problemlösning. Ett exempel på en undervisningssituation som främjar elevers kreativitet och problemlösning är uppgifter där lösningsmetoden inte är känd. Detta betyder att eleven inte ska välja en förutbestämd metod när uppgiften ska lösas utan eleverna får själva undersöka och lösa problemet på egen hand (Lithner 2008, s. 266).

I syftesbeskrivningen i matematik från läroplanen står det att undervisningen ska syfta till att eleverna utvecklar förmågan att föra resonemang (Skolverket, 2019, s. 54). Ett matematiskt resonemang är uppbyggt av flera olika typer argument, de olika typerna av argument bygger på att det finns ett kollektivt agerande i lärandesituationen (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3). För att kunna lösa en problemlösningsuppgift krävs att eleven ges möjlighet till att kunna resonera. Om eleven ska kunna resonera behövs det ett socialt sammanhang där eleven får motivera sina resonemang samt att eleverna engagerar sig i problemet (Eriksson, 2021, s. 73). Ett matematiskt resonemang bygger på fyra olika steg i lösandet av uppgiften vilka kan ha ett argument kopplat till sig. Dessa fyra steg är, möte med uppgiften (identifierande argument), val av strategi (strategival), användande av strategi (implementerande argument) samt slutsats (evaluerande argument) (Lithner, 2008; Eriksson, 2021).

Men vad innebär det att föra ett resonemang och hur utvecklas det när elever i lågstadiet arbetar med problemlösning? Återfinns alla typer av argument i alla matematiska resonemang? Detta problem är inte helt tydligt och framskrivet inom forskningen vilket gör det intressant att utforska i ett examensarbete. Detta då det ger en större förståelse för elevernas lärprocess vid undervisningen i matematik. Denna studie kommer att fördjupa sig i frågan genom syftesformuleringen som följer nedan:

2. Syfte

Syftet med denna studie är att undersöka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang vid lösandet av en problemlösningsuppgift.

2.1 Frågeställning

Vilken typ av argument går det att identifiera i elevers matematiska resonemang när de löser en problemlösningsuppgift i årskurs 1?

3. Bakgrund

Uppsatsens bakgrund redogör för de begrepp som är centrala för studien, dessa är; problemlösning, matematiska resonemang samt argument. Bakgrunden redogör även för delar av kursplanen i matematik som är relevant för studien.

3.1 Problemlösning

Problemlösning är ett centralt begrepp inom matematiken men det finns fler olika definitioner av vad problemlösning är (Taflin, 2007, s. 36). Niss och Højgaard (2019, s. 15) skriver att problemlösningsförmågan inom matematik innebär att eleven kan relatera till och ställa frågor utifrån det matematiska problemets karaktär. De menar även att förmågan att identifiera, formulera samt lösa matematiska problem med hjälp av matematikens områden ingår i ett matematiskt resonemang. Samtidigt som Taflin (2007, s 21) definierar problemlösning som en uppgift som inte är av standardtyp för eleven och kräver att eleven kan tolka problemet och veta vad som ska lösas. Hon skriver vidare att för att en matematisk uppgift ska räknas som ett problem måste eleven vilja lösa problemet utan att ha en känd lösning och behöver göra särskild ansträngning för att hitta lösningen (Taflin 2007, s. 21). Det är således själva processen som är viktigt vid matematisk problemlösning och målet för problemlösning är att eleven med hjälp av matematiska resonemang ska kunna dra logiska slutsatser om matematiska idéer och samband (Taflin 2007, s. 110). Taflin (2007, s. 41) menar även att problemlösning ska utveckla elevernas kunskaper om problemet som leder vidare till att eleven automatiserar sina kunskaper.

Lithner (2008, s. 261) menar att behovet av att rättfärdiga sina lösningar är en social norm där berättigandet och hur det tar sig i uttryck är en sociomatematisk norm och det är inom ramarna för dessa som problemlösningsmöjligheterna uppstår. Detta betyder att när den sociala normen är att motivera sina resonemang gör eleven det automatiskt utan att lärare behöver uppmuntra till detta. I ett sociomatematisk sammanhang betyder det att eleven för ett resonemang där den berättigar sina val den gör vid lösningen av problemet. Bergqvist (2006, s. 22) definierar problemlösning som ett arbete med en uppgift där lösningen inte är känd för eleven i förhand. Eleven skapar ny kunskap utifrån sin tidigare matematiska kunskap genom problemlösning och skapar så sätt nya erfarenheter för att lösa problemet.

Sammanfattningsvis är definitionen av problemlösning något som skiljer sig mellan olika forskare. I denna studie definieras problemlösning av att eleven i förväg inte känner till lösningsmetoden och får således undersöka det matematiska problemet. Problemlösning ska utveckla elevernas matematiska kunskaper om problemet som leder vidare till kunskapsskapande samt att problemlösning är en socialprocess där eleven behöver rättfärdiga sina lösningar (Lithner, 2008, s. 261).

3.2 Matematiska resonemang

Enligt Bergqvist och Lithner (2012, s. 253) kan ett resonemang ses som en tankeprocess eller produkt av en tankeprocess eller båda. Lithner (2008, s. 258, 265) menar att det finns uppgifter som främjar ett *kreativt resonemang* (CMR) och uppgifter som är mer imitativa. Imitativa uppgifter innebär att eleven imiterar en redan förutbestämd strategi. Imitativa resonemang kan delas upp i olika underkategorier så som memorerande resonemang och *algoritmiska resonemang* (AR). Denna studie kommer att begränsa sig genom att ta upp algoritmiska resonemang samt kreativa matematiska resonemang. Nedan följer en genomgång av de olika begreppen.

3.2.1 Algoritmiska resonemang

Ett algoritmiskt resonemang (AR) bygger på en förutbestämd lösning, det vill säga att eleven inte behöver skapa en ny lösning för att kunna lösa uppgiften. Det är de olika delarna av en strategi som eleven ska minnas och kunna redogöra för. Det går ofta att se olika lösningar i förväg och eleven vet vad den förväntas göra i uppgiften (Lithner, 2008, s. 259). Ett exempel på detta kan vara när elever får i uppgift att lösa arean på en triangel och har regeln b*h/2 att förhålla sig till men förstår inte innebörden av regeln. Lösningen kräver att eleven räknar rätt och inte gör några misstag i uträkningen. Om ett misstag görs går det inte att lösa uppgiften och eleven står svarslös.

3.2.2 Kreativa resonemang

Uppgifter som kräver kreativa resonemang bygger på att eleverna själva får undersöka möjliga metoder för att lösa en uppgift (Lithner, 2008, s. 265). Det finns fyra kriterier som ett resonemang måste uppfylla för att definieras som kreativt. Dessa är:

1. *Något nytt*- det vill säga att eleven kommer på en egen lösning och inte är en kopiering av tidigare inlärda metoder.
2. *Flexibilitet* - eleven kan anpassa sig efter uppgiften och situationen som uppgiften kräver.
3. *Rimlighet* - eleven kan svara för om lösningen är rimlig och kan även svara på varför den är det eller varför den inte är det.
4. *Matematiskt grundad* - elevens lösningar är matematiskt grundade (Bergqvist, 2006, s. 17; Lithner 2008, s. 266).

Sammanfattningsvis så finns det, enligt Lithner (2008 s. 258, 265) två typer av matematiska resonemang, antingen kreativa eller imitativa. De kreativa matematiska resonemangen (CMR) kräver att eleverna själva bygger en lösning som för dem tidigare varit okänd. Medan ett algoritmiskt resonemang (AR) bygger på att eleven kommer ihåg och använder sig av en redan kändlösningsmetod. Detta kräver inget eget resonemang från eleven.

3.3 Argument

Enligt Toulmin (2003) är argument något som bygger på varandra och förhåller sig till varandra genom fyra komponenter, slutsats, data, garanti och stöd. Dessa komponenter kan ändras utifrån argumentets karaktär vilket i sig kan ändras utifrån de andra komponenterna. Nordin (2016, s. 55) menar att ett argument är ett skelett som bygger på argumentets kärna där minst tre komponenter som Toulmin nämner är delaktiga. Det betyder däremot inte att kopplingen mellan dem är lätt att hitta om inte argumentet bryts ner och analyseras.

Lithner (2008, s. 260) föreslår att ett argument består av analys, utformning och planering vid lösande av matematiska problem. För att kunna klassas som argument krävs att eleven förstår egenskaperna i uppgiften, förstår utformning för att överväga om resultatet är användbart och planerar för att se om tillvägagångssättet leder till en lösning. Utöver detta behöver argumenten implementeras för att se om lösningsstrategin behöver omprövas. Bergqvist och Lithner (2012, s. 253) menar att det finns två olika typer av argument:
Förutspående argument vilka formuleras innan slutsatsen kan dras.
Verifierande argument som används vid bekräftande av gissningar och kan sedan komma att förklara och presentera slutsatser.

Enligt Sumpter (2016, s. 162) är ett argument den del av resonemanget som innehåller grundad fakta för att övertyga eleven eller andra om att resonemanget är riktigt, men det betyder inte att ett argument är ett resonemang. Resonemang är uppbyggda av olika typer av argument. För att urskilja uppgiften eller problemets kärna finns en kedja av argument som karakteriseras av, val av strategi, implementerande samt evaluerande argument. Sumpter skriver vidare att ett argument behöver inte alltid vara baserat på logik eller vetskap, det betyder att ett argument fortfarande kan vara ett argument trots att det är felaktigt. Eriksson (2021, s. 68) menar att det finns fyra typer av argument i kollektiva lärprocesser, dessa är identifierande argument, initierande argument, implementerande argument och utvärderande argument.

I en empirisk analys av samtal i ett matematikklassrum där samtalet utvecklades till att bestå av de olika delarna för ett matematiskt resonemang beskriver Eriksson och Sumpter (2021, s. 14) att det finns identifierande argument vilket är kopplat till strategival. Implementerande argument vilket är kopplat till *varför* samt evaluerande argument som kopplas till förhållandet till problemets egenskaper som definieras av tal, variabler och funktioner.

Sammanfattningsvis så är ett argument den del av resonemanget som innehåller grundad fakta för att övertyga eleven om att resonemanget är riktigt. Ett argument behöver inte vara rätt för att kunna användas (Sumpter, 2016, s. 162). Eleven behöver förstå problemet, överväga om resultatet är användbart och planera lösningssättet för att se om det leder till ett resultat (Lithner, 2008, s. 260).

3.4 Styrdokument

I kursplanen för matematik framgår att undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik samt tilltro till sin matematiska förmåga (Skolverket, 2019, s. 54). Undervisningen ska även bidra till att eleverna analyserar och värderar valda strategier, metoder för att kunna lösa och formulera problem samt utveckla elevernas förmåga att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang (Skolverket, 2019, s. 54). Eleven ska efter avslutad årskurs 3 kunna samtala och resonera kring matematiska uttrycksformer, kunna välja strategier utifrån uppgiftens utformning samt kunna beskriva tillvägagångssätt och samtala om resultatets rimlighet utifrån metod (Skolverket, 2019, s. 59).

Sammanfattningsvis så är ett av skolans huvuduppdrag att främja elevers kunskapsutveckling och lust att lära. Eleverna ska ges möjlighet att utveckla sin förmåga att argumentera och föra logiska resonemang (Skolverket, 2019, s. 54). Skollagen föreskriver att utbildningen inom varje skolform och inom fritidshemmet ska vara likvärdig, oavsett var i landet den anordnas (Skolverket, 2019, s. 6). Detta för att elever ska få en så likvärdig utbildning som möjligt. Ovanstående delar är viktiga för studien då de behandlar vilka förmågor som matematikundervisningen ska syfta till att utveckla med hjälp av undervisningen.

4. Tidigare forskning

I detta avsnitt presenteras tidigare forskning. Avsnittet redogör hur tidigare forskning har sökts. Därefter redogörs den sociala aspekten av ett matematiskt resonemang genom möjligheter till resonemang. Tidigare forskning menar att det finns fyra typer av argument som återfinns i ett matematiskt resonemang, dessa är; *identifierande argument, strategival, implementerande argument* samt *evaluerande argument.* vilka kommer beskrivas i denna del.

4.1 Litteraturstudie

Till litteratursökningen för studien användes Högskolan Dalarnas sökmotor Summon. De första sökorden var ”mathematic reasoning” och ”problem solving”. Detta ledde till träffar på Lithners (2008) artikel om CMR. Vid läsande av forskning om AR och CMR utvecklades ett intresse för elevernas argument. En ny sökning genomfördes via Summon och Google Scholar, denna gång söktes det på ord som

”argument” och ”strategy”. För att minimera antalet träffar vid sökningarna användes en utsållning för den forskning som var peer-reviewed och fanns i fulltext.

4.2 Möjlighet till resonemang

Sumpter och Hedefalk (2015, s. 3) undersöker den sociala aspekten av ett argument. De menar att styrkan i samtalen kring argumentation och resonemang ger fokus på data, analys, motivation och argumentation vilket ses som en kollektiv process och inte som ett enskilt skeende. De skriver om antagande kring elevers inlärning och att de sker i deltagandet med andra för att kunna skapa ordning i verkligheten. Sumpter (2016, s. 159) menar att lärare ges möjlighet att identifiera elevernas olika typer av argument i ett resonemang när eleven behöver motivera de val de har gjort vid lösningen av ett problem.

När eleverna motiverar sina resonemang för andra får de även en möjlighet att se samband i sina argument vilket ger dem en möjlighet att skapa kreativa matematiska resonemang. Vilket i sin tur kan skapa nya argument (Eriksson & Sumpter, 2021, s. 14). Elevers initiativ till att introducera och implementera modeller i sina argument ökar ju mer de får träna på att resonera, vilket visar att både lärare och elever behöver träna på att använda argument och matematiska resonemang under kollektiva lärtillfällen (Eriksson, 2021, s. 74, Skolinspektionen 2014, s. 27-28). När lärandesituationen tillåter kan eleverna ställa frågor till varandra och reflektera på varandras svar som kan öppna upp för resonemang och göra att eleverna engagerar sig i problemet (Eriksson, 2021, s. 73).

Enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 7) bygger elevers matematiska resonemang på *en matematisk grund*, *användandet av argument* samt *lärarens roll*. Vilket gör att elevens meningsskapande är en del av ett kollektivt matematiskt resonemang. Detta betyder att eleverna använder den omgivande miljön som ett verktyg i att skapa matematiska resonemang och argument. Ett argument kan uppkomma ur olika situationer då de ibland utmanas eller ifrågasätts samt att det finns situationer när argumenten stödjer på varandra. Sumpter och Hedefalk (2015, s. 8) kom fram till att eleverna inte behöver en lärares handledning eller en organiserad aktivitet för att skapa matematiska resonemang utan att matematiska resonemang kan ske i stunden vid lek.

Sammanfattningsvis har forskning visat att elevernas resonemang bygger på det kollektiva samtalet mellan både elever och lärare (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3). Forskningen säger vidare att elever och lärare behöver träna på att argumentera för att skapa resonemang (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 7). Genom att eleven ges möjlighet till att resonera matematiskt uppstår argument både med och utan lärares inverkan.

4.3 Identifierande argument

Det är den matematiska uppgiftens egenskaper som avgör innehållet i ett identifierande resonemang (Eriksson & Sumpter 2021, s. 14). Ett identifierande resonemang karaktäriseras av frågan *vad handlar den här uppgiften om?*. Detta argument ser olika ut för olika typer av strategier vilka alla bygger på den grundläggande frågan i uppgiften. Eriksson och Sumpter menar att en förståelse för denna typ av fråga till uppgiften kan vägleda lärare och elever när de för kollektiva matematiska diskussioner och kan således leda fram till CMR. Det är inte nödvändigt att det är läraren som initierar denna fråga utan den kan likväl ställas av elever. Enligt Lithner (2008, s. 260) behövs ingen argumentation om uppgiften förstås i läsfasen, i annat fall undersöks uppgiften genom argument med hjälp av analys och utforskning.

Eriksson (2021, s. 66) upptäckte en ny typ av argument, det identifierande argumentet. Det är det första steget i lösandet av en uppgift i det sociala samspelet mellan elev-elev och inte mellan elev-lärare. Eriksson (2021, s. 68) skriver vidare att eleverna ges möjlighet till identifierande argument genom de kollektiva matematiska resonemangen och de arbetssätt som ett kollektivt matematiskt resonemang innebär.

Sammanfattningsvis är ett identifierande argument det första steget i lösandet av en uppgift i en social lärsituation (Eriksson & Sumpter, 2021, s. l). Vilket hjälper eleven att förstå uppgiftens problem och leder framåt till strategivalet (Eriksson & Sumpter, 2021, s. 15).

4.4 Strategival

Bergqvist och Lithner (2012, s. 253) påstår att strategivalet kan variera utifrån två typer av argument: förutspående argument*: varför **kommer** denna strategi att lösa uppgiften*? samt verifierande argument*: varför **löste** strategin uppgiften*?.

Bergqvist och Lithner (2012, s. 254) menar att det är en social norm att elever förväntas motivera sina lösningar. Ett resonemang måste vara förankrat i ett argument som är relevant för de matematiska egenskaperna i uppgiften. Dessa tar sin grund i objektet, transformationer och begrepp för att slutligen resultera i data. Den grundläggande enheten är objektet av vad som görs med siffror, variabler och så vidare. Transformationen görs mot objektet, ett resultat och begreppet tar sin form i resultatet som sedan blir ett nytt objekt. Detta gör att ett resonemang som koncept kan fortsätta i oändlighet (Bergqvist & Lithner, 2012, s. 254.). Men Bergqvist och Lithner (2012, s. 266) menar att även om CMR skapar ny kunskap vid strategivalet så finns det inte alltid krav på kreativ reflektion i samband med strategivalet.

Sumpter (2016, s. 167) menar att fokus på strategival och slutsatser gör det möjligt att kategorisera olika typer av resonemang och att strategivalen är olika för olika problemlösningsuppgifter. Vilket betyder att en elev inte kan använda samma typ av argument för lösning vid olika typer av uppgifter. Dock kan en analys av elevers argument hjälpa till att förklara och förutspå elevens beteende vid lösningssituationen.

Sammanfattningsvis finns det två typer av argument när det kommer till strategival. Dessa är förutspående argument som kännetecknas av frågan *varför **kommer** den här strategin lösa uppgiften?* och verifierande argument som kännetecknas av frågan *varför **löste** strategin uppgiften?*. Ett resonemang måste vara förankrat i ett argument som är grundat på det matematiska problemets egenskaper. Det är även valet av strategi som transformerar teori till kunskap men detta leder inte alltid till kreativ reflektion vid användandet av förutspående argumentation.

4.5 Implementerande argument

För att kunna implementera strategivalet är som ovan nämnts ett verifierande argument av vikt då det handlar om lösningen av uppgiften (Eriksson, 2021, s. 17). Bergqvist och Lithner (2012, s. 257) menar att argument består av specifika karaktärer. För att kunna göra en skillnad på olika argument behövs en tydliggörande fråga om vilket argument det handlar om. Frågan som ett implementerade argument behöver svara på är *varför löste den här strategin problemet?* (Eriksson, 2021 s. 17). Bergqvist och Lithner (2012, s. 255) menar att argumentation finns vid lösandet av uppgifter men att det inte alltid är nödvändigt. Det beror på om strategivalet och implementeringen är rätt.

Sammanfattningsvis är ett implementerande argument det som verifierar valet av strategi och driver lösandet av uppgiften framåt (Eriksson, 2021, s. 17).

4.6 Evaluerande argument

Ett arguments karaktär avgör om det är förutsägande eller verifierande och då handlar det om argumentations strategi som nämnts ovan (se avsnitt 4.3). Ett evaluerande argument fokuserar på vilket sätt slutsatsen tar sig an uppgiftssituationen samt hur väl *aspekterna* uppfyllts genom analys av lärandesituationen (Bergqvist & Lithner, 2012, s. 256, Eriksson & Sumpter, 2021, s. 14). Det avslutande argumentet svarar enligt Eriksson (2021, s. 17) på frågan *svarade den valda strategin på uppgiften?*.

Motivering är det som legitimerar resonemanget. Det betyder att det backar upp vad som är tillåtet i det matematiska resonemanget och ger övertygelse om att lösningen är den rätta, vilket även inkluderar argumentation och slutsatser (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3 - 4). Sumpter och Hedefalk (2015, s. 6) skriver vidare att tidigare forskning har dragit slutsatser om att matematiska resonemang främst är kopplat till muntliga språkkunskaper men i deras studie visar resultatet att barn både stödjer och bestrider argument både verbalt och med konkret material. De menar att elever använder verktyg både för att utforska och stärka sina resonemang och slutsatser. Genom att titta på argumentets olika egenskaper finns det belägg för att slutsatser kan både ifrågasätta och ifrågasättas. Enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 4) kan argument riktas och vara en del av en process när eleverna löser matematiska problem.

Bergqvist och Lithner (2012, s. 257) skriver att eleverna själva inte behöver bedöma och utvärdera om de använder sig av CMR och att det inte kan krävas av eleverna att de ska förstå skillnaden mellan AR och CMR. Eleven använder sina metakognitiva förmågor så som frågor, analys, utforskning och korrigering av misstag eller ej lösningsbara strategier. De verifierar och utvärderar den valda strategin utifrån lösningen på det matematiska problemet. Detta går i linje med Sumpters (2016, s. 162) resultat i sin studie om matematiska resonemang. Det hon fann i sitt resultat var att argument kan kopplas ihop som en kedja av resonemang som leder till en accepterad slutsats för uppgiften som sedan kan leda till ett nytt argument.

Sammanfattningsvis är ett avslutande argument det argument som svarar till lösningen på uppgiften (Eriksson, 2021, s. 17). Detta behöver inte betyda att uppgiften är korrekt löst utan även med ett felaktigt resultat kan ett avslutande argument leda tillbaka till ett nytt argument. I ett avslutande argument använder eleven både sina språkliga och kognitiva förmågor för att analysera resultatet av sitt resonemang (Bergqvist & Lithner, 2012, s. 257).

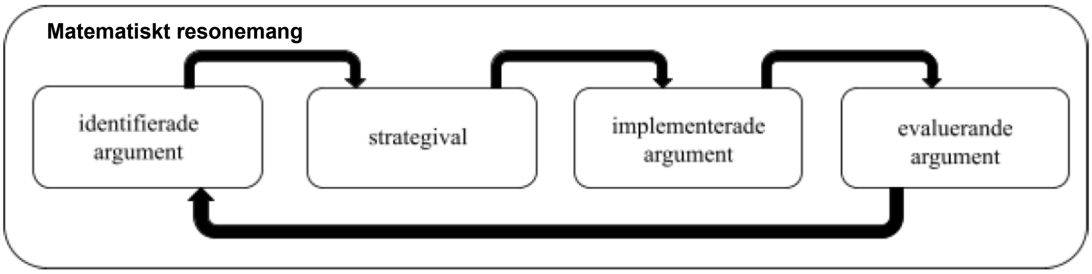
5. Teori

I denna del kommer studiens teoretiska ramverk att redogöras för. Då denna studie syftar till att undersöka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang kommer Lithners ramverk (2008) för matematiska resonemang att användas samt forskning gällande olika typer av argument.

Denna studie kommer att identifiera matematiska resonemang med hjälp av Lithners ramverk (2008, s. 257) av ett matematiskt resonemang vilka karaktäriseras av följande steg:

1. Möte med uppgiften
2. Val av strategi
3. Användande av strategin
4. Slutsats

Eriksson (2021, s. 79) kopplar olika argument till de olika stegen av ett matematiskt resonemang genom att hävda att i de kollektiva resonemangen förekommer argument som identifierar *(möte med uppgiften*), initierar (*val av strategi*), implementerar *(användande av strategin)* och evaluerar (*slutsats)*.



Figur 1.
Egen tolkning av Erikssons (2021) beskrivning av argument som förekommer i ett matematiskt resonemang.

Problemlösningsprocessen börjar med att eleverna möter uppgiften. I *mötet med uppgiften* upplever eleverna den antingen som problematisk eller ej. I detta steg använder eleven sig av ett identifierande resonemang vilken svarar till frågan: *vad handlar den här uppgiften om*? (Eriksson & Sumpter, 2021, s. 15). Om eleven känner igen uppgiftsmodellen väljer den en strategi för att kunna lösa problemet. Om eleven inte känner igen uppgiftsmodellen provar eleven olika strategier för att komma fram till en lösning (Lithner, 2008, s. 257). När eleven har identifierat om den har mött ett liknande problem eller om det är nytt för den väljs en strategi. Det kan vara allt ifrån att konstruera en ny strategi till att gissa och kan stödjas av argumentationen *varför **kommer** strategin att lösa uppgiften?* eller *varför **löste** strategin uppgiften*?. När eleven valt strategi används den för att se om uppgiften går att lösa vilket kan stödjas av implementerande argument *varför löste **den här** strategin problemet*, för att till sist komma fram till en slutsats, *svarade den valda strategin på uppgiften?* oavsett om eleven kom fram till ett rätt svar eller ej (Eriksson, 2021, s. 17).

6. Metod

I detta avsnitt kommer den valda metoden för studien att presenteras. Därefter följer urval till studien, genomförandet och analysmetod samt en redogörelse för studiens tillförlitlighet (reliabilitet) och trovärdighet (validitet). Slutligen redogörs de etiska ställningstaganden som gjorts för studien.

6.1 Val av metod

För att undersöka studiens frågeställning användes deltagandeobservation som metod (Larsen, 2009, s. 148). En deltagandeobservation innebär att observatören deltar vid observationstillfället men försöker att undvika att påverka det som observeras (Stukát, 2011, s. 51). Observation som metod är lämpligt när en process studeras (Eriksson Barajas, Forsberg, & Wengström, 2013, s. 132). Studien genomfördes i en årskurs 1 och dokumenterades med hjälp av ljudupptagning under observationerna. Detta då eleverna inte är vana att bli filmade under sina lektioner vilket kan enligt Stukát (2011, s. 50) störa dem i lösandet av uppgifterna och fokusera mer på inspelningen än själva uppgiften. Genom att använda sig av en ljudupptagningsutrustning är det möjligt att placera den nära eleverna utan att de behöver lägga så stor vikt vid den och kan således arbeta utan att störas av att bli observerade. Om eleverna känner sig bekväma i undervisningssituationen visar de sitt rätta jag till större del än vad de skulle göra om de blir obekväma med observationssituationen (Stukát 2011, s. 50).

Denna studie påbörjades innan Covid-19 och arbetet med att använda observation som metod redan var påbörjad. Därför fick studien fortsätta med det redan påbörjade arbetet istället för att ändra metod för studien. Att studien inte avslutades innan Covid-19 berodde på en paus i studierna på grund av föräldraledighet.

6.2 Urval

Nedan följer en beskrivning av urvalsprocessen vid val av skola, val av uppgifter samt val av analyserat resonemang.

6.2.1 Val av skola

Studien genomfördes på en skola i en mellanstor stad i Mellansverige där både flerspråkiga elever och elever med svenska som modersmål fanns representerade. Skolan valdes då den representerar hur det svenska samhället ser ut idag med sin mångkulturella blandning. Då denna studie vill undersöka elevers argument i ett matematiskt resonemang önskades en heterogen undersökningsgrupp. Eftersom studien genomfördes med elever som är minderåriga krävdes ett godkännande av vårdnadshavarna innan eleven kunde delta i studien. Informanterna till studien valdes utifrån ett systematiskt urval. Ett systematiskt urval innebär att deltagarna väljs utifrån förutbestämda kriterier för att öka möjligheten att få ett representativt urval ur populationen (Eriksson Barajas, Forsberg, & Wengström, 2013, s. 96). För denna studie innebar det att de deltagande eleverna skulle representera alla nivåerna från Skolverkets bedömningsstöd för årskurs 1. För att få denna information gjordes gruppindelningen i förväg med hjälp av klassläraren.

I klassen fanns 20 elever vars vårdnadshavare fått godkänna ett informationsbrev om elevens medverkade i studien (se bilaga 1). Av dessa tjugo elever var det arton vars vårdnadshavare godkänt elevens medverkan i studien och nio elever deltog i studien. Dessa nio elever valdes ut med hjälp av klassläraren innan observationerna skedde. De nio eleverna delades in i grupper om tre där alla nivåer från Skolverkets bedömningsstöd för årskurs 1 fanns representerade. Även denna indelning gjordes med hjälp av klassläraren. I varje grupp fanns även flera olika modersmål representerade. Då denna studie avser att undersöka vilka typer av argument som utvecklas i lågstadieelevers matematiska resonemang behövdes en blandad kunskapsnivå för att få en högre reliabilitet och spegla hur det ser ut i den svenska skolan idag. Genom att ha heterogena observationsgrupper gavs en större inblick i elevers matematiska resonemang. En elev för ett argument inom ett matematiskt resonemang oavsett kunskapsnivå (Lithner, 2008; Sumpter, 2016, s. 162). För att göra undersökningen lämplig för ett examensarbete och studiens frågeställning behövdes en begränsning göras för en rimlig analyssituation. Ett urval för att minska studiens omfång har gjorts via ett stickprov som representerar den svenska skolan idag.

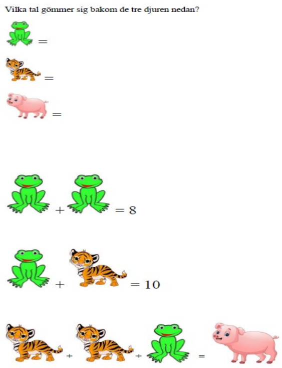
6.2.2 Val av uppgifter

Nedan följer en redogörelse för val av uppgifter och uppgifternas utformning. Uppgifternas lösningar är vad som benämns som för hela problemets lösning. En del av ekvationens lösning kommer att benämnas enligt den matematiska termen rot eller rötter (Bråting, Sollervall & Stadler 2017, s. 59).

Figur 2
Problemlösningsuppgift 1 till pilotstudien. Eleverna skulle dela in djuren i inhägnader med hjälp av raka linjer.

Vid det första tillfället för observationerna valdes en problemlösningsuppgift där eleverna skulle dela in djur i olika inhägnader genom att dra raka streck. Denna uppgift valdes utifrån att eleverna skulle använda förmågan ”använda matematikens uttrycksformer och för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” (Skolverket, 2019, s. 55). Eleverna tränade på att använda denna förmåga då de behövde avgöra om de hade rätt antal djur i inhägnaderna, om det var rätt antal inhägnader samt avgöra om de hade raka linjer för inhägnaderna. Enligt Bråting, Sollervall & Stadler (2017, s. 9) är det bra för elever om de får skriva och rita så att de kan förstå uppgiften lättare. Genom att prova flera olika lösningar kan det räcka med ett lyckat försök som leder till att problemet går att lösa. För denna uppgift behövde eleverna kunnande om geometri, aritmetik och algebra för att hitta mönstren som ledde till en möjlig lösning.

När det insamlade materialet skulle analyseras framgick att det var svårt att analysera elevernas resonemang. Detta då de resonerade och argumenterade med gester och tecken samt att deras talade resonemang mest bestod av ”om vi gör så” eller ”vi kan dra där”. Även men hjälp av fältanteckningar samt elevernas problemlösningsblad var det svårt att använda sig av resultatet. Elevernas arbete med denna uppgift visade sig kräva filmdokumentation eftersom de presenterade sina lösningsförslag med både gester, tal och skrivet språk. Enligt Nordin (2017, s. 41) uttrycker eleverna sitt matematiska kunnande i mer än bara skrift och rätt matematiska termer. Hon menar att om lärare ser till hela elevens kunnande och ger eleven möjlighet till att uttrycka sig multimodalt genom bilder, symboler, gester, kroppsspråk kan de tillsammans sätta ord på elevens kunnande och utveckla elevens matematiska språk. Detta ledde till en ny observationsdag med samma klass och samma elever men en ny uppgift mer lämpad för ljudupptagning (se nedan).



Figur 3
Problemlösningsuppgift 2. Elevernas uppgift är att undersöka vilket specifikt numerärt värde respektive djur representerar.

Den nya uppgiften fokuserade både på problemlösning, algebra, matematiska resonemang och argument. Denna uppgift valdes utifrån att eleverna skulle använda förmågan ”använda matematikens uttrycksformer och för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” samt föra och följa matematiska resonemang (Skolverket 2019, s. 55). Taflin (2007, s. 15) skriver att ett problem ska vara lätt att förstå för samtliga elever i klassen men ändå tillräckligt svårt för att skapa kreativa lärprocesser.

Utifrån dessa kriterier hittades nästa uppgift i samråd med klassläraren. Detta då denne hade kunskaper kring elevernas kunskapsnivå. Uppgiften fanns i ett av skolans materialskåp för matematik för lågstadiet. Uppgiften valdes då den ansågs ge ett rikare material då eleverna behövde vara mer verbala och använda fler ord än ”så och så” i sina argument för att lösa uppgiften. Eleverna behövde använda strategier för att lyckas lösa uppgiften och det fanns fler möjliga sätt för eleverna att komma fram till en godtycklig lösning på problemet. Eleverna behövde även ha kunskaper om addition, subtraktion, summa samt likhetstecknets betydelse för att kunna resonera kring hur de skulle lösa uppgiften. Detta är mål som återfinns i Skolverkets bedömningsstöd för årskurs 1 och något som eleverna ska lära sig under årskurs 1 vilket gör uppgiften till en utmaning för eleverna samtidigt som den ger en bra bild om var i sitt matematiska kunnande eleverna ligger på höstterminen i årskurs 1.

Uppgiften ökar i svårighetsgrad från den första ekvationen till den sista, detta då den första ekvationen har två lika symboler av samma karaktär som blir en summa. Den andra ekvationen har två olika symboler av olika karaktär som leder fram till en summa medan den tredje och sista ekvationen bygger på tidigare rötter och kunskaper som eleverna fått från de tidigare ekvationerna. I den tredje ekvationen skulle eleverna själva utifrån rötterna från de två tidigare ekvationerna komma fram till en summa som inte var given från början. I samtliga ekvationer behövde eleverna kunskaper om addition, subtraktion samt likhetstecknets betydelse. Det finns olika lösningsmöjligheter av ekvationerna beroende på hur långt eleverna har kommit i sitt matematiska kunnande om samband mellan addition och subtraktion.

För lärare är det viktigt att tänka igenom valet av matematiska uppgifter som eleverna arbetar med. Det ger eleverna möjlighet att fastställa relevanta matematiska egenskaper i uppgiften som de resonerar om och implementerar sin strategi (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3). När eleverna motiverar sina resonemang inför andra får de även en möjlighet att se samband vilket ger eleverna möjlighet att skapa kreativa matematiska resonemang och kan i sin tur skapa nya argument (Eriksson & Sumpter, 2021).

6.2.3 Val av citat

I analystabellen kommer inte hela observationstillfället med gruppen finnas med utan valda delar där eleverna har många argument som följer på varandra och är därför intressanta att analysera. I de valda resonemangen är det eleverna som för resonemanget och inte en vuxen. Detta för att tydligt få syn på vilka typer av argument som finns i elevers matematiska resonemang när de får undersöka lösningar på problem som analyserats som möjliga kreativa resonemang.

Efter att transkriberingen hade analyserats, färgkodats och förts in i analysschemat valdes ett resonemang från varje grupp. Dessa resonemang valdes utifrån hur aktiva eleverna var i sitt resonemang, hur många olika typer av argument det fanns, om eleverna höll med varandra i resonemanget eller om de argumenterade mot varandra. Tecknet /…/ innebär att det är en del som tagits bort då det har följt en lång diskussion är eleverna inte fört resonemanget framåt. Enligt Toulmin (2003, s. 87) framträder ett argument när det bryts ner och analyseras på detaljnivå. Detta görs genom att se argument utifrån fyra komponenter som samspelar med varandra: slutsats, data, garanti och stöd. Genom att se på argument och bryta ner dem till sin kärna kan samspelet mellan de olika komponenterna identifieras.

6.3 Genomförande

Den första observationen (pilotstudien) började med att läraren berättade att undersökningen skulle genomföras samt vilka elever som skulle delta i studien och att eleverna när som helst hade möjlighet att avbryta sitt deltagande i studien. De elever som deltog i studien gav sitt samtycke och stannade kvar i klassrummet. När endast de elever som skulle delta i studien var kvar visades problemlösningsuppgiften (se Figur 2). Uppgiften visades för eleverna och de fick instruktionerna upplästa då fokus för denna studie var elevernas problemlösningsförmåga inte läskunnighet. Enligt Taflin (2007, s. 219) är det viktigt att eleven inte fastnar på orden när uppgiften ska lösas. Lärarens roll var att bistå eleverna så att eventuella språkliga hinder kunde avvisas.

Därefter fick eleverna börja med uppgifterna. De fick 10 uppgifter som de fick lösa i vilken ordning de ville. Eleverna fick starta med uppgifterna och observationen började med den grupp som hade livligast diskussion. När ca 20 minuter hade gått bytte undersökaren grupp och observerade den i ca 20 minuter. När det var ca 20 minuter kvar gjordes bytet till sista gruppen. Efter avslutad observation när materialet skulle transkriberas och analyseras upptäcktes att materialet och fältanteckningarna var svåranalyserade då eleverna endast hade korta meningsutbyten och sa ”om man drar här och här, så blir det så”. Hade metoden varit observation med videoinspelning hade materialet kunnat användas men vid enbart ljudupptagning var det inte möjligt att få ut något material att analysera. Dessa tre observationer användes därför som pilotstudie och en ny algebraisk uppgift arbetades fram.

Vid den andra observationsdagen observerades återigen tre grupper med tre elever i varje grupp. Gruppindelningen av eleverna denna gång gjordes på samma sätt som inför den första observationen (se ovan). När det endast var de elever som skulle delta i studien kvar i klassrummet visades även denna gång uppgiften gemensamt. Denna uppgift (se Figur 3) innehöll inte lika mycket text som föregående uppgift men enligt uppgifter från läraren och lärdomar som dragits utifrån pilotstudien var det bra att förbereda eleverna på vad de skulle få göra istället för att låta dem vänta. Detta för att det inte skulle bli en massa frågor under arbetets gång med risk för att leda eleverna i lösandet av problemet. Varje observation följde samma arbetsgång där eleverna fick arbetsbladet och instruktionen uppläst ”vilket tal finns bakom djuret?”. Eleverna skulle alltså med hjälp av summan av en ekvation lösa uppgiften och ta reda på vilket tal som djuret representerade (se Figur 3). De fick även information om att de skulle försöka lösa uppgiften genom att prata med varandra och det gjorde ingenting om de inte kom fram till ett svar så länge de försökte berätta för varandra vad de gjorde och varför. När eleverna fått dessa instruktioner började de resonera och argumentera och försöka lösa uppgiften. Alla observationer varade i ca 20 minuter i Grupp 1, Grupp 2 och Grupp 3. Ibland ville eleverna ha hjälp och fick det i form av stöttande frågor. Det ställdes även frågor som ”vad tror du?”, ”hur tänkte ni/du nu?” till de elever som inte var delaktiga i lösandet av uppgiften. Enligt Taflin (2007, s. 159) är det viktigt att läraren kommer med hjälp och stöttning när eleverna är i behov av det.

6.4 Analysmetod

Följande analysmetod är uppbyggd utifrån bakgrund, tidigare forskning samt teorin som denna studie bygger på. Utifrån det teoretiska ramverket har en analysmodell konstruerats som redovisas nedan. Den första delen av analysen var deduktiv. Argumenten hittades i tidigare forskning och eftersöktes i det insamlade materialet. Medan den andra delen induktivt beskriver argumenten utifrån studiens resultat.

Analysmetoden påbörjades med att transkribera ljudupptagningarna från de olika observationerna. Transkriberingen skedde ordagrant men med hela ord, ej talspråk. Då några elever är flerspråkiga har deras argument transkriberats exakt så som eleven har sagt dem vilket innebär att vissa av citaten inte är grammatiskt korrekta. Detta för att inte påverka resultatet (Larsen, 2009, s. 156). I det fortsatta analysarbetet har transkriberingen sedan färgkodats utifrån fyra kategorier som alla symboliserar ett varsitt argument. Gult för *identifierande argument,* orange för *strategival,* grönt för *implementering,* blått för *evaluerande* och rött ifall det skulle ha funnits något argument som inte passade in i någon av ovanstående kategorier. Dessa kategorier kommer utifrån Erikssons (2021) avhandling om elevers utveckling i algebraiskt tänkande. Analysen skedde sedan i tre steg. Först färgkodades allt som sades utifrån de olika argumentens karaktärer. Vid fastställandet av identifierande argument söktes argument med karaktären *vad handlar den här uppgiften om*? (Eriksson & Sumpter, 2021, s. 15). För att hitta argument med strategivalskaraktär söktes argument som svarade mot frågorna *varför **kommer** denna strategi att lösa uppgiften*? samt *varför **löste** strategin uppgiften*? att sökas (Eriksson, 2021, s. 17). Implementerings argument karaktäriseras av frågan *varför löste **den här** strategin problemet?* (Eriksson 2021, s. 17). Den sista kategorien består av evaluerande argument, dessa svarade på frågan *svarade den valda strategin på uppgiften?* (Eriksson & Sumpter, 2021, s. 3).

Del av resonemang	Typ av argument	Stödfrågor
1. Möte med uppgiften	Identifierande	*vad handlar den här uppgiften om*?
2. Val av strategi	Strategival	*Förutspående:* *varför **kommer** denna strategi att lösa uppgiften*? *Verifierande:* *varför **löste** strategin uppgiften*?
3. Användande av strategi	Implementerande	*varför löste **den här** strategin problemet?*
4. Slutsats	Evaluerande	*svarade den valda strategin på uppgiften*

Tabell 1
Analysmodell i vilken de olika argumenten i ett matematiskresonemang har analyserats mot frågorna som de olika delarna av ett resonemang ställer.

Efter att ha färgkodat transkriberingen utifrån dessa frågor fördes resonemanget in i ett analysschema i kronologisk ordning (se Tabell 2). I analysschemat framgår vilken elev som talat, vad de sa, vilken typ av argument de förde samt stödjande fältanteckningar för att tydliggöra argumenten.

Vem	Exempel på elevernas resonemang ur den observerade lektionen	Typ av argument	Fältanteckningar

Tabell 2
Analysmodell i vilken de olika argumenten i ett matematiskresonemang i kronologisk ordning.

Resonemanget sattes in i analysmodellen för att tydliggöra elevernas argument i resonemanget. Därefter har typ av argument analyserats utifrån tidigare forskning och försökt förklaras utifrån de olika argumenten som återfinns där.

6.4 Validitet

Validitet är ett mätinstrument för att beskriva undersökningens kvalité (Larsen 2009, s. 40). Enligt Larsen (2009, s. 130) är det viktigt att undersökningsmetoden noggrant väljs och beskrivs för att kunna samla data. I denna studie användes observation som metod med ljudinspelning och transkribering samt fältanteckningar, vilket ansågs vara lämpligt utifrån studiens syfte och frågeställning då syftet är att undersöka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang. Data som samlas in under genomförandet måste vara relevant för att kunna ge svar på studiens syfte och frågeställning (Eriksson Barajas, Forsberg, & Wengström, 2013, s. 105). Eftersom studien hade för avsikt att undersöka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang vid lösandet av en problemlösningsuppgift var observation lämplig som metod. Observationen som metod kunde hjälpa till att besvara forskningsfrågan vilket visade sig vara möjligt då eleverna behövde utveckla många muntliga argument vid lösandet av problemlösningsuppgiften de ställdes inför. Metoden tillåter alltså att studera det forskningsfrågan efterfrågar.

6.5 Reliabilitet

För att en studie ska betraktas som pålitlig och tillförlitlig krävs att reliabiliteten diskuterar och eftersträvar en hög reliabilitet. Det innebär att samma undersökning kan upprepas på samma sätt vid flera tillfällen med liknande resultat (Eriksson Barajas, Forsberg, & Wengström, 2013, s. 103). Då denna studie är av kvalitativ ansats kan reliabiliteten diskuteras utifrån hur transparent undersökningen är eftersom resultatet kan komma att skilja sig från tillfälle till tillfälle samt från grupp till grupp. Reliabiliteten kan höjas vid noggranna transparanta analyser samt vid valet av uppgift. Problemlösningsuppgiften som valdes för studien möjliggjorde många muntliga resonemang för eleverna.

Reliabiliteten kan höjas genom att i observationsstudier använda sig av ljudinspelning vilket gjordes under denna studie (Kihlström, 2007, s. 231–232). För att höja reliabiliteten valdes även att alla kunskapsnivåer utifrån Skolverkets bedömningsstöd för årskurs 1 fanns representerade för att återspegla den svenska skolan idag. Ramverk som bygger på empiriska data från tidigare forskning ökar reliabiliteten. Ramverket som ligger till grund för denna studie baseras på argument som hittats i tidigare forskning, reliabiliteten i sin tur på att data sammanställts från flera olika tidigare studier såväl som prövades i detta sammanhang.

6.6 Etiska överväganden

Forskningskravet på en studie innebär att forskningen ska driva utvecklingen framåt och förbättra samhället (Vetenskapsrådet, 2017, s. 13). För att en studie ska vara etiskt godkänd ställs fyra krav, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2002, s. 6). Vetenskapsrådet (2017, s 41) har sedan uppdaterat dessa krav med anonymitetskravet vilket är relevant för denna studie. Informationskravet innebär att forskaren ska informera informanterna om studiens syfte (Vetenskapsrådet 2002, s. 7). Detta gjordes genom ett informationsbrev till vårdnadshavarna samt att eleverna informerades om att de skulle vara en del av en studie vid pilotstudien. Samtyckeskravet (Vetenskapsrådet 2002, s. 9) bäddades in i informationskravet då vårdnadshavarna godkände elevens medverkan i studien. I samband med både pilotstudien och datainsamlingstillfället fick eleverna information om att de kunde välja att inte medverka och att de när som helst kunde och kan avbryta sin medverkan i studien. Konfidentialitetskravet och anonymitetskravet går under samma kategori vid denna studie (Vetenskapsrådet 2017, s. 40 - 41). Det innebär att deltagarna i studien ska inte kunna gå att identifiera och att informationen kring dem är konfidentiell. Ingen förutom studenten vet vem som är vem i studien. Detta då eleverna som deltagit i transkriberingen döpts om till E1-E8. Anonymitetskravet säkerställs genom att inga namn är nedskriva i studien, varken vid transkribering eller vid publicering av resultatet (Vetenskapsrådet, 2017, s. 41). Det går heller inte att identifiera vilken skola som studien har genomförts på då det enda som är specificerat är att studien ägde rum i en årskurs 1 på en skola i Mellansverige. Den insamlade data fördes över från ljudinspelningsaparaten till ett USB-minne med hjälp av kablar. All insamlad data och arbete kring materialet har samtalats på ett USB-minne som vid arbetet med studien har kopplats till en lösenordskyddad dator. Efter att studien är avslutad och examensarbetet godkänt kommer allt material att raderas permanent. Nyttjandekravet innebär att den data som insamlades för studien endast används för studien och sprids inte vidare efter studiens slut (Vetenskapsrådet 2002, s. 14).

7. Resultat

Denna del redogör för resultatet. Resultatet redovisas i tre delar, en del för varje observationsgrupp där ett utvalt resonemang finns representerat. Resultatet för varje observationsgrupp finns sammanställt i varsin underrubrik för respektive grupp. Först under varje underrubrik finns en tabell med en del av ett resonemang som eleverna fört under observationen. Resonemanget är redovisat i kronologisk ordning så som det tog form i elevernas arbete med lösandet av problemlösningsuppgiften. I tabellens första kolumn ses **vem** det är som har sagt något. I kolumn två ges **exempel på elevernas resonemang under observationen** så som det blev sagt och visat av eleven, i den tredje kolumnen analyseras **typ av argument** utifrån argumentets karaktär. I den sista kolumnen finns stödjande **fältanteckningar** för att förtydliga vad eleverna säger utifrån deras kroppsspråk och gester. Efter varje tabell med resonemangen i kronologisk ordning följer en fördjupad förklaring av hur argumentet identifierats och vad resultatet innebär.

7.1 Grupp 1

I tabellen nedan presenteras resultatet av ett resonemang i Grupp 1. Det resonemang som utvecklades i Grupp 1 visar hur elevernas resonemang går från att arbeta med algebra till en ny möjlig lösning på problemlösningsuppgiften.

Vem	Exempel på elevernas resonemang ur den observerade lektionen	Typ av argument	Fältanteckningar
Elev 1 (E1)	Groda, groda vi börjar med grodan/…/	Identifierande argument	
E1	/…/Men det är inte siffror det är kilo! Titta det här är 2 kilo, det här är 10 kilo.	Identifierande argument	Pekar på tigern och menar på att det finns två tigrar och kopplar ihop det med summan av grodan och tigern som ska bli 10
Elev 2 (E2)	Det är inte kilo		
E1	Jo kolla det är 2 sen 2 sen 3	Implementering	Räknar alla tigrar som finns i problemet
E2	Jag tror det är 6 plus 4 blir och 6 plus 4 blir 10 För att det här väger 4 och den här väger 6.	Strategival	Pekar på grodan och tigern
E1	10	Slutsats	Eleven pekar på de båda tigrarna
E1	/…/ Nej vad då väger en gris, väger en gris mer än en tiger?	Implementering	Eleven pekar på den sista ekvationen där groda + tiger + tiger = gris och ifråga sätter om en gris är tyngst.
E1	Nej tillsammans är dom 20	Implementering	Pekar på tigrarna

E2	Alla tillsammans är 20	Slutsats	Pekar på grodan + tiger + tiger
E1	Nej dom båda tillsammans är 20, han är 4 och det blir tillsammans, dom blir tillsammans 30. Jag menar nånting med 20 jag vet inte vad	Implementering	Pekar igen på tigrarna
E2	Det är 10 kilo, då det blir 40	Slutsats	
E1	Nej det blir 30	Slutsats	
E1	/…/ 6 plus 6 plus är 12, 12 plus 4 är 16. Det är 16.	Implementering	
E1	Allt är rätt. Men jag tror det är kilo	Slutsats	

Tabell 3
Delar av resonemanget Grupp 1 hade vid lösandet av problemlösningsuppgiften.

Det resonemang som visas i tabellen är hur eleverna lämnar problemets kärna om att problemet handlar om vilket tal, det vill säga vilket specifikt numerärt värde respektive djur representerar till att fokusera på djurens vikt. Resonemanget innehåller de fyra argumentstyperna; identifierande argument, strategival, implementerande argument samt evaluerande argument.

7.1.1 Identifierande argument

Eleverna möter problemet i uppgiften när de får det och ser på den tillsammans. El tar första initiativet till att börja arbeta med uppgiften när den initierar ”*Groda, groda vi börjar med grodan*”. Eleverna arbetar med problemet när E1 efter en stund kopplar djursymbolerna till att problemet handlar om djurens vikt istället för djurens symboliska värde detta då eleven utbrister” *Men det är inte siffror det är kilo! Titta det här är 2 kilo, det här är 10 kilo*”. Där på följer ett resonemang i vilket E1 säger ”*Nej vad då väger en gris, väger en gris mer än en tiger?*”. Detta kan vara indikationer på att deras resonemang byter inriktning från djuret symboliska värde till att handla om djurens vikt i förhållande till varandra. Argumentet gör att eleverna ser på uppgiften på ett nytt sätt vilket leder till ett nytt resonemang och möte med uppgiften vilket leder till ett nytt identifierande argument.

7.1.2 Strategival

Eleverna använder sig av addition som strategi både när de försöker lösa problemet utifrån djurets symboliska värde samt när de utgår från att problemet handlar om djurens vikt i förhållande till varandra. I elevcitaten ovan syns när E2 blandar de båda typerna av strategier när den säger ”*Jag tror det är 6 plus 4 blir och 6 plus 4 blir 10. För att det här väger 4 och den här väger 6*”. Eleven fortsätter på det första resonemanget de har om att djuren symboliserar tal men avslutar argumentet med att problemet handlar om djurens vikt.

7.1.3 Implementerande argument

Vid implementeringen av strategin fortsätter eleverna att föra diskussionen fram och tillbaka angående huruvida djuren symboliserar tal eller djurens vikt i förhållande till varandra. De använder sig av både addition och uppskattning när de talar om djuren. Vid ett tillfälle säger E1 ”*Nej vad då väger en gris, väger en gris mer än en tiger*?”. I denna observation implementerar eleverna strategin vid flera olika tillfällen. E1 börjar implementera sitt resonemang om att uppgiften handlar om djurens vikt kopplat djursymbolerna istället för djurens symboliska värde genom att säga ” *Men det är inte siffror det är kilo. Titta här det är 2 kilo det här är 10 kilo*” samtidigt som den pekar på grodan och tigern vars motsvarighet på andra sidan likhetstecknet är 10. E2 kommer med ett motargument ”*Jag tror det är 6 plus 4 blir och 6 plus 4 blir 10. För att det här väger 4 och den här väger 6*.”. Eleverna använder ett förslag till lösning av ett strategival för att bygga på och argumentera för varför den föreslagna lösningen skulle kunna fungera.

7.1.4 Evaluerande argument

Under lösandet av problemet kommer eleverna fram till några slutsatser, vilka de argumenterar för i den typ som kan benämnas evaluerande argument. De fastställer vad de har kommit fram till under implementeringen av problemet, inte enbart i slutet utan dessa evaluerande argument utvecklas allt eftersom resonemanget fortgår. Det ses även att de evaluerande argumenten bygger på tidigare elevs argument. När E1 kopplar djursymbolerna till att problemet handlar om djurens vikt istället för djurens symboliska värde bygger det på *möte med uppgiften* som därefter leder fram till ett evaluerande argument. E2 motsäger sig E1s idé angående uppgiftens kärna men E1 visar sin idé genom att peka på antalet tigrar i uppgiften: *Men det är inte siffror det är kilo! Titta det här är 2 kilo, det här är 10 kilo. E2: Det är inte kilo. E1: Jo kolla det är 1 sen 2 sen 3”.* E1 fortsätter efter en stunds diskussion kring detta med att säga *E1: Nej vad då väger en gris, väger en gris mer än en tiger?* Eleverna börjar sedan implementera strategivalet utifrån det evaluerande argumentet E1 gör och uppgiften får på så sätt en ny vändning. De fortsätter sina resonemang med /…/ *E1: Nej tillsammans är dom 20. E2: Alla tillsammans är 20. E1: NEJ dom båda tillsammans är 20. Han är 4 och det blir tillsammans, dom blir tillsammans 30 jag menar nånting med 20 jag vet inte vad och den här grej. E2: Det är 10 kilo, då det blir 40. Nej det blir 30.* Det sista E1 säger när de har avslutat uppgiften och ha kommit fram till vilket tal djuren representerar är ”*6 plus 6 plus är 12, 12 plus 4 är 16. Det är 16. Allt är rätt. Men jag tror det är kilo”* vilket leder vidare till ett nytt resonemang trots att de har kommit överens om att de ha löst uppgiften när de kommit fram till att svaret är sexton.

7.2 Grupp 2

I tabellen nedan presenteras resultatet av Grupp 2. Detta resonemang visar en elevs resonemang vid lösandet av problemlösningsuppgiften.

Vem	Exempel på elevernas resonemang ur den observerade lektionen	Typ av argument	Fältanteckningar
Elev 4 (E4)	Titta här. 4 plus 4 är 8	Strategival samt Implementering	

E4	4+6 är 10	Implementering	
E4	6+6 är 12 plus 4 är 16	Implementering	
E4	Här står det lika med, då är det lika på båda sidor så här är det 16 och då det blir 16	Slutsats	Visar de andra likhetstecknet och att djuren på ena sidan måste vara lika med 16 som står på andra sidan.

Tabell 3
Resonemanget som Grupp 2 hade vid lösandet av problemlösningsuppgiften.

Det resonemang som visas i tabellen är en elevs lösande av uppgiften och de argument som resonemanget bygger på. Resonemanget innehåller tre av de fyra argumentstyperna vilka är; strategival, implementerande argument samt evaluerande argument.

7.2.1 Identifierande argument

I denna observationsgrupp ger E4 inte de andra eleverna någon chans att möta uppgiften innan den har förklarat sin tankegång och lösning för uppgiften. Utifrån detta ”behövde” inte gruppen något identifierande argument då E4 löste uppgiften vid första anblick. Eleven hade inte tidigare löst någon uppgift som denna men kunde snabbt se hur den skulle lösas. Då denna elev var snabb att berätta sin lösning för sina gruppmedlemmar fick inte de en chans att tänka ut en möjlig lösning eller ett resonemang för att försöka lösa uppgiften.

7.2. 2 Strategival

E4 har valt addition som strategi för att lösa uppgiften. E4 frågar inte de andra vad de tror eller om de har någon annan lösning utan löser uppgiften på egen hand utan att resonera med de andra eleverna. E4 använder sig av det matematiska problemets egenskap som är addition och transformerar det från teori till praktik och använder sig av verifierande argument för att bygga upp sin lösning.

7.2.3 Implementerande argument

Vid implementeringen av uppgiften använder sig E4 av en kedja av argument och bygger sin lösning på föregående argument med hjälp av addition och likhetstecknets betydelse.

7.2.4 Evaluerande argument

För att komma fram till det evaluerande argumentet och bekräftandet av att resonemanget stämmer använder sig E4 av förståelse för likhetstecknets betydelse. Under hela resonemanget använder sig eleven av likhetstecknets betydelse för att komma framåt i lösningen av problemet. Det är dock i sista meningen eleven uttryckligen säger att den ser till likhetstecknets betydelse: *E4: Titta här. 4 plus 4 är 8. 4 plus 6 är 10. 6 plus 6 är 12 plus 4 är 16 Här står det lika med, då är det lika på båda sidor så här är det 16 och blir det då 16.*

7.3 Grupp 3

I tabellen nedan presenteras resultatet av Grupp 3. Detta resonemang visar hur två elever för varsitt resonemang och har två olika typer av strategival vid lösandet av problemlösningsuppgiften.

Tabell 4

Vem	Exempel på elevernas resonemang ur den observerade lektionen	Typ av argument	Fältanteckningar
Elev 8 (E8)	Jag tänker den här blir 4 för dom här båda blir 8 för 4 plus 4 det blir 8.	Identifierande argument + Strategival	Eleven ser additionstecknet och väljer addition för lösandet av uppgiften.
Elev 7 (E7)	Jag tror att det blir 9 och 1. För 1 och 9 blir 10	Identifierande argument + Strategival	Eleven tänker 10-kompisar eftersom summan är lika med 10
Lärare	Vad blir då tigern i sånna fall då?	Implementering	Frågar utifrån att eleven benämner 10-kompisar men inte klargör vilket djur som symboliserar vilket tal.
E7	9	Slutsats	
E8	Nej om den är fyra då är den sex. För den är 4 och den och den är 4 då är den också	Implementering	När eleven säger **den** pekar den på grodan i första ekvationen. Den sista är i ekvationen groda + tiger
E7	5	Slutsats	
E8	Nej det kan inte vara fem för kolla dom här fyra	Implementering	
E7	Men om man har 5 och 5 och då man tar bort 5 och då blir det 5 kvar	Implementering	Eleven tar fram sina händer och visar på att den har fem fingrar på varje hand. Eleven har händerna tillsammans och visar att de är 10 och tar bort en hand och visar att det är fem kvar.
E8	Men grodorna är fyra	Implementering	
E7	Ja	Implementering	
E8	Ja tigern är då sex	Slutsats	
E7	Ja	Slutsats	

Tabell 4
Delar av resonemanget Grupp 1 hade vid lösandet av problemlösningsuppgiften.

Det resonemang som tabellen visar är två elevers olika strategival i arbete mot att lösa problemlösningsuppgiften. Resonemanget innehåller de fyra argumentstyperna; identifierande argument, strategival, implementerande argument samt evaluerande argument.

7.3.1 Identifierande argument

De inledande resonemangen i denna observationsgrupp visar att både E7 och E8 har identifierande argument men olika tolkningar av uppgiften. E8 säger ” *Jag tänker den här blir 4 för dom här båda blir 8 för 4 plus 4 det blir 8*.” Var på E7 säger ”*Jag tror att det blir 9 och 1. För 1 och 9 blir 10*”. Båda eleverna har identifierat att de söker efter summan av två tal. Båda eleverna tänker att de kan lösa uppgiften med hjälp av addition men de har olika utgångspunkt för strategivalet, se mer nedan.

7.3.2 Strategival

I och med att eleverna har olika resonemang för hur de ska lösa uppgiften för de två strategier parallellt med varandra. Båda eleverna är, utan att säga något om det, överens om att använda sig av addition för att lösa uppgiften men hur lösningsförslaget ser ut tänker de olika kring. E8 ser till roten av den första ekvationen. När groda + groda = 8 och försöker visa för E7 att de kan använda sig av roten de fick i den ekvationen i lösningen av nästa ekvation. E7 däremot tittar på vad summan ska vara av ekvation nummer två och använder sina kunskaper om 10-kamraterna. Eleverna använder sig både av förutspående argumentation och verifierande argumentation under resonemangets gång.

7.3.3 Implementerande argument

I den här gruppen valde eleverna olika strategiska val för att lösa problemet. Strategin E8 valde var att lösa problemet utifrån roten från tidigare ekvation medan E7 försökte lösa problemet genom att använda sina kunskaper om 10-kompisarna. E8 argumenterade för sin strategi genom att säga ”*Jag tänker den här blir 4 för dom här båda blir 8 för 4 plus 4 det blir 8*”. Med **den** menar eleven grodan som de använde sig av för att lösa ekvationen innan. E7 svarar då ”*Jag tror att det blir 9 och 1. För 1 och 9 blir 10”.*

7.3.4 Evaluerande argument

I samband med att eleverna kommer längre i sina resonemang fram till en möjlig lösning på problemen varierar deras strategier. Som tidigare nämnt har E7 och E8 olika strategier för lösandet av uppgiften och de argumenterar med varandra för att komma fram till vilken strategi som är den som löser uppgiften. E7 säger bland annat ”*Men om man har 5 och 5 och då man tar bort 5 och då blir det 5 kvar.* Var på följande resonemang sker ” E8: *Men grodorna är 4. E7: Jaa. E8: Ja tigern är då 6. E7: Ja. E8_ Och då betyder det att den tigen och den grodan är 10 tillsammans. E7: Ja för 4 och 6 är också 10.* Här har eleverna med hjälp av varandra kommit framåt i lösandet med hjälp av sina implementerade argument och kommit fram till ett evaluerande argument.

8. Analys

I denna del följer en analys av resultatet och de olika argumenten som finns redovisade i resultatkapitlet.

8.1 Identifierande argument

I två av tre grupper som finns redovisade i resultatet finns identifierande resonemang. För att kunna definiera ett argument av identifierande karaktär har frågan *vad handlar den här uppgiften om* ställts (Eriksson & Sumpter. 2021, s. 15). Argumenten som har valts att klassificeras under denna kategori har värderats utifrån denna fråga. Om ett argument kan svara på frågan har det placerats under denna kategori. I de valda resonemangen återfinns det identifierande argumentet ofta i början av resonemanget. Enligt Eriksson (2021, s. 79) är det vanligast att det identifierande argumentet är början av resonemanget vilket kan ses ett av de valda resonemangen för denna studie. Detta ses i de inledande argumenten i Grupp 3 där E8 och E7 identifierar problemet på två olika sätt vilket senare leder till två olika typer av möjliga lösningar av problemet.

Grupp 1 skiljer sig dock från detta när E1 efter arbetandet med lösandet av problemet har en idé om att problemet inte handlar om djurens vikt i förhållande till varandra och inte vilket symboliskt värde djuret representerar. Denna inriktning kan ses som trolig då eleven ett par argument senare ifrågasätter djurens vikt i förhållande till varandra genom att säga ”*Nej vad då, väger en gris, väger en gris mer än en tiger?*”. Detta gör att det går att misstänka att det blir ett nytt möte med uppgiften och elevernas resonemang byter inriktning från vilket tal djuren representerar till hur mycket djuren väger. Enligt Toulmin (2003, s. 94) kan argument som bygger på garanti och data byggas fram och tillbaka mot varandra till en slutsats är nådd. Detta är något som ses i resonemanget i Grupp 1. E1 bygger sitt antagande på en ny idé var på E2 bestrider detta men samtidigt accepterar påståendet genom att tillämpa idéen i ett strategival (se analys nedan).

I Grupp 3 ses inte något identifierande argument då E4 löser problemet vid första anblick. Detta behöver inte betyda att det inte finns någon identifierande argument, detta kan ha funnits i elevens tankeprocess som den inte uttrycker. Eftersom eleverna skulle föra resonemanget utan större påverkan från någon vuxen går det inte att fastställa hur eleven resonerade då denne inte hade något uttalat identifierande argument.

8.2 Strategival

I samtliga tre grupper som finns redovisade i resultatet finns argument för strategival. Dessa argument har identifierats utifrån frågorna:
förutspående argumentation, *varför **kommer** denna strategi att lösa uppgiften?*
verifierande argumentation, *varför **löste** strategin uppgiften?* (Lithner, 2012, s. 253).

Grupp 1 använde sig av förutspående argument efter att E1 påstår att problemet handlar om djurens vikt i förhållande till varandra och inte djuren symboliska värde. Det finns dock motsättningar inom gruppen då E2 inte håller med E1 om att problemet handlar om kilo. E2 argumenterar för att problemet handlar om vilket tal djuret symboliserar när den säger "*Jag tror det är 6 plus 4 blir och 6 plus 4 blir 10. För att det här väger 4 och den här väger 6.*". Därefter fortsätter eleverna resonera i termer om kilo och har utan att reflekterat över det accepterat E1 strategival. E2 säger emot E1 när den påstår att problemet handlar om kilo men samtidigt accepterar E2 hypotesen om att det handlar om kilo när den försöker motbevisa E1 i sitt resonemang. Hade denna grupp vetat vilken strategi de skulle ha använt och således gått in i ett algoritmiskt resonemang hade problemet inte gått att lösa. Detta då ett algoritmiskt resonemang bygger på tidigare kända lösningar för eleven och går inte att lösa om eleven gör ett misstag under lösandet av problemet. Men då deras resonemang ingår i ett kreativt matematiskt resonemang finns möjlighet att undersöka påståendet närmare (Lithner, 2008, s. 253). Sumpter (2016, s. 162) menar att elever kan föra ett resonemang och använda resonemang utan att det behöver vara rätt och att det trots ett missriktat försök till en möjlig lösning klassas som ett argument.

I Grupp 2, använder sig E4 av en verifierande argumentation då den använde sig av addition i lösandet av uppgiften. Enligt Bergqvist och Lithner (2012, s. 253) måste ett resonemang vara förankrat i ett argument som är grundat i det matematiska problemets egenskaper samt att valet av strategi omvandlar teori till kunskap. E4 använder sig av det matematiska problemets egenskap som är addition och transformerar det från teori till praktik. För att ett resonemang ska klassas som CMR krävs att elever inte på förhand vet hur uppgiften ska lösas. Om en elev vet hur uppgiften ska lösas genom att känna igen dess kärna krävs ingen egenskapad strategi för att lösa uppgiften var på eleven använder sig av AR (Lithner, 2008, s. 253). E4 använde sig av AR vid lösandet av problemet som eleverna ställdes inför, vilket inte gjorde problemet till något problem för eleven utan en uppgift. Enligt Taflin (2007, s. 21) är en problemlösningsuppgift en uppgift som kräver att eleven kan tolka problemet och veta vad som ska lösas och att eleven måste vilja lösa problemet utan att ha en känd lösning. Målet med problemlösningen är att eleverna ska utifrån lösandet av matematiska problem komma till ett stadie där de kan lösa uppgifterna utan att behöva konstruera CMR (Lithner, 2008, s. 253).

I Grupp 3 finns det två strategival. Ett gjort av E7 och ett gjort av E8. Båda eleverna har valt addition som strategi men de har valt olika tillvägagångssätt för den fortsatta lösningen av problemet.

8.3 Implementerande argument

I samtliga tre grupper som finns redovisade i resultatet finns implementerande argument. Dessa argument har identifierats utifrån frågan: ***varför*** *löste den här strategin problemet?* (Eriksson, 2021 s. 17). Detta är den största kategorin det insamlade materialet. Ett implementerande argument följer oftast på strategival, evaluerande argument samt följer upp ett annat implementerande argument. Vanligast i denna studie är att implementerande argument följer på varandra eller efter ett evaluerande argument. Detta då de evaluerade argumenten inte nödvändigtvis följer sist i ett resonemang utan kan finnas i mitten.

I Grupp 2 implementerar E4 sin strategi omedelbart då uppgiften löses genom en kedja av argument. Eleven motiverar även sin lösning då den visar på förståelsen för likhetstecknets betydelse. Eleven bygger sina argument på matematiska grunder vilket är en av grundförutsättningarna för ett resonemang enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 7). Enligt Bergqvist och Lithner (2012, s. 255) finns argumentation vid lösandet av uppgifter men är inte alltid nödvändigt beroende på om strategivalet och implementeringen är rätt. I detta fall behövde inte eleven argumentera för sitt strategival då strategivalet var givet för eleven. Detta gör att eleven kunde implementera sitt strategival som ledde fram till en slutsats.

Eleverna i Grupp 3 hade eleverna olika strategiska val för att lösa problemet. E8 strategi var att lösa uppgiften utifrån tidigare ekvationer medan E7 försökte lösa problemet genom att använda sina kunskaper om 10-kompisarna. E8 argumenterade för sin strategi genom att säga ”*Jag tänker den här blir 4 för dom här båda blir 8 för 4 plus 4 det blir 8*”. Med **den** menar den grodan som de använde sig av för att lösa ekvationen innan. E7 svarar då ”*Jag tror att det blir 9 och 1. För 1 och 9 blir 10”*. Tidigare forskning visar att när eleverna behöver motivera sina argument och val i lösandet av ett problem ges de möjligheter till fler resonemang (Sumpter, 2016, s. 159). Eleven får även möjlighet att fastställa sina matematiska kunskaper när de resonerar och implementerar sin strategi (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3). Detta är något som E7 och E8 gör då de inte håller med varandra om valet av strategi utan provar sina argument mot varandra för att se om de finner en lösning.

8.4 Evaluerande argument

I samtliga tre grupper som finns redovisade i resultatet finns evaluerande argument. Dessa argument har identifierats utifrån frågorna: *svarade den valda strategin på uppgiften*? (Eriksson, 2021, s. 17).

Då Grupp 1 byter inriktning efter ett tag vid lösandet av problemet kommer de fram till evaluerande argument vid flera tillfällen. E1 har sitt första evaluerade argument när den kommer till insikten om att det inte handlar om tal utan djurens symboliska värde utan djurens vikt i förhållande till varandra. Var på E2 motsäger sig detta men E1 visar sin idé genom att peka på antalet tigrar i uppgiften: *E1: Men det är inte siffror det är kilo! Titta det här är 2 kilo, det här är 10 kilo. E2: Det är inte kilo. E1: Jo kolla det är 1 sen 2 sen 3”.*

Sumpter (2016, s. 162) menar att ett evaluerande argument kopplar ihop argumenten så att de bildar en kedja som blir ett resonemang vilket kan leda till ett nytt argument.

I detta stadium i lösandet av uppgiften är det vad som händer i Grupp 1. Eleverna börjar sedan implementera strategivalet utifrån det evaluerande argumentet E1 gör utifrån djurens vikt i förhållande till varandra och problemet tar sig en ny form för eleverna. De fortsätter sina resonemang med /…/ *E1: Nej tillsammans är dom 20. E2: Alla tillsammans är 20. E1: NEJ dom båda tillsammans är 20. Han är 4 och det blir tillsammans, dom blir tillsammans 30 jag menar nånting med 20 jag vet inte vad och den här grej. E2: det är 10 kilo, då det blir 40. E1: Nej det blir 30.* I detta resonemang kommer eleverna både med implementerings argument och evaluerade argument. Eriksson (2021, s. 88 - 89) menar att de evaluerande argumenten i slutsatsen kännetecknas av en symbios av att det skapas ett argument slutsatsen och de utvärderande argumenten. Det sista E1 säger när de har avslutat uppgiften och ha kommit fram till vilket tal djuren representerar är ”*6 plus 6 plus är 12, 12 plus 4 är 16. Det är 16. Allt är rätt. Men jag tror det är kilo”* vilket leder vidare till ett nytt resonemang trots att de har kommit överens om att de ha löst uppgiften när de kommit fram till att svaret är sexton.

I Grupp 2 använder sig E4 av likhetstecknet för att komma fram till ett evaluerande resultat. Under hela resonemanget använder sig eleven av likhetstecknets betydelse för att komma framåt i lösningen av problemet. Dock säger inte det rakt ut förens i lösandet av sista ekvationen: *E4: Titta här. 4 plus 4 är 8. 4 plus 6 är 10. 6 plus 6 är 12 plus 4 är 16 Här står det lika med, då är det lika på båda sidor så här är det 16 och blir det då 16.* Eleven har förstått den matematiska principen och följer upp sina argument med matematiska fakta vilket leder till att den legitimerar sitt resonemang (Sumpter & Hedefalk, 2015, s. 3). Eleven använder sig av en kedja av resonemang som leder till en accepterad slutsats (Sumpter, 2016, s. 162).

I två av tre grupper går de matematiska resonemangen fram och tillbaka beroende på vilken elev det är som argumenterar för sin sak. I Grupp 3 har E7 och E8 olika strategier för lösandet av uppgiften och de argumenterar med varandra för att komma fram till vilken strategi som är den som löser uppgiften. E7 säger bland annat *Men om man har 5 och 5 och då man tar bort 5 och då blir det 5 kvar. E8: Men grodorna är 4. E7: Jaa. E8: Ja tigern är då 6. E7: Ja. E8 och då betyder det att den tigen och den grodan är 10 tillsammans. E7: Ja för 4 och 6 är också 10.* Här har eleverna med hjälp av varandra kommit framåt i lösandet med hjälp av sina implementerade argument och kommit fram till ett evaluerande argument. Enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 3 - 4) är motivering det som legitimerar resonemanget det betyder att det backar upp vad som är tillåtet i det matematiska resonemanget och ger övertygelse om att lösningen är den rätta. Vilket även inkluderar argumentation och slutsatser. Dessa elever visar att motiveringen till varför ett argument är det rätta leder fram till att de backar upp sitt resonemang på de matematiska grunder som finns för problemet.

Eriksson (2021, s. 79) menar att ett evaluerande argument kopplar tillbaka till det identifierande argumentet. I Grupp 1 ses detta när E1 i den avslutade meningen säger: ”*6 plus 6 plus är 12, 12 plus 4 är 16. Det är 16. Allt är rätt. Men jag tror det är* *kilo".* Gruppen har då kommit fram till ett svar men E1 hävdar fortfarande att problemet handlar om kilo vilket kopplar tillbaka till det identifierande argumentet E1 har här den säger: "*Men det är inte siffror det är kilo".* I Grupp 2 finns inget identifierande argument vilket gör att det evaluerande argumentet inte har något att koppla tillbaka till. De övriga argumenten följer dock varandra som en kedja så det är rimligt att anta att OM det hade funnits ett identifierande argument så hade det evaluerande argumentet kopplat tillbaka till det. Det som är intressant i Grupp 3 är att eleverna identifierar problemet olika vilket gör att de har sina evaluerande argument på olika ställen. E7 som identifierar att problemet handlar om 10-kompisar försöker komma till slutsatsen om vilka 10-kompisar som de arbetar med. Medan E8 kopplar sitt evaluerade argument till sitt identifierande argument då dennes argument sitter ihop som en kedja och eleven följer sin tankegång trots att den avbryts av E7 som argumenterar för 10-kompisarna.

9. Diskussion

I detta avsnitt kommer valet av metod att diskuteras samt diskussioner om resultatet. Sist i avsnittet finns förslag på vidare forskning utifrån vad studien har kommit fram till.

9.1 Metoddiskussion

Syftet med denna studie var att undersöka vilka de argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang vid lösandet av en problemlösningsuppgift. För att undersöka detta valdes observation som metod då denna metod tillåter eleverna att lösa matematiska problem i en situation som liknar en vanlig lektion för dem så att de känner sig bekväma med situationen (Stukát 2011, s. 50). Samtidigt som det finns möjlighet att observera och samla data om deras arbete. Det fanns inga förutspådda frågor eller svar som när eleverna hade frågor svarades det så att eleverna inte skulle ledas för mycket i sina argument fram till en lösning. I efterhand hade det varit en fördel om det hade funnits frågor förberedda för att hjälpa eleverna utveckla och motivera sina argument (Eriksson, 2021). Istället för att fråga "*Vad blir då tigern i sånna fall då?*" eller *"Men hur blir det då här nere? Hur mycket var den"?* hade frågor som "*berätta hur du tänker*" och "*hur har ni/du kommit fram till det*" kunna ställas istället. Ett urvalskriterium vid val av resonemang till analysen var att det valda sekvenserna i vilka det är eleverna som för resonemanget inte en vuxen. Detta för att tydligt få syn på vilka typer av argument som utvecklas i elevers matematiska resonemang när de får arbeta självständigt.

Denna studie har sammanlagt gjort sex observationer för att få fram ett material som skulle kunna presenteras i en uppsats. Vid påbörjad analys av de första tre observationerna sågs att det inte fanns tillräcklig med data att kunna analysera och presentera i en text. Detta då eleverna uttryckte sig med hjälp av gester och provade sig fram på problemlösningspapperet. Om samma uppgift skulle användas igen för en studie skulle tydligare fältanteckningar med ett eget exempelblad där observatören drog streck på samma ställe och numrerade dessa kunna hjälpa till i analysen av lösandet av uppgiften.

Något som påverkade valet av skola var pågående Covid- 19 pandemi eftersom det inte är alla skolor som släpper in vem som helst i skolan utifrån Folkhälsomyndighetens rekommendationer. Studien genomfördes på en skola som tillät studenter på skolan var på skolan valdes. Det fanns ingen förinformation om eleverna utan all information om klassen gav klassläraren vid det första observationstillfället. Då denna studie påbörjades innan Covid-19 och arbetet mot att använda observation som metod redan var påbörjat valdes det att fortsätta med det redan påbörjade arbetet istället för att ändra inriktning på arbetet.

9.2 Resultatdiskussion

Nedan följer en diskussion utifrån vad som har framkommit i resultat och analys av detta.

9.2.1 Lärarens roll vid problemlösningssituationer

Vid litteraturstudien som detta arbete grundar sig på framstod det att elevernas resonemang följer ett typiskt mönster för argument där de följer en kronologisk ordning. Under analysen av det insamlade materialet ses att argumentens ordning inte kommer i kronologisk ordning men följer på varandra som en kedja vilket finns beskrivet i tidigare forskning. I Grupp 1 och 3 ses att de evaluerande argumenten inte endast är det sista som händer i resonemanget utan eleverna kommer med evaluerande argument under lösandet av problemet. Det som tycks vara återkommande när dessa argument kommer mitt i ett resonemang är att de försöker övertyga sin arbetskamrat om att de har rätt eller försöker svara på ett av deras resonemang.

Tidigare forskning menar på att elevernas identifierande argument kommer först i mötet med uppgiften vid ett matematiskt resonemang (Eriksson & Sumpter, 2021 s. 1). Endast i en av tre grupper återfanns det identifierande argumentet först. I Grupp 3 återfanns två identifierande argument, först i E7 resonemang samt först i E8 resonemang. Dessa argument innehöll dock strategival i samma argument men återfanns ändock först. I Grupp 2 där E4 löser hela uppgiften utan att argumentera för sitt resonemang eller förklarar sin tankegång för de andra eleverna återfinns inget identifierande argument. Det är dock inget som betyder att det inte finns ett identifierande argument hos eleven. Detta argument kan finns i elevens tankegång som inte kommuniceras. Hade detta varit ett en vanlig klassrumssituation där eleverna skulle lösa en problemlösningsuppgift hade läraren kunnat medverka och ställt frågor till eleven så att den fick utveckla sitt resonemang och förklara hur den tänkte. Vid ett sådant tillfälle kan läraren ställa djupgående frågor så att eleven utvecklar sitt resonemang och utmanar eleven att stättaord på sina tankar. Nordin (2016, s. 58) menar att det inte alltid som ett argument syns även om det finns. Vid gemensamma problemlösningssituationer går det då att utveckla att sociomatematisk klassrum där det inte är svaret som är det viktigaste utan elevernas tillvägagångssätt. Enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 3) sker elever inlärning i deltagandet med andra och lärare kan du ges möjlighet att identifiera elevernas olika typer av argument när de behöver motivera sina val de gör när de löser en problemlösningsuppgift. Om eleven förväntas motivera sina lösningar blir lärarens roll att stötta eleverna i detta (Bergqvist & Lithner (2012, s. 254). Lärarens roll i ett lågstadieklassrum blir då att hjälpa eleverna att motivera sina resonemang genom att ställa olika frågor så att eleverna tydliggör sina argument i resonemanget. Ett tillåtande, argumenterande och resonerande klassrumsklimat är ingenting som finns från början i ett klassrum utan är någonting som både elever och lärare behöver träna på.

I Grupp 2 och 3 ses även att ett argument kan svara för två av kategorierna för vilken typ av karaktär det har. E4 säger *” Titta här. 4 plus 4 är 8”.* Detta argument svarar på frågorna: *varför **kommer** denna strategi att lösa uppgiften*? - strategival samt *varför löste **den här** strategin problemet?* - implementerande. E4 använder sig då av addition som strategival och följer upp det i samma argument genom att implementera den då den visar på att additionen stämmer. Även här har läraren en viktig roll att hjälpa eleverna motivera sina argument och förtydliga dem så att de blir tydliga både för eleven och övriga i gruppen. Eftersom E4 för ett soloresonemang är det inte säkert att de andra två eleverna förstod problemet eller det lösningsförslaget E4 hade. Som lärare i lågstadiet kan det vara bra att lägga tid på att få eleverna att motivera sina resonemang och på så sätt upptäcka de olika argumenten som den för i sitt resonemang. Detta för att få eleverna att tydliggöra sina resonemang och skapa lärtillfällen och kunskapsutveckling eleverna emellan. Nordin (2016, s. 60) säger även att lärare kan använda sig av typerna av resonemang för att stötta elevernas kommunikation då det inte alltid är tydligt vad eleverna visar i sitt muntliga resonemang då elever tenderar att vara multimodala i sina lösningsstrategier.

I Grupp 1 fanns det identifierande resonemanget vid två tillfällen. Detta gjorde även att problemet bytte karaktär från att handla om djurets symboliska värde till djurens vikt i förhållande till varandra. Vid ett tillfälle efter att E1 menar att uppgiften handlar om djurens vikt säger eleven ”*Nej vad då väger en gris, väger en gris mer än en tiger?*”. Detta gör att det finns risk för att elevernas resonemang tar en ny vändning och börjar behandla hur mycket djuren väger i förhållande till varandra och resonera om vilket djur som är störst och därför borde vara tyngst. Detta är något som görs men inte i förhållande till de tidigare ekvationerna utan de ser till ekvationen **groda + tiger = 10.** Det är efter denna ekvation som de börjar resonera om olika tiotal och gör tio-hopp när de räknar djurens vikt. Hade inte E1 identifierat ett nytt problem mitt i lösandet av problemet hade de förmodligen endast haft ett identifierande argument först i sitt resonemang. I undervisningen i matematik för lågstadiet är det vanligt att försöka förenkla uppgifter så att de blir mer vardagsnära för eleverna. I denna studie gjordes detta genom att låta variablerna i en ekvation representeras av ett djur istället för x och y. Något som var intressant vid analysen av den här studien var Grupp 1 som skilde sig från de övriga grupperna vid lösandet av problemet. Denna grupp avvek från det framskrivna problemet när de trodde att uppgiften handlade om djurens vikt i förhållande till varandra istället för vilket tal som djuret symboliserade. Detta är något som lärare behöver uppmärksamma vid valet av uppgifter och problem som eleverna ska arbeta med. Det är lätt att tro att eleverna lättare ska förstå det matematiska innehållet av en uppgift eller problem om man tar bort det matematiska figurerna eller termerna. I det här fallet hade man valt bort x och y och ersatt dessa med grodor, tigrar och en gris. En egen tolkning är att Grupp 1 inte hade missförstått problemet om det hade stått x och y alternativt varit tomma fält där de skulle fylla i vilka tal som fattades.

9.2.2 Vad eleverna säger och vad eleverna gör

Data som insamlades vid första observationstillfället visade sig vara svåranalyserat då eleverna uttryckte sina argument som ”så och så” eller ”här och här”. Denna kunskap är viktig att ta med sig i sin yrkesroll när det kommer till val av uppgifter till eleverna. Vad är det som uppgiften ska hjälpa läraren att undersöka om eleverna har kunskaper om? Är det deras muntliga förmåga att konkretisera sina tankar, strategier och resonemang eller är det att se efter om de kan lösa uppgiften med hjälpmedel som inte kräver en muntlig förmåga. Eleverna visade hur de löste uppgiften med hjälp av symboler, kroppsspråk och gester vilket är viktigt att uppmärksamma och då se till hela eleven vid matematiska situationer, inte endast den muntliga förmågan eller skriften. Enligt Nordin (2017, s. 41) uttrycker eleverna sitt matematiska kunnande i mer än bara skrift och rätt matematiska termer. Hon menar att om lärare ser till hela elevens kunnande och ger eleven möjlighet till att uttrycka sig multimodalt genom bilder, symboler, gester, kroppsspråk kan de tillsammans sätta ord på elevens kunnande och utveckla elevens matematiska språk.

Vid de tre senare observationerna hade det varit svårt att veta vad eleverna talade om det inte hade funnits fältanteckningar. Eleverna pekade och pratade om ”den och den” vilket inte säger något om vilket djur de menade. Tack vare att det fanns fältanteckningar som nedtecknade detta gick det att använda dessa resonemang i analysen av materialet. Eriksson (2021, s. 74) skriver att lärare och elever blev mer bekväma och att eleverna tog initiativ till att visa sina modeller och strategier allt eftersom de tränade på att motivera sina val. Jag tror att det är viktigt att som lärare tänka på att be eleverna motivera sina lösningar av uppgifter, inte enbart när de arbetar med problemlösning utan även när de löser rutinuppgifter. Detta är kanske särskilt viktigt när eleverna inte har samma modersmål utan behöver förmedla sig på andra sätt en språkligt via gester, verbalt och skriftligt (Nordin (2007, s. 41).

Sumpter och Hedefalk (2015, s. 3) skriver i sin artikel att de såg barnen leka fram matematik och att eleverna då inte behöver ett konstruerat problem för att arbeta med matematik. Det kan därför vara bra som lärare att våga se utanför matematikboken och matematikuppgifters regler som finns för lärande. Den sociala kontexten som eleven finner sig i vid lösandet av matematikuppgifter kan därför ge eleven möjlighet att skapa förståelse och konstruera egna strategier och lösningar. Vidare menar de att tidigare forskning har dragit slutsatser om att matematiska resonemang främst är kopplat till muntliga språkkunskaper men i deras studie visar resultatet att barn både stödjer och bestrider argument både verbalt och med konkret material (Sumpter & Hedefalk 2015, s. 6). De menar även att elever använder verktyg både för att utforska och stärka sina resonemang och slutsatser. Genom att titta på arguments olika egenskaper finns det belägg för både att slutsatser ifrågasätts och ifrågasätter argument. Enligt Sumpter och Hedefalk (2015, s. 4) kan argument riktas och vara en del av en process när eleverna löser matematiska problem.

9.3 Vidare forskning

Utifrån resultatet och analysen går det att se att elevernas resonemang innehåller olika typer av argument. Två av grupperna höll sig till problemlösningsuppgiftens matematiska innehåll det vill säga vilket tal som djuren symboliserade medan en grupp ändrade problemet från att problemet handlade om vilket tal djuret symboliserade till att få problemet att handla om kilo. Tidigare forskning visar att det identifierande argumentet återfinns först i ett matematiskt resonemang men så är inte fallet i Grupp 1. I Grupp 1 börjar E1 med ett identifierande argument då eleven initierar till början av lösandet av problemet. Efter att gruppen har börjat lösa problemet utvecklas ett resonemang angående djurens symboliska värde kontra djurets vikt i förhållande till varandra. Uppgiften var utformad så att den skulle underlätta lösandet av problemet då de olika variablerna var utbytta mot djur men detta gör att en grupp börjar resonera om djurens vikt istället för att försöka komma fram till lösningen på problemet. De resonerar kring vilket djur som väger mest, om en gris väger mer än en tiger, om alla tigrar väger 10 kg vad blir summan då vilket gör att de lämnar ekvationerna i problemet. Hade en undervisande lärare varit närvarande i diskussion hade denne kunnat ställa frågor som antingen ledde tillbaka eleverna till det ursprungliga problemet eller fått eleverna att motivera sina lösningsförslag ytterligare. En vidare forskningsfråga på detta ämne skulle kunna vara:
Vilken typ av symboler underlättar lösandet av problemlösningsuppgifter för elever i lågstadiet?

Detta då x och y bytts ut mot djur som skulle underlätta lösandet av problemet för eleverna men istället gjorde att de missförstod uppgiften och började lösa den utifrån ett helt annat perspektiv än vad problemet egentligen representerade.

10. Sammanfattning

Sammanfattningsvis har denna studie kommit fram till att elevers matematiska resonemang kan ta olika vändningar beroende på elevernas argument. Argumenten i ett matematiskt resonemang följer på varandra som en kedja som tidigare forskning har visat på. Det som framkommit ur resultat, analys och diskussion är att lärarens roll har betydelse för elevernas matematiska resonemang. Citaten från denna studie visar när elever arbetar utan någon vuxens inblandning utan löser problemet utifrån sina erfarenheter. Hade en lärare varit närvarande i Grupp 1 när de löste problemet hade kanske aldrig elevernas resonemang handlat om djurens vikt i förhållande till varandra istället för djurens symboliska värde. Läraren hade kunnat ställa följdfrågor till eleven i Grupp 2 för att förtydliga elevens resonemang vid lösandet av uppgiften så att de andra eleverna i gruppen skulle kunna få en chans att möta uppgiften. Lärarens roll är även att välja lämpliga uppgifter som hjälper eleverna att utveckla sina kunskaper utifrån den nivån de befinner sig ifrån samt avgöra var fallgropar skulle kunna finnas för eleverna.

Referenser

Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and mathematics education - two sides of the same coin: creative reasoning in university exams in mathematics* (PhD dissertation, Matematik och matematisk statistik). http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-920 **hämtad 210913**

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behavior, 31(2),* 252-269. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002 **hämtad 210913**

Bråting, K., Sollervall, H., & Stadler, E. (2017). *Algebra för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C., & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap – Vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar.* Stockholm: Natur och Kultur.

Eriksson, H. (2021). *Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet : En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurser* (PhD dissertation, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet). http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:du-36814 **hämtad 210913**

Eriksson, H., & Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics.* https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1 **hämtad 210913**

Kihlström, S. Uppsatsen – examensarbetet, I: Dimenäs, J. (red) (2007). *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket – vetenskapligt förhållninssätt och vetenskaplig metodik.* Stockholm: Liber.

Larsen, A-K. (2009) *Metod helt enkelt – en introduktion till samhällsvetenskaplig metod.* Malmö: Gleerups.

Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* s. 255-276. https://www.jstor.org/stable/40284656 **hämtad 171131 & 210901**

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics.* s. 9-28. https://doi-org.www.bibproxy.du.se/10.1007/s10649-019-09903-9 **hämtad 210915**

Nordin, A.-K. (2016). *Matematiska argument i helklassdiskussioner: En studie av elevers och lärares multimodala kommunikation i matematik i åk 3–5* (Licentiate dissertation, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet). http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-136495 **hämtad 201016**

Skolverket. (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.* Ödeshög: Danagård/Litho.

Skolinspektionen (2014). *Matematikundervisningen i årskursens 4–6- Interaktion i klassrummet.* https://www.skolinspektionen.se/globalassets/02-beslut-rapporter-stat/granskningsrapporter/tkg/2020/matematik/matematikundervisningen-4-6.pdf **hämtad 210914**

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed.* https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2017-08-29-god-forskningssed.html **hämtad 210925**

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Sumpter, L. (2016). Two Frameworks for Mathematical Reasoning at Preschool Level. *Mathematics Education in the Early Years.* s. 157–169. Springer, Charm https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_9 **hämtad 210913**

Sumpter, L., & Hedefalk, M. (2015). Preschool children's collective mathematical reasoning during free outdoor play. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 1–10. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.006 **hämtad 210914**

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan - för att skapa tillfällen till lärande (*PhD dissertation, Umeå universitet). http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:du-3489 **hämtad 211005**

Toulmin. S. (2003). *The uses of argument.* (uppd. uppl.). Cambridge: Cambridge University Press. Hämtad från doi:10.1017/CBO9780511840005a **hämtad 211014**

Bilaga 1

Informationsbrev om en studie gällande elevers resonemang inom ämnet matematik.

Hej alla vårdnadshavare till elever i klass XXX!

Jag heter Johanna Rosén och skriver mitt examensarbete på Grundlärarprogrammet vid Högskolan Dalarna. Jag håller nu på att avsluta mina studier genom att skriva mitt examensarbete inom matematikdidaktik. Detta examensarbete ska undersöka hur elever resonerar inom matematik, vilken typ av argument de för när de samtalar matematik på lektionerna. För att få underlag till min empiriska studie kommer eleverna få arbeta tillsammans i grupper. Deras uppgift kommer vara att lösa några problemlösningsuppgifter där jag kommer att lyssna och interagera med eleverna. Underlaget kommer bestå av ljudinspelningar av mig och eleverna när de försöker lösa ett matematiskt problem tillsammans. Det kommer inte att ske någon typ av fotografering eller intervju med varken elev eller lärare utan endast ljudinspelningar.

Alla som deltar i denna undersökning är garanterad anonymitet och det gäller även skolans namn och kommun. Det material som samlas in kommer endast användas till denna undersökning och det är endast jag och min handledare som kommer ha tillgång till det insamlade materialet. Efter examensarbetet är godkänt kommer allt material att förstöras. Resultatet kommer att presenteras i en uppsats som examineras vid Högskolan Dalarna.

Som vårdnadshavare tillfrågas du härmed om ditt barn får delta i denna undersökning. Deltagandet i undersökningen är helt frivilligt, vilket innebär att eleven kan när som helst kan avbryta sitt deltagande utan motivering. Om eleven väljer att avbryta sin medverkan kommer information inte att ingå i undersökningen. Har Ni frågor angående undersökningen, tveka inte att kontakta mig eller min handledare.

Tack på förhand!

Med vänliga hälsningar
Johanna Rosén

Student
Johanna Rosén
v21johar@du.se

Handledare
Helena Eriksson
hei@du.se

Godkännande av elevens medverkan i undersökningen:
Elevens namn:

____

Vårdnadshavares namn:

____