Examensarbete (del 2)
för grundlärarexamen inriktning F–3

Avancerad nivå

Bråkundervisningens progression

Variationsmönster för kritiska aspekter som kan identifieras i lärares samtal om bråkundervisning

Författare: Sanna Halvarsson och Terese Ek
Handledare: Helén Sterner/Anna Teledahl
Examinator: Helena Eriksson
Ämne: Pedagogiskt arbete, inriktning matematik
Kurskod: APG246
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 2022-03-27

Högskolan Dalarna – SE-791 88 Falun – Tel 023-77 80 00

Abstract

Forskning har visat att rationella tal är ett problematiskt matematiskt område för elever att lära sig i samtliga årskurser. Progressionen inom området kan bli lidande och så även andra matematiska områden som baseras på förståelsen för rationella tal. Syftet med denna kvalitativa studie är att utforska hur lärare samtalar om bråkundervisning i årskurs 1–3 utifrån kända missuppfattningar om rationella tal. Fyra semistrukturerade fokusgruppsintervjuer genomfördes med verksamma lärare i årskurs 1–3. Det insamlade materialet analyserades utifrån variationsteorin, därefter kopplades resultatet samman med tidigare forskning och variationsteorin. En slutsats som dras ur lärarnas samtal om hur en gynnsam bråkundervisning kan utformas är att det går att urskilja variationsmönster utan att lärarna medvetet uttrycker detta. Ett antagande görs om att medvetenhet om variationsteorin skulle kunna bidra till att bråkundervisningen blir mer gynnsam och att elevers kunskapsprogression därmed kan gynnas.

Nyckelord

Bråk, progression, rationella tal, undervisning, variationsmönster, variationsteorin

Innehållsförteckning

1 Inledning

Ett av skolans uppdrag är att erbjuda samtliga elever en strukturerad och balanserad undervisning som bidrar till att eleverna bland annat utvecklar ett matematiskt tänkande, vilket kan hjälpa i såväl vardagslivet som vid fortsatta studier (Skolverket, 2019, s. 11). Matematiken innehåller många olika områden som är beroende av varandra, där vissa delar kan vara lätta att lära sig och skapa förståelse för medan andra delar kan vara svårare. Undervisningen och omfattningen av de olika områdena bör anpassas utifrån behovet som finns för att eleverna ska kunna tillägna sig nödvändiga kunskaper inom specifika områden (Skolverket, 2021, s. 10). Ett av områdena inom matematik är taluppfattning och tals användning och där inkluderas bråk och rationella tal. I kursplanen för matematik kan det utläsas att matematik-undervisningen för elever i årskurs 1–3 bland annat ska innehålla enkla bråk, hur dessa förhåller sig till naturliga tal och hur de kan användas i vardagliga situationer (Skolverket, 2019, s. 55). När eleverna sedan går i årskurs 4–6 vidgas matematikundervisningen och ska då rymma rationella tal, tal i bråk- och decimalform samt deras egenskaper och användning i vardagliga situationer (Skolverket, 2019, s. 56). Förståelsen för rationella tal har en betydande roll för elevers fortsatta kunskapsutveckling inom matematik (Clarke et al., 2008, s. 378). Detta inte minst inom områdena procent och algebra där förståelsen för rationella tal är grundläggande (Mohyuddin & Khalil, 2016, s. 156; Skolverket, 2021, s. 12). Men trots detta belyser forskning att rationella tal är ett problematiskt område för eleverna i grundskolan (Clark et al., 2008, s. 373; Deringöl, 2019, s. 32–35; Wijaya, 2017, s. 231–233).

I kontrast till kursplanens skrivningar, som synliggör en progression i bråkundervisningens innehåll mellan årskurserna, framkommer det i flera studier att missuppfattningar som synliggjorts inom rationella tal i lägre åldrar även framträder hos äldre elever (Barber, 2021, s. 208; Jordan et al., 2017, s. 628; Nagy, 2017, s. 111). Detta påvisar att kunskapsprogressionen inom området bråk/rationella tal över årskurserna kan ifrågasättas, trots att kursplanen i matematik menar att en progression ska ske. I sin avhandling synliggör Nagy (2017) upptäckten om att kunskapsprogressionen mellan årskurserna 3, 6 och 9 inte är tillräcklig och att elever möter allt för lika innehåll i undervisningen oavsett årskurs. Nagy (2017, s. 112) konstaterar dessutom att det inte endast är innehållet i undervisningen som är lika, även missuppfattningar och svårigheter som identifierats inom bråk är samstämmiga oavsett årskurs. Hon förtydligar i sin avhandling att några specifika svårigheter som identifierats i årskurserna 3, 6 och 9 är att placera ut bråktal på tallinjen, delar av antal, delar av helhet samt att eleverna saknade förståelse för täljarens och nämnarens innebörd. Liknande missuppfattningar har identifierats av Mohyuddin och Khalil (2016, s. 142–144) som beskriver att elever har problem att se bråktal som en helhet, eleverna ser istället nämnare och täljare som två separata tal och gör missuppfattningar gällande bråktals storlek och tror att bråktal med stor nämnare är synonymt med ett stort tal. Andra missuppfattningar som Mohyuddin och Khalil (2016, s. 142–144) uppmärksammar är att många elever har svårt att koppla samman visuella modeller av bråktal med det matematiska uttryckssättet för bråktal, samt att koppla samman begrepp likt hälften och en tredjedel då dessa uttrycks i tal och skrift. Vidare lyfter Mohyuddin och Khalil (2016, s. 134) att missuppfattningar i de lägre årskurserna kan bli ett hinder i den fortsatta utbildningen och påverka elevers prestation och motivation inom matematik. Deringöl (2019, s. 34) påpekar att missuppfattningar bör uppmärksammas och att undervisningen bör anpassas så att dessa missuppfattningar inte kvarstår. Barber (2021, s. 207–208) hävdar också att det är av stor vikt att planera, utföra, reflektera och följa upp undervisningen med elevers missuppfattningar som utgångspunkt.

Utifrån egna erfarenheter på verksamhetsförlagda utbildningar har vi i likhet med ovan nämnd forskning uppmärksammat att det matematiska innehållet bråk har varit svårt för elever att lära sig i jämförelse med andra matematiska områden. Sammanfattningsvis ges för få elever tillräckliga grundkunskaper i bråkundervisningen i de lägre årskurserna. Otillräckliga grundkunskaper bidrar till att missuppfattningarna som tidigt uppstår kan följa med genom hela skoltiden. Det vill säga, en progression och kunskapsutveckling inom bråk blir inte synlig, om ens möjlig, eftersom missuppfattningarna kan bli ett hinder. Anledningen till att detta i längden blir ett större problem som inte kan förbises är på grund av att kunskaperna om rationella tal är grundläggande för många andra matematiska områden. Undervisningen behöver utformas utifrån elevers missuppfattningar för att skapa förutsättning för att dessa inte kvarstår. Nagy (2017, s. 123) menar att forskning kring progression i relation till undervisningen är tunn och behöver vidgas och fördjupas för att komma till rätta med problemet.

Med grund i ovan tidigare forskning samt egna erfarenheter är det relevant att undersöka och synliggöra lärares uppfattningar i de tidigare årskurserna om hur den fortsatta bråkundervisningen kan utformas utifrån elevers missuppfattningar inom rationella tal. Även om forskningen ger exempel på hur gynnsam bråkundervisning kan vara och beskriver missuppfattningar så är bilden splittrad och studier behandlar oftast små delar av en effektiv undervisning. I undervisningen sammanfogar lärare diverse delar av forskning till en helhet. Samtal mellan lärare kan då visa hur undervisningen konkret kan utformas och en bredare bild kan ges om hur lärare kan resonera, både kort- och långsiktigt, kring bråkundervisning för att motverka att missuppfattningarna följer med upp i åldrarna. Detta har såväl blivande som verksamma lärare nytta av i kommande matematikundervisning.

2 Syfte och frågeställningar

Studiens syfte är att utforska hur lärare samtalar om bråkundervisning, i årskurs 1–3, utifrån kända missuppfattningar om rationella tal. Syftet preciseras i följande frågeställningar:

- Vilka kritiska aspekter behöver undervisningen fokusera på för att eleverna ska utveckla en mer kvalificerad förståelse av tal i bråkform?
- Vilka variationsmönster går att identifiera i lärares samtal om undervisning av dessa kritiska aspekter?

3 Bakgrund

I bakgrundsavsnittet presenteras definitioner av de centrala begreppen bråk, rationella tal, missuppfattningar, svårigheter och progression i relation till studien. Vidare beskrivs styrdokumentens formuleringar om bråk och rationella tal. Avslutningsvis redogörs tidigare relevant forskning om undervisning och förståelsen för rationella tal.

3.1 Rationella tal/bråk

Ett rationellt tal är kvoten av två heltal och kan uttryckas i formen a/b (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 51). Uttrycket ses som en helhet och därför kan aldrig nämnaren vara noll, eftersom en helhet inte kan vara obefintlig (Nationalencyklopedin [NE], u.å.a). Ett rationellt tal är synonymt med ett bråktal vilket beskrivs som ett matematiskt uttryck av formen a/b uppbyggt av de tre komponenterna täljaren (a), nämnaren (b) och det åtskiljande bråkstrecket (/) (Nationalencyklopedin [NE], u.å.a). Bråktalet uttrycker förhållande mellan två kvantiteter, där nämnaren anger hur många delar ett föremål är uppdelad i och täljaren anger hur många delar som avses (Barbosa & Vale, 2021, s. 4; Sveider, 2016, s. 88–89). Rationella tal och bråktal kan även uttryckas i decimal- och procentform, som i sin tur kan representeras genom symboler, figurer och bilder (Barbosa & Vale, 2021, s. 4). I denna studie kommer begreppen rationella tal och bråk användas likvärdigt. I studien kommer även båda begreppen *bråk* och *bråktal* användas. Begreppet bråk syftar till bråk i allmänhet, både i form av tal, modeller och representationer, medan begreppet bråktal specifikt syftar till det skrivna talet i formen a/b.

3.2 Missuppfattningar och svårigheter

Ordet *missuppfatta* är ett verb vilket beskriver att något uppfattas eller tolkas på ett felaktigt sätt (Nationalencyklopedin [NE], u.å.b). Inom matematiken anses en missuppfattning vara en produkt av bristande förståelse av en matematisk regel eller en felaktig generalisering, som ger konsekvenser för det fortsatta lärandet (Yilmaz & Yenilmez, 2008, refererad i Deringöl, 2019, s. 29). Mohyuddin och Khalil (2016, s. 135) poängterar att åtgärderna för missuppfattningarna bör ske snabbt då missuppfattningarna generellt sett stör elevers lärande av nya kunskaper, dessutom fäster elever ofta sig vid missuppfattningarna och har därmed svårt att ta till sig nya korrekta begrepp eller regler.

Ett annat ord som förekommer i denna studie och som används i relation till missuppfattningar är *svårigheter*. Svårigheter är synonymt med besvärlighet och ordet *svår* kan beskrivas i termer av att något kräver ansträngning för att förstås, lösas eller utföras (Svenska Akademins Ordböcker, 2021). Karlsson (2019, s. 19, 35) beskriver att matematiksvårigheter kan bero på medicinska orsaker, dyskalkyli eller sociokulturella förhållanden. Med sociokulturella förekomster menas tillexempel föräldrars påverkan, bristfällig undervisning och störande lärmiljö. I denna studie syftar svårigheter till de specifika matematikssvårigheter elever kan finnas i, gällande det matematiska området bråk, vars uppkomst beror på en bristfällig matematikundervisning.

3.3 Progression

Progression används mestadels i syfte att beskriva utveckling och lärande för elevers kunskaper, men Nagy (2017, s. 16–17) förklarar att begreppet även kan användas i andra sammanhang såsom att beskriva undervisningens kvalitet. Detta förklarar Säfström (2017) mer ingående i sin analys om begreppet progression. Analysen är gjord för att ta reda på vad begreppet syftar till och inom vilka användningsområden det används. Författaren skiljer på begreppet progression som en generell kunskapsutveckling och lärande och progression som gäller kvalitet i undervisning och utbildning (Säfström, 2017, s. 56). Begreppet progression som den sistnämnda definitionen kan förklaras som att undervisningen skapar förutsättning för elevers progression. Genom att undervisningen utgår från elevernas förståelse och succesivt utmana eleverna med ökat krav och vidgat innehållet ges förutsättning till kunskapsutveckling. Detta till skillnad från om undervisningens krav inte ökas och innehållet blir konstant, vilket resulterar i att undervisningen övergår till endast repetition (Säfström, 2017, s. 66). Elevers progression i bemärkelse som kunskapsutveckling och lärande kan bli lidande om undervisningen har kvalitetsbrister som inte möjliggör att eleverna kan tillägna sig förståelse för innehållet i undervisningen vilket då blir ett hinder i den fortsatta undervisningen (Nagy, 2017, s. 19). I och med detta så synliggörs sambandet mellan progressionen hos den enskilde individen med progressionen i undervisningen och i denna studie behandlas begreppet både som progression i undervisningens innehåll och som kunskapsprogression hos elever.

3.4 Styrdokumentens formuleringar om rationella tal och bråk

Matematikundervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar ny och fördjupad kunskap samt förtrogenhet om matematiska begrepp, metoder och dess användning (Skolverket, 2019, s. 54). I kommentarmaterialet för kursplanen i matematik poängteras att begreppsförståelsen är viktig för elevernas förståelse av olika matematiska områden samt för fortsatt kunskapsutveckling inom matematik (Skolverket, 2021, s. 5).

Skolmatematiken är uppdelad i 6 olika kunskapsområden, varav ett är taluppfattning och tals användning. Inom detta område återfinns begreppen bråk och rationella tal i kursplanen för matematik (Skolverket, 2021, s. 10–11). Samtliga 6 kunskapsområden, däribland taluppfattning och tals användning, är återkommande i grundskolans årskurser. Eleverna ska där möta en progression av innehållet över stadie-indelningarna 1–3, 4–6 och 7–9 (Skolverket, 2021, s. 10–12). Progressionen synliggörs i det centrala innehållet och formuleringar av vilket innehåll som eleverna i årskurserna 1–3 och 4–6 ska möta i undervisningen. Under det centrala innehållet för årskurs 1–3 inom taluppfattning och tals användning står det att eleverna ska lära sig naturliga tal och enklare tal i bråkform. Vidare ska eleverna i undervisningen lära sig del av helhet och del av antal samt hur delarna benämns och uttrycks som enklare bråk och hur dessa förhåller sig till naturliga tal (Skolverket, 2019, s. 55). Kommentarmaterialet förtydligar att *enkla tal i bråkform* syftar på bråk som kan förekomma i elevernas närhet likt 1/2 och 1/4. Dessutom poängteras vikten av att eleverna lär sig begreppen *del av helhet* och *del av antal* då detta förutsätter att eleverna i senare årskurser kan utveckla dessa kunskaper inom matematikområden som algebra och procent (Skolverket, 2021, s. 11–12). Anmärkningsvärt är att begreppet rationella tal utesluts från formuleringarna i både kommentarmaterialet och det centrala innehållet i årkurserna 1–3 (Skolverket, 2019, s. 55; Skolverket, 2021, s. 10–12).

I det centrala innehållet för årskurs 4–6 introduceras begreppet rationella tal som eleverna ska möta i undervisningen. Vidare utvidgas innehållet då eleverna ska lära sig om rationella tals egenskaper, men även hur tal i bråk- och decimalform används i vardagliga situationer samt sambandet mellan procent-, decimal- och bråkform (Skolverket, 2019, s. 56). I kommentarmaterialet tydliggörs innehållet ytterligare och det går att utläsa att eleverna ska lära sig både positiva och negativa rationella tal. Vidare förtydligas att rationella tals egenskaper är till exempel täljarens och nämnarens innebörd och hur rationella tal kan delas. Vilket innebär att till exempel talet 1 kan delas i tiondelar, fjärdedelar eller femtedelar (Skolverket, 2021, s. 11).

3.5 Tidigare forskning

I följande avsnitt redogörs forskning om grundläggande förståelse för bråk, vanliga missuppfattningar om bråk samt elevernas förståelse för bråk över årskurserna 1–9. Vidare beskrivs hur en gynnsam undervisning kan utformas utifrån elevers kända missuppfattningar och avslutningsvis ges en sammanfattning av tidigare forskning.

3.5.1 Grundläggande bråkförståelse och vanliga missuppfattningar

Det är viktigt att tillägna mycket av den introducerande bråkundervisningen åt grundläggande bråkförståelsen så att eleverna skapar en förståelse för innebörden av bråk innan de börjar räkna med bråk (Sari et al., 2012, s. 17; Deringöl, 2019, s. 34). McIntosh et al. (1992, s. 4–6) beskriver att en grundläggande förståelse för bråk innebär att eleverna bör utveckla en förståelse för bråk som ett tal, det vill säga talförståelse. Bråktalet behöver förstås som ett rationellt tal som kan uttryckas och representeras på olika sätt. McIntosh et al. (1992, s. 4–6) menar dock till skillnad från Sari et al. (2012, s. 17) och Deringöl (2019, s. 34) att den grundläggande bråkförståelse även innefattar att räkna med bråk. Vidare beskriver Barbosa och Vale (2021, s. 4) bråktal som ett sätt att representera ett rationellt tal men att bråktalet är ett komplext begrepp som innefattar konceptuell förståelse lika väl som att förstå vad symbolerna i ett bråktal står för. Den grundläggande förståelsen för bråktal tolkas i denna studie som förståelsen för bråktals storlek och är studiens lärandeobjekt (lärandeobjektet beskrivs i avsnitt 4.2.1). Men för att eleven ska kunna skapa en förståelse för bråktals storlek behöver denna utveckla en förståelse för täljaren och nämnarens innebörd och dess relation till varandra. Vidare behöver eleven utveckla en förståelse för bråktalets relation till olika modeller och språkliga uttryck. Om den grundläggande bråkförståelsen ges för lite tid i de lägre årskurserna och introduktionen av räkneoperationer med bråk görs för tidigt kan det komma att påverka eleverna negativt i de högre årskurserna (Wijaya, 2017, s. 232). När elever inte tillägnar sig en grundläggande bråkförståelse uppstår missuppfattningar.

I följande text presenteras de tre områden *att förstå innebörden av täljaren och nämnaren*, *modeller av bråk* samt *bråk i tal och skrift*. Som nämnt ovan kan dessa anses agera som en bas för elevers grundläggande bråkförståelse, men det anses även vara vanligt förekommande att elever utvecklar missuppfattningar inom dessa områden. Vidare presenteras därmed tidigare forskning om vanliga missuppfattningar inom respektive område.

3.5.1.1 Att förstå innebörden av täljaren och nämnaren

Förståelse för grundläggande begrepp såsom täljaren och nämnaren agerar en stabil bas för elevernas fortsatta kunskapsutveckling inom bråk, där nämnaren anger hur många delar till exempel ett föremål är uppdelad i och täljaren anger hur många delar som avses (Sveider, 2016, s. 88–89). Ett konkret exempel på detta är en chokladkaka som delas i fem lika stora delar (nämnaren) men enbart två delar avses ätas upp (täljaren), vilket uttrycks i bråktalet 2/5. Begreppen behöver vara väl etablerade hos eleverna så att de har en förståelse för innebörden av täljaren och nämnaren (Wijaya, 2017, s. 232). Clarke et al. (2008, s. 375) menar dock att lärares definition och förklaring av begreppen nämnare och täljare kan betraktas som bristfällig. Lärare förklarar att nämnaren indikerar hur många delar helheten har delats upp i och täljaren indikerar hur många delar av helheten som avses. Denna förklarning kan skapa en förvirring hos eleverna i den fortsatta kunskapsutvecklingen eftersom detta enbart gäller bråktal mellan 0 och 1. Till exempel kan bråket 2/6 förklaras med hjälp av en pizza. Pizzan utgör helheten som delas upp i 6 delar (nämnaren). Eleven tar 2 av dessa bitar, vilket då är delarna som avses (täljaren). Men med exemplet 6/3 fungerar inte detta eftersom barnet inte kan äta 6 bitar pizza om pizzan bara har 3 delar.

Flera forskare redovisar att elever uppvisar missuppfattningar gällande innebörden av täljaren och nämnaren (Deringöl, 2019, s. 32–33; Mohyuddin & Khalil, 2016, s. 142; Nagy, 2017, s. 112). Mohyuddin och Khalil (2016, s. 142) beskriver att elever har svårt att se bråktal som del av en helhet, istället ser de nämnaren och täljaren som två separata tal på varsin sida av bråkstrecket. Nagy (2017, s. 112) har upptäckt att elever tolkar bråktal som en division mellan två separata tal. Denna missuppfattning är i likhet med det som framkommer i Deringöls (2019, s. 32–33) studie där lärare uppmärksammat att elever har svårigheter med att förstå relationen mellan nämnaren och täljaren. Detta medför att eleverna inte förstår att talet utgör en helhet, det vill säga att bråktalet har ett värde som finns mellan två heltal, till exempel mellan 0 och 1 eller 1 och 2.

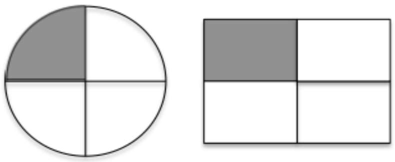
Förståelsen för bråktal innebär bland annat att eleverna ska kunna rangordna tal i storleksordning, för att kunna avgöra vilket bråktal som är störst respektive minst krävs en förståelse för vad täljaren och nämnaren representerar i bråktalet (McIntosh et al., 1992, s. 6). Deringöl (2019, s. 34) menar att när elever saknar denna förståelse så kan elever ha missuppfattningar som beror på att elever generaliserar sina tidigare kunskaper om heltal till bråktal. De överför kunskapen om relationen mellan heltal, det vill säga att ju högre siffran är desto större är talet, och då blir missuppfattningen att ju större tal i nämnaren desto större är bråktalet. Till exempel visar Mack (1990, s. 21) i sin studie att eleverna enkelt löser uppgifter i form av ”Vilken pizza har störst bitar, den som är delad i sjättedelar eller åttondelar?” men har markanta problem med att lösa uppgifter i form av “Avgör vilket bråktal som är störst, 1/6 eller 1/8”. En annan anledning till denna missuppfattning beskriver Mohyuddin och Khalil (2016, s. 144) kan bero på att eleverna inte har någon förståelse för att varje bråktal har ett unikt numeriskt värde. Det vill säga, att till exempel bråktalet 1/2 har ett numeriskt värde på 0,5 och att bråktalet 3/4 har värdet 0,75. Därför kan de inte avgöra vilket bråktal som är störst respektive minst.

3.5.1.2 Modeller av bråk

För att lyfta hur bråktal kan förstås i relation till olika innebörder av bråk kan olika modeller användas i bråkundervisningen (Barbosa & Vale, 2021, s. 4). Nedan presenteras modellerna *areamodellen*, *antalsmodellen* och *tallinjen* mer ingående. Då begreppet modeller används i resterande delar av denna studie är det dessa modeller som avses, utan vidare förklarning. Begreppet *representationer* används också i denna studie och syftar då till alla andra sätt ett tal kan representeras såsom i bilder, symboler och konkret material.

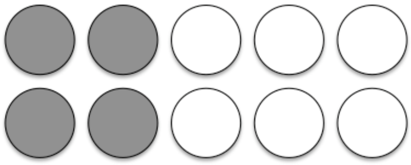
Förståelse för bråktals storlek och bråktal som del av helhet kan representeras med hjälp av areamodellen i olika former såsom cirklar eller rektanglar, vilka ofta konkretiseras genom fiktiva pizzor eller chokladkakor. Bråktalet representeras genom att modellen delas in i lika stora delar där det totala antalet delar visar bråktalets nämnare och sedan skuggas så många delar som täljaren avser (Sidney et al., 2019, s. 289). För att kunna utföra en uppgift av denna karaktär krävs det att eleven kan föreställa sig hur många lika stora delar som den geometriska figuren ska delas in i och samordna antalet delar som ska skuggas i relation till delar som figuren delats in i.

Dessutom krävs det att eleven vet hur skiljeväggen mellan dessa delar ska ritas för att delarna ska bli lika stora (Empson, 1999, s. 297).



Figur 1. Illustration som gestaltar areamodellen av bråket 1/4, skapad med inspiration från Nagy (2017).

Genom antalsmodellen illustreras del av antal i form av till exempel hur många kulor i en ask som är gröna. I motsats till areamodellen delas delarna upp, vilket medför att eleverna måste identifiera ett mönster i antal föremål relaterat till ett bråktal. Helheten blir i och med detta svårare att identifiera (Sveider, 2016, s. 22).



Figur 2. Illustration som gestaltar antalsmodellen av bråktalet 2/5, skapad med inspiration från Nagy (2017).

Samtliga rationella tal kan uttryckas i bråk-, decimal- och procentform (Barbosa & Vale, 2021, s. 4). Bråktal kan genom olika former av representationer tydliggöras för eleverna, en sådan representationsform är tallinjen. Tallinjen framställs av Siegler et al. (2011, s. 277) som oerhört fördelaktig vad gäller alla former av tal, stora som små, positiva som negativa. Vidare framhåller forskarna att tallinjen med fördel kan hjälpa elever att skapa en förståelse för bråktals storlek då de ordnas på en tallinje, i relation till de naturliga tal eleverna redan är bekanta med.

Figur 3. Illustration som gestaltar en tallinje vilken åskådliggör femtedelarna mellan 0 och 1, skapad med inspiration från Sveider (2016).

Modeller och representationer av bråk används i undervisningen för att underlätta elevers tänkande och mentala representation av bråk och kan hjälpa i kommande undervisning där matematiken inte visualiseras konkret (Cramer & Wyberg, 2009, s. 228). Trots detta framkommer det i Deringöls (2019, s. 34) studie att lärare identifierat att elever har svårigheter med att lösa uppgifter som handlar om att visa bråktal med visuella modeller eller representationer. Detta är något som även Barber (2021, s. 202) belyser i sin studie där eleverna i en sjätte klass stöter på problem med att göra korrekta modeller av bråktal. En möjlig anledning till detta är att elever har svårt att representera ett bråktal i modeller eftersom eleverna missuppfattar att bråktalets delar behöver vara lika stora. Vidare poängterar Wijaya (2017, s. 230) att om eleverna ges för få tillfällen att träna på att dela lika kan det leda till att eleverna enbart lär sig att dela föremål i ett visst antal delar, men inte att alla delar måste vara lika stora.

Andra missuppfattningar som Mohyuddin och Khalil (2016, s. 142) identifierat när det kommer till modeller av bråk är att elever har svårigheter att koppla det matematiska uttryckssättet för ett bråktal till modeller. Det kan handla om modeller av geometriska former med skuggade delar som ska representera och kopplas till ett bråktal till exempel 1/3, 2/5 eller 5/8. Detta kan ha ett samband med det som Clark et al. (2008, s. 375) hävdar om att elever behöver bekanta sig med olika representationsformer och modeller av bråktal, för att sedan använda dessa kunskaper för att göra egna modeller eller visuella representationer. Om enbart en modell används i bråkundervisningen finns en risk att elevernas tänkande begränsas vilket kan leda till att eleverna använder modellen utan att förstå innebörden av den, menar Barber (2021, s. 205).

Ytterligare en missuppfattning som Nagy (2017, s. 112) presenterar är att elever använder sina kunskaper om bråk som delar av helhet när de ska placera ut ett tal på tallinjen och delar därför upp tallinjen utifrån de delar som bråket syftar till. Om elever ska placera ut till exempel bråktalet 1/4 på tallinjen så delar eleven tallinjen i fyra lika stora delar oavsett om tallinjen visar 0–1 eller till exempel 0–3. Hon menar att detta är ett resultat av att eleverna inte förstår likheter och skillnader mellan olika representationsformer, de förstår inte heller att bråktalen har en relation till talet 1.

3.5.1.3 Bråk i tal och skrift

När bråktal formuleras i tal och skrift används uttryck såsom hälften, dubbelt och en tredjedel, vilket betyder att elever behöver kunna koppla dessa uttryck till det specifika bråktalet (Mohyuddin & Khalil, 2016, s. 142). Detta är något som fler studier visar att elever har svårigheter med. I Deringöls (2019, s. 33) studie redovisas det att lärare upplever att det förkommer missuppfattningar kring bråkbegreppen när eleverna uttrycker bråk i tal. Eleverna påvisade även svårigheter kring bråkbegrepp som relaterar till att läsa och skriva. Barber (2021, s. 202) belyser även i sin studie att eleverna har svårigheter med att förklara bråktal och bråkbegrepp. Detta bekräftas även av Mohyuddin och Khalil (2016, s. 142) som menar att elever inte kopplar samman eller identifierar begreppen hälften, en fjärdedel och en tredjedel när talen uttrycks med siffror i bråkform. I likhet med detta framhävs det i Macks (1990, s. 21) studie att elever kan lösa elevnära bråkuppgifter, men då samma bråkuppgift presenteras enbart symboliskt har elever svårigheter med att lösa uppgiften.

3.5.2 Elevers förståelse om bråk över årskurserna

Trots att elever har blivit undervisade om och arbetat med bråk så visar forskning att elevernas missuppfattningar förblir desamma och elevernas kunskapsutveckling är svag. För att förbättra progressionen i undervisningen fastslår Nagy (2017, s. 111) att en viktig aspekt är att utgå från elevernas förståelse om bråk. Med grund i detta är det relevant att lyfta vad tidigare forskning kommit fram till vad gäller kunskapsprogressionen mellan olika årskurser.

I sin studie konstaterar Nagy (2017, s. 112–113) att elever i årskurs 3, 6 och 9 har samstämmiga svårigheter vad gäller bråk/rationella tal. Hon förtydligar att svårigheterna handlar om redan kända missuppfattningar såsom att placera ut tal på tallinjen, delar av antal och delar av helhet. En annan studie av Jordan et al. (2017, s. 628) visar även den att elever i årskurs 4 och 6 har minimal progression i kunskapsutvecklingen inom bråk. De poängterar att eleverna endast har en basförståelse trots flera år av undervisning inom bråk och rationella tal. Vidare visar Barbers (2021, s. 628) studie att elever i årskurs 6 inte har tillräckligt med förståelse för att klara uppgifter som är avsedda för elever i lägre årskurser, trots att deras bråkundervisning pågått sedan tidiga årskurser.

3.5.3 Undervisning som gynnar elevers bråkkunskaper

Ovan nämnd forskning visar att undervisningen inte lyckats med att få elever att utveckla tillräckliga kunskaper om bråk. Nagy (2017, s. 111–112) konstaterar att då en progression i undervisningen ska ske är det viktigt att utgå ifrån elevernas förståelse och gradvis öka kraven och kunskapsinnehållet i undervisningen. Om kraven istället blir för höga minskar elevers motivation, men om kraven och innehållet istället blir desamma under utbildningen så uppstår meningslös repetition.

Det är som lärare viktigt att utgå från elevers faktiska kunskaper och tidigare erfarenheter inom ett nytt undervisningsområde (Karlsson & Kilborn, 2020, s. 292). För att kunna utgå från faktiska kunskaper så hävdar Karlsson och Kilborn (2020, s. 297) att lärare behöver ha tillräckliga ämneskunskaper för att veta vilka förkunskaper som behövs av eleverna för att avgöra hur undervisningen ska konstrueras. Det vill säga, lärare måste själva behärska innehållet som ska undervisas för att eleverna på bästa möjliga sätt ska kunna skapa goda kunskaper. Barber (2021, s. 207–208) påtalar att det dessutom är viktigt att utgå från elevers missuppfattningar i såväl planeringen, utförandet och den uppföljande reflektionen av undervisningen. Då lärare är uppmärksamma om vilka missuppfattningar eleverna har, kan dessa förebyggas med hjälp av olika metoder, såsom till exempel muntliga uttryck, ledande frågor och repetition. Andra exempel på hur forskare menar att undervisningen kan behandla elevers missuppfattningar är att använda konkret material och bilder, vilket kan påverka förståelsen för matematiska begrepp positivt (Deringöl, 2019 s. 34). Cramer och Wyberg (2009, s. 228) menar att konkreta modeller av olika slag är till fördel för elevers lärande då dessa ger eleverna möjlighet att skapa mentala representation vilket kan hjälpa dem i den kommande undervisningen med mer abstrakt matematik. Clark et al. (2008, s. 378) menar också att det är viktigt att arbeta laborativt med konkret material i bråkundervisningen. Genom att till exempel låta eleverna vika eller klippa pappersremsor som föreställer helheten i olika delar ges de möjlighet att möta olika bråkdelar. Wijaya (2017, s. 232) poängterar även att det är viktigt att lärare arbetar med olika modeller och representationsformer tillsammans med läroböcker, för att utveckla grundläggande kunskaper. Ett annat sätt att möta elevers missuppfattningar i undervisningen är att uttrycka bråk i relation till elevnära vardagssituationer, till exempel kan eleverna beskriva hur stor del av klassen som är pojkar respektive flickor (Deringöl, 2019, s. 34).

Genom ett varierat arbetssätt med olika modeller och representationer ges eleverna en större möjlighet att ta till sig kunskaper om bråk. Ett sätt att tydliggöra bråktals storlek i undervisningen är att använda tallinjer (Clarke et al., 2008, s. 375–377). Genom att placera ut diverse bråktal på en tallinje tillsammans med några naturliga tal som eleverna redan är bekanta med skapas ett tillfälle där eleverna har möjlighet att lära sig bråktals storlek i relation till naturliga tal. Trots att tallinjen är en ganska abstrakt modell är den väldigt användbar i elevers bråkinlärning (Cramer & Wyberg, 2009, s. 229). Dessutom ges eleverna möjlighet att förstå att ett bråktal är ett tal och inte två samt att talet representerar en punkt i mätbart avstånd mellan noll och ett då det representeras på en tallinje (Schumacher et al., 2018, s. 192). Nagy (2017, s. 90–91) visar i sin studie att fler tal än till exempel 1/2 eller 1/4 behöver placeras på tallinjen för att förtydliga bråktals storlek, även decimaltal och heltal i bråkform behövs för att tydliggöra och uppmärksamma relationen mellan talen och dess placering på tallinjen. Det behöver alltså finnas olika talföljder på tallinjen för att vidga elevernas förståelse för bråktal. Vidare menar Nagy (2017, s. 90–91) att undervisningen behöver utgå från vad eleverna vet om decimaltal och att detta kan bidra till att eleverna förstår att även bråktal har en specifik punkt på tallinjen. Men även om tallinjen är en användbar modell för elevers bråkinlärning poängterar Barber (2021, s. 205) att det är viktigt att variera olika modeller och arbetssätt i syfte att stimulera elevers bråkinlärning ytterligare. Nagy (2017, s. 113) hävdar däremot att variation mellan representationsformer och modeller inte per automatik leder till en kunskapsutveckling utan det kan till och med påverka progressionen negativt om inte övergången mellan de olika representationerna sker på ett medvetet sätt. Ett skifte mellan de olika modellerna eller representationsformerna behöver kopplas samman så att eleverna förstår att samma bråk kan uttryckas på till exempel både en tallinje och genom bråkstavar. Barber (2021, s. 210) belyser vikten av att eleverna ska motivera sitt tänkande i deras arbete för att synliggöra elevernas progression i arbetet med olika material och representationsformer.

3.5.4 Sammanfattning av tidigare forskning

Bråkundervisningen upplevs ofta som svår (Clarke et al., 2008, s. 373; Deringöl, 2019, s. 32–35; Wijaya, 2017, s. 231–233). För att eleverna ska kunna skapa en förståelse för innebörden av begreppet bråk krävs att tid läggs på introduktionen av den grundläggande bråkförståelsen och viktiga aspekter för bråkinlärningen (Clarke et al., 2008, s. 374; Sari et al., 2012, s. 17). Övergången till räkneoperationer med bråk får därmed inte ske för snabbt (Deringöl, 2019, s. 34). Till följd av otillräckliga grundkunskaper kan missuppfattningar uppstå kring områdena nämnaren och täljaren, modeller av bråk och bråk i tal och skrift (Mohyuddin & Khalil, 2016, s. 142–144). Som lärare är det i undervisningen viktigt att ha koll på elevernas kunskapsnivå, för detta krävs att lärare själva behärskar ämnesinnehållet som ska undervisas, menar Karlsson och Kilborn (2020, s. 297). En gynnsam undervisning bör utgå från elevernas missuppfattningar (Barber, 2021, s. 207–208), detta genom att bland annat använda olika modeller och konkret material i bråkundervisningen (Deringöl, 2019 s. 34). Men trots direktiv om en anpassad undervisning utifrån elevers missuppfattningar visar studier likt Nagys (2017, s. 111–113) att en progression av elevers bråkkunskaper är minimal mellan grundskolans samtliga årskurser, vilket hon påpekar beror på undervisningens kvalitet och problematik kring att utforma progression i undervisningen.

4 Teoretiskt perspektiv

Utifrån uppsatsens syfte om att utforska vilka variationsmönster som går att identifiera i lärares samtal om undervisning är variationsteorin ett lämpligt teoretiskt perspektiv och kommer fortsättningsvis beskrivas och motiveras. Variationsteorin grundas i fenomenografin, därmed inleds texten med en beskrivning av fenomenografin för att förmedla variationsteorins ursprung. Sedan redogörs för variationsteorin, dess centrala begrepp och relation till denna specifika studie.

4.1 Fenomenografin

Den fenomenografiska metodansatsen har som mål att skapa beskrivningar av människors sätt att uppfatta olika fenomen i sin omvärld, fenomenografin syftar alltså till att fördjupa och vidga förståelsen om hur människan uppfattar fenomen på skilda sätt (Dimenäs, 2020, s. 30; Dahlgren & Johansson, 2019, s. 179). Detta med grund i att det inom fenomenografin antas att olika personer uppfattar omvärlden på skilda sätt och därmed tänker och handlar olika utifrån sin egen uppfattning. Vidare förklarar Kroksmark (2007, s. 6) fenomenografin som en beskrivande ansats där syftet är att förstå och skildra fenomen utifrån ett mänskligt perspektiv, snarare än att beskriva hur något faktiskt är. Centralt inom fenomenografin är att man vill uppmärksamma variationer och skillnader mellan människors sätt att uppfatta ett specifikt fenomen, snarare än likheter (Dahlgren & Johansson, 2019, s. 179). I och med att fenomenografin vill åskådliggöra människans olika uppfattningar av diverse fenomen är *uppfattning* det mest centrala begreppet inom teorin (Kroksmark, 2007, s. 6). Dahlgren och Johansson (2019, s. 179) beskriver att en uppfattning är ett sätt att förstå eller erfara något. Då man frågar ett antal människor om deras uppfattning av ett och samma fenomen kommer det med säkerhet uppenbaras olika uppfattningar. De olika uppfattningarna av ett och samma fenomen kallas för utfallsrummet (Dahlgren & Johansson, 2019, s. 180).

4.2 Variationsteorin

Utifrån fenomenografin har nya teorier om lärande skapats, bland annat variationsteorin. Då variationer av olika aspekter i ett och samma fenomen synliggörs kan en ökad förståelse för det givna fenomenet ges, vilket är definitionen av fenomenografins utveckling till variationsteorin (Dahlberg & Johansson, 2019, s. 189). Lo (2014, s. 27) beskriver att det inom variationsteorin är centralt att se individens medvetande som flexibelt och att individen kan fokusera och begränsa sitt medvetande till flera relevanta aspekter för ett specifikt fenomen medan andra aspekter och upplevelser hamnar i bakgrunden. Syftet med att använda variationsteorin som ansats är att synliggöra variationer i olika individers sätt att förstå ett fenomen, för att därefter kategorisera dessa uppfattningar (Kihlström, 2007, s. 157). Nedan beskrivs de inom variationsteorin centrala begreppen *lärandeobjekt*, *kritiska aspekter* och *variationsmönster,* därefter sätts dessa i relation till denna specifika studie.

4.2.1 Lärandeobjektet

Ett av de mest väsentliga begreppen inom variationsteorin beskriver Lo (2014, s. 51) är *lärandeobjekt* vilket är det individen förväntas lära sig. I denna studie är lärandeobjektet förståelsen för bråktals storlek, en grundläggande del i förståelsen för rationella tal. Lärandeobjektet hade även kunnat vara förståelsen för rationella tal, men då det innefattar många olika delar resulterar det i en omfattande analys av materialet och därför har lärandeobjektet avgränsats till bråktals storlek. Dock poängterar Lo (2014, s. 54) att lärandeobjektet måste läras i relation till dess omvärld. Lo (2014, s. 54–55) förklarar detta genom exemplet att ett enskilt tal, till exempel 10, saknar innebörd utan dess relation till ett numeriskt system. Det vill säga, i relation till decimalsystemet eller det binära talsystemet har talet 10 olika innebörd. Det gäller även bråktal, till exempel så har en 1/4 deciliter och en 1/4 av världens befolkning olika innebörd för omvärlden. Vidare förklarar Lo (2014, s. 58–59) att lärandeobjektet kan ses utifrån två olika aspekter, den specifika och den generella. Den specifika aspekten av lärandeobjektet syftar till det innehåll individen ska lära sig. Den generella aspekten av lärandeobjektet syftar till mer långsiktiga färdigheter som individen utvecklar med grund i innehållet.

4.2.2 Kritiska aspekter

För att kunna uppnå en djupare förståelse för lärandeobjektet behöver eleverna utveckla en förståelse för lärandeobjektets kritiska aspekter. Det är därmed även dessa läraren behöver fokusera på och utforma undervisningen utifrån. De kritiska aspekterna kan vara begrepp, förståelse och perspektiv vilka eleven ännu inte behärskar eller är medveten om (Lo, 2014, s. 83). För att uppnå en förståelse för bråktals storlek krävs det att eleven skapar en förståelse för bråktalet och dess olika delar (täljaren, nämnaren och bråkstrecket) samt innebörden av relationen mellan dessa. Vidare behöver eleven skapa en förståelse för att bråktalet kan uttryckas på olika sätt i tal och skrift, till exempel *1/6* och *en sjättedel* (Lo, 2014, s. 83). För denna studie är de kritiska aspekterna därmed att förstå innebörden av täljaren, att förstå innebörden av nämnaren, att förstå relationen mellan täljaren och nämnaren samt att förstå att bråktalet kan uttryckas på skilda sätt. Det är dock viktigt att poängtera att de kritiska aspekterna är individuella och skiljer sig åt från elev till elev, det är därmed viktigt att som lärare identifiera dessa redan vid introduktionen av ett nytt lärandeobjekt. Detta kan bland annat göras via läroböcker, kunskapsmätning eller kollegiala utbyten (Lo, 2014, s. 85). För denna studie har de kritiska aspekterna identifierats utifrån tidigare forskning om elevers förståelse för och kunskaper om rationella tal.

4.2.3 Variationsmönster

Olika variationsmönster kan lärare använda i undervisningen med målet att synliggöra ett lärandeobjekts kritiska aspekterna för eleven och främja dess lärande (Lo, 2014, s. 101–102). Det förekommer fyra olika variationsmönster vilka benämns som kontrast, separation, generalisering och fusion, nedan förklaras dessa ingående.

För att en elev ska kunna urskilja ett lärandeobjekts kritiska aspekter behöver det skapas en *kontrast* mot ett annat objekt, det vill säga att genom att uppfatta skillnaden mellan två skilda objekt kan eleven skapa en medvetenhet om det specifika lärandeobjektet (Lo, 2014, s. 104–105). Då eleven till exempel ska lära sig vad en triangel är bör en jämförelse göras med något som inte är en triangel, till exempel en rektangel. Det uppstår då en kontrast mellan olika objekt och eleven kan bli medveten om lärandeobjektets värde, det sker en *separation.* Detta innebär att det nya värdet geometriska former kan bli synligt för eleven, alltså att triangeln är en geometrisk form och inte bara en figur med tre sidor utan den ingår i en större kontext (Lo, 2014, s. 110). Vid variationsmönstret *generalisering* har eleven skapat en medvetenhet om de variationer som utmärker lärandeobjektet, detta medför att eleven kan generalisera sina kunskaper mellan olika objekt (Lo, 2014, s. 124). För att fortsätta på exemplet om trianglar kan eleven genom att se rätvinkliga, trubbvinkliga och spetsvinkliga trianglar göra en generalisering och därmed förstå att samtliga företräder den geometriska formen triangel trots att vinklarnas storlek inte är identiska. Vid *fusion* ska flera olika kritiska aspekter förstås i förhållande till varandra, men de ska även förstås i förhållande till lärandeobjektet som en helhet (Lo, 2014, s. 117). Genom att sammanfoga olika kritiska aspekter och skapa ett förhållande mellan dessa medför det att helheten för eleven blir tydligare, menar Lo (2014, s. 119). Exempelvis förstår eleven förhållandet mellan de kritiska aspekterna tre sidor, tre vinklar och vinkelsumman 180 grader samt att dessa utgör helheten för den geometriska formen triangel.

4.3 Variationsteorin i denna studie

Variationsteorin kommer att användas för att analysera, presentera och diskutera studiens resultat. Eftersom lärare uppfattar hur en gynnsam undervisning kan utformas på skilda sätt påverkar det hur de tänker kring den fortsatta bråkundervisningen. Variationsmönster i lärarnas samtal kan då synliggöras, vilket vidare bidrar till att studiens syfte och tillhörande frågeställningar kan uppfyllas.

I denna studie definieras lärandeobjektet som förståelse för bråktals storlek. De kritiska aspekterna är förståelsen för täljarens innebörd, förståelsen för nämnarens innebörd, förståelsen för relationen mellan täljaren och nämnaren samt förståelsen för hur bråktalet kan uttryckas på olika sätt. Utifrån detta skapades ett ramverk (se figur 4) för att sortera in lärarnas uttalanden om varje kritisk aspekt. Lo (2014, s. 122) poängterar att variationsteorins variation inte syftar till diverse undervisningsstrategier, istället syftar variationen till lärandeobjektets kritiska aspekter. Då aspekter hos ett lärandeobjekt behålls konstanta medan andra aspekter varieras skapas ett variationsmönster. Inom varje kritisk aspekt studeras och analyseras vilka variationsmönster som uppstår i lärarnas samtal. Nedan tydliggörs studiens kritiska aspekter och möjliga variationsmönster i figur 4.

Kritisk aspekt	**Varierande aspekt**	**Konstant aspekt**	**Variationsmönster**
Förståelse för täljarens innebörd	Täljaren	Nämnaren och bråkstrecket	Separation
Förståelse för nämnarens innebörd	Nämnaren	Täljaren och bråkstrecket	Separation
Förståelse för relationen mellan täljaren och nämnaren	Täljaren och nämnaren	Allt annat	Fusion
Förståelse för relationen mellan täljaren och nämnaren	Allt annat	Täljare och nämnare	Fusion
Förståelsen för relationen mellan bråktal i tal, skrift och modeller	Bråktalets uttrycksform i tal, skrift och modeller	Bråktalet	Generalisering

Figur 4. Tabell som tydliggör studiens kritiska aspekter och möjliga variationsmönster.

5 Metod

I detta avsnitt beskrivs val av metod och urval utifrån studiens syfte. Vidare ges en beskrivning av utformningen av studien och samtalsunderlaget som användes vid intervjuerna samt analys av det insamlade materialet utifrån fenomenografin och variationsteorin. Därefter beskrivs begreppen reliabilitet och validitet i relation till studien och sist presenteras etiska överväganden som beaktas i förhållande till studiens metod.

5.1 Val av metod

Studiens syfte är att utforska hur lärare samtalar om bråkundervisning, i årskurs 1–3, utifrån kända missuppfattningar om rationella tal. För att besvara syftet krävs att lärares samtal om bråkundervisning utifrån kända missuppfattningar blir synliga. Vid undersökningar kan kvalitativa och kvantitativa metoder användas. Kvalitativa metoder används när syftet är att tolka och förstå resultatet, detta i kontrast till kvantitativa studier som används när resultatet ska generaliseras, förklaras och dras slutsatser om (Stukát, 2011, s. 34–35). Eftersom studiens syfte är att utforska och förstå lärares samtal av undervisning så passar sig en metod av kvalitativ karaktär och syftet kan uppnås med hjälp av olika typer av kvalitativa metoder. Metoderna kan exempelvis vara olika intervjumetoder eller en kvalitativ enkät. Fördelaktigt med dessa metoder är att deltagarna ges möjlighet att tala fritt och utveckla sina tankar (Dimenäs, 2020, s. 94–95). Forskaren ges djupa, nyanserade och utförliga svar av få deltagare (Larsen, 2018, s. 36). Dessutom kan vi som intervjuare ställa följdfrågor och klargöra eventuella missförstånd. Detta är något som inte är möjligt i samma mån i jämförelse med en enkät där frågorna redan är ställda. Detta innebär att det är svårare att reda ut missförstånd och ställa följdfrågor, till skillnad från i en intervju (Ejlertsson, 2019, s. 15–16). Intervju som metod finns i många olika former och valet för denna studie blev semistrukturerad fokusgruppsintervju, med grund i möjligheten att förklara tidigare forskning, ställa följdfrågor och möjliggöra samtal mellan informanterna. Nedan redogörs och argumenteras för valet av semistrukturerad intervju och fokusgruppsintervju.

5.1.1 Semistrukturerad intervju

Inför en semistrukturerad intervju konstruerar intervjuaren en flexibel intervjuguide. Intervjuaren formulerar då några färdiga frågor eller stickord men är under intervjuns gång flexibel vad gäller både ordningsföljd och följdfrågor. I regel formuleras följdfrågorna i syfte att få informanterna att utveckla sina svar och bli mer precisa. Den viktigaste uppgiften intervjuaren har under intervjun är att genom frågorna och följdfrågorna få tillgång till den information som krävs i relation till studiens problemformulering och syfte (Larsen, 2018, s. 139). En intervju kan även vara av strukturerad karaktär, då skapar intervjuaren ett frågeformulär i relation till problemformuleringen. Fördelen med den strukturerade intervjun är att samtliga informanter får svara på samma frågor i samma följd, nackdelen är istället att mycket information riskeras att gå förlorad då följdfrågor inte är aktuella (Larsen, 2018, s. 138–139). En intervju kan även vara ostrukturerad, målet i en sådan är att informanten ska tala fritt och intervjuaren ska styra minimalt. Fördelen med denna form av intervju är att intervjuaren får ta del av mycket information, nackdelen är istället att informationen kan vara oanvändbar och mycket arbete krävs vid analys av materialet (Larsen, 2018, s. 139–140). Då syftet med denna studie är att utforska hur lärare samtalar om undervisning utifrån kända missuppfattningar om rationella tal riskerades många tankar gå förlorade om intervjun hade varit strukturerad. Dessutom riskerades samtalet att handla om irrelevanta saker om intervjun skulle vara ostrukturerad, därför valdes en semistrukturerad intervju för denna studie.

5.1.2 Fokusgruppsintervju

Vid en fokusgruppsintervju samlas en vald grupp informanter i syfte att samtala om ett specifikt ämne. Dimenäs (2020, s. 105) och Stukát (2011, s. 43) menar att i en intervju mellan två personer (intervjuare och informant) finns en risk att samtalet blir mindre nyanserat i jämförelse med fokusgruppsintervjuer där flera parter kan komma till tals. Larsen (2018, s. 141) menar att det vid en gruppintervju är lättare att få informanterna att komma till tals, men även att samtalet blir mer nyanserat då informanter kan komplettera och fylla ut andra informanternas uttalanden. Detta betyder att det ges förutsättningar att få ett nyanserat resultat i förhållande till syftet med att utforska lärares samtal om hur en gynnsam bråkundervisning kan utformas. Därmed valdes fokusgruppsintervjuer och inte intervjuer med enskilda informanter för denna studie.

Larsen (2018, s. 141) nämner att en nackdel med fokusgruppsintervjuer är att ett grupptryck kan uppstå, det vill säga att informanterna påverkas negativt av varandra och vågar därmed inte uttrycka sig. Med detta i åtanken har deltagarna till fokusgrupperna valts ut via arbetslag där samtliga är bekanta och bekväma med varandra, därmed minimeras risken för grupptryck samtidigt som chansen för givande samtal ökar. En eventuell nackdel med att deltagarna har en tidigare relation till varandra är att relationen mellan deltagarna är given vilket kan leda till att vissa deltagare inte vågar komma till tals på grund av redan befintligt grupptryck eller givna roller samt att samtalet kan ledas mot annat irrelevant innehåll. Detta är något som behöver tas i beaktning, intervjuarna har därmed i uppgift att under samtalets gång hålla en röd tråd och styra samtalet i rätt riktning och vara uppmärksamma på om någon inte får komma till tals (Larsen, 2018, s. 141). I denna studie behandlades varje fokusgrupp som bidragstagande till en gemensam utsaga. Larsen (2018, s. 141) nämner att informanterna i en fokusgruppsintervju med fördel kan föra en diskussion där de håller med eller motsäger varandra. Detta kan medföra en risk i form av att intervjuarna inte håller koll på vad som sägs av vem. Det är dock inte viktigt att hålla isär vem som säger vad i denna studie, men Dahlgren och Johansson (2019, s. 183) påpekar att inspelning av intervjuer ändå är nödvändigt för att minska bortfallet av viktigt innehåll. Därmed spelades fokusgruppsintervjuerna in. Vidare menar Stukát (2011, s. 46) att det är till fördel att i situationer likt dessa vara två intervjuare då de kan upptäcka mer. Utifrån detta har båda intervjuarna medverkat vid samtliga intervjuer.

5.2 Urval

För denna studie har ett bekvämlighetsurval gjorts och deltagarna är verksamma och aktiva lärare inom matematik i årskurserna 1–3. Dimenäs (2020, s. 95) beskriver att ett urval av bekvämlighetssynpunkt är vanligt förkommande vid kvalitativa studier. Bekvämlighetsurvalet innebär att deltagarna inte är valda med ett specifikt geografiskt eller kunskapsmässigt kriterium eller liknande, utan är valda utifrån att det just är bekvämt att ta dessa deltagare. Bekvämlighetsurvalet för denna studie gjordes utifrån redan etablerade kontakter på olika skolor. Stukát (2011, s. 46, 73) anser att lagom antal är 3–6 personer då gruppen varken får bli för liten eller för stor men också i att det finns risk för bortfall, på grund av till exempel sjukdom. Varje fokusgrupp innehöll tre informanter och informanterna i respektive grupp arbetar i samma arbetslag. Detta betyder att lärarna i varje grupp vid intervjutillfällena var bekanta med varandra sedan innan. Valet av verksamma och aktiva matematiklärare i årskurs 1–3, och inte *legitimerade* verksamma lärare, grundas i egna erfarenheter av att många lärare med erfarenhet inom området inte alltid är legitimerade, men besitter ändå kompetens och erfarenhet som denna studie vill synliggöra.

5.3 Genomförande

I följande avsnitt presenteras studiens genomförande vilket inleddes med en litteratursökning utifrån studiens problemområde och syfte. Därefter beskrivs konstruerandet av underlaget till fokusgruppsintervjuerna vilket utgörs av samtalsunderlag, mini-föreläsning och intervjufrågor. Avslutningsvis presenteras genomförandet av fokusgruppsintervjuerna.

5.3.1 Litteratursökning

Tidigare forskningslitteratur om bråkundervisning söktes via databaserna ERIC (Proquest), ERIC (Ebsco) och Summon. Sökorden misconceptions, difficulties, fraction, teach* och learn* användes i olika kombinationer för att få fram forskning om utmaningar inom bråkundervisningen. På grund av att resultaten av sökorden i olika kombinationer inkluderade alla åldrar och skolformer gjordes avgränsningar vad gäller elevers ålder i syfte att få fram väsentligt forskningsunderlag för denna studie. De åldrar som är relevant för vår studie är 5–13 år, utifrån detta lades sökorden elementary school och primary school till. I samtliga databaser avgränsades urvalet av artiklar till peer-reviewed, därefter gjordes en manuell avgränsning där artiklar som inte fanns i fulltext sållades bort. I databasen ERIC (Ebsco) gjordes även en avgränsning till artiklarnas publiceringsdatum med urvalet år 2000 till år 2021. För att välja artiklar med relevant innehåll för denna studie lästes först artiklarnas rubriker och sedan abstrakten. Utöver litteratursökning via de ovan givna databaserna har litteratur även letats med hjälp av den så kallade snöbollseffekten via artiklarna som valdes ut. Dessutom har sökningar gjorts via Google Scholar bland annat med sökorden "bråkundervisning”, “bråkinlärning”, “förkunskaper bråk” samt enskilda författare.

5.3.2 Konstruktion av studiens design

Inför fokusgruppsintervjuerna analyserades tidigare forskning utifrån vad som framkommit om missuppfattningar gällande rationella tal. Det vill säga att elever har specifika missuppfattningar inom olika områden och utifrån dessa har ett samtalsunderlag (uppgifter och lösningar), en miniföreläsning samt intervjufrågor konstruerats.

5.3.2.1 Samtalsunderlaget

Samtalsunderlaget för intervjuerna kunde skapas på olika sätt, antingen kunde både uppgifter och elevlösningar skapas med inspiration från tidigare forskning. Alternativt så kunde enbart uppgifter skapas med inspiration från tidigare forskning men elevlösningarna inhämtas istället från nutida elever. Fördelen med att skapa uppgifter och elevlösningar utifrån tidigare forskning är att färre etiska aspekter behöver tas hänsyn till, eftersom varken lärare, elever eller upphovsmän till tidigare arbeten behöver lämna samtycke till medverkan. En nackdel med detta tillvägagångssätt är att elevlösningarna inte blir autentiska. Ytterligare en nackdel med detta alternativ är att uppgifterna och elevlösningarna måste tolkas för att kunna konstruera liknande uppgifter och lösningar. Tolkningarna kan medföra att uppgifterna och elevlösningarna blir missvisande. Fördelen med att samla in lösningar av uppgifterna från elever är att lösningsförslagen blir autentiska. För att bibehålla objektivitet så kan elevlösningarna inhämtas från andra skolor än där lärarna arbetar. Nackdelen med detta är att höga krav ställs vad gäller de etiska aspekterna. Samtycke måste inhämtas från elever och vårdnadshavare samt att anonymitet måste säkerställas. Vad gäller uppgifterna gäller samma för- och nackdelar som i det första alternativet. Eftersom elevlösningarnas autenticitet inte påverkar studiens resultat och med tanke på de etiska aspekterna så valdes det förstnämnda alternativet för denna studie, det vill säga att skapa både uppgifter och elevlösningar med inspiration från tidigare forskning.

Elevuppgifterna och lösningsförslagen (se bilaga 2) konstruerades som tidigare nämnts utifrån tidigare forskning gällande missuppfattningar om bråk. Uppgifterna innehåller enkla bråktal såsom 1/2 och 1/4 eftersom studien avser intervjua verksamma lärare i årskurserna 1–3, där undervisningen ska innefatta enkla bråktal (Skolverket, 2021, s. 11).

5.3.2.2 Mini-föreläsningen

Utifrån den tidigare nämnda kategoriseringen utformades en mini-föreläsning och en tillhörande Power-Point. Mini-föreläsningen presenterade tidigare forskning om vilka missuppfattningar elever kan ha gällande bråk inom respektive område: bråktals storlek, innebörden av täljaren och nämnaren, modeller av bråk samt bråk i tal och skrift. Vad gäller till exempel täljaren och nämnaren presenterades bland annat missuppfattningen om att elever tror att ju större nämnaren är desto större är talet. Föreläsningens syfte var för att förmedla vad forskning säger om elevers missuppfattningar om bråk till de medverkande informanterna. För att tydliggöra presenterades alltså inte lärandeobjektets kritiska aspekter utan endast vanliga förekommande missuppfattningar.

5.3.2.3 Intervjufrågorna

Inför intervjuerna skapades ett fåtal frågor med syfte att användas flexibelt under intervjuns gång så att fokuset skulle riktas mot undervisningen och inget annat samt att samtalet skulle flyta på. Följande frågor formulerades inför intervjutillfällena och användes sporadiskt under samtalen.

- Vad är viktigt att tänka på i undervisningen som rör liknande uppgifter?
- Vad är viktigt att eleverna förstår?
- Utifrån dessa felaktiga lösningar, hur skulle ni vilja utforma en undervisning som är tänkt att förhindra att dessa fel blir återkommande hos eleven?

5.3.3 Genomförandet av intervjuerna

Underlaget för lärarnas samtal bestod som tidigare nämnt av bråkuppgifter och elevlösningar. Uppgifterna och tillhörande elevlösningarna presenterades för lärarna på intervjutillfället. Sammanlagt genomfördes fyra stycken intervjuer med totalt två olika lärargrupper. Varje lärargrupp bestod av tre lärare och varje grupp genomförde två intervjuer vardera, där varje intervju tog 35–45 minuter att genomföra. Intervjuerna genomfördes digitalt via Zoom och samtliga intervjuer spelades in via röstinspelning på telefon. Nedan beskrivs den första och andra intervju-träffen separat. Samtliga lärargrupper hade identiskt upplägg på träff ett respektive träff två.

Inledningsvis informerades informanterna om intervjuns upplägg och enkla funktioner i Zoom. Därefter presenterades studiens problemområde och syfte med stöd av en Power Point. Fortsättningsvis genomfördes mini-föreläsningen, även det med stöd av en Power Point. Informanterna gavs sedan möjlighet att delge sina tankar om den tidigare forskningen. Intervjun fortsatte genom att samtalsunderlaget med hälften av elevuppgifterna presenterades för deltagarna. Färdigformulerade intervjufrågor ställdes och informanterna uppmuntrades att föra ett samtal kring dessa. Anteckningar gjordes under samtalets gång, fortlöpande följdfrågor ställdes samt sammanfattning av lärarnas samtal för att försäkra att allt uppfattats korrekt. Sedan presenterades samma uppgifter, men med tillhörande elevlösningar, och samtalet fortsatte med grund i en fortsatt bråkundervisning. Det första intervjutillfället avslutades med att vi sammanfattade samtalet, tackade informanterna för deras deltagande och bekräftade tid och datum för den andra träffen.

Den andra träffen inleddes med en kort påminnelse om studiens syfte och problemområde, sedan gavs informanterna möjlighet att diskutera eventuella frågor och funderingar som uppkommit sedan den första intervjuträffen. Vidare fortlöpte träff två på liknande sätt som träff ett. Samtalsunderlaget med resterande uppgifter presenterades och ett samtal fördes utifrån dessa. Vidare presenterades de tillhörande elevlösningarna. Intervjun avslutades med en sammanfattning av samtalet, informanterna tackades för deras deltagande och informerades om att en kopia av uppsatsen kommer skickas ut då den är godkänd.

5.4 Analys av material

Analysen av det insamlade materialet genomfördes med utgångspunkt i den analysmodell Dahlgren och Johansson (2019, s. 184–188) presenterar, men har anpassats till denna studie. Nedan beskrivs analysens genomförande steg för steg.

Det första steget i analysen syftar till att forskaren ska bekanta sig med det transkriberade intervjumaterialet genom att läsa det gång på gång samt föra anteckningar som stöd för minnet (Dahlgren & Johansson, 2019, s. 184). Efter genomförandet av samtliga intervjuer transkriberades ljudfilerna och lästes sedan ett flertal gånger av oss båda.

Det andra steget i analysen handlar om att markera ut specifika och relevanta stycken av uttalanden från intervjuerna, vilka kan hjälpa att uppnå studiens syfte (Dahlgren & Johansson, 2019, s. 185). Styckena syftar till att ge en kort och representativ bild av dialogen om det aktuella lärandeobjektet och dess kritiska aspekter. Uttalanden som inte hjälper att uppnå studiens syfte sorteras i detta steg bort. En lärare i grupp två sa exempelvis “Prima presenterar bråk tidigt i tvåan i första boken”. Läraren talar här om ett specifikt läromedel och dess behandling av bråk, vilket inte hjälper att uppnå studiens syfte. På samma sätt sorteras uttalanden som “att klippa och klistra” eller “att pussla och spela memory” bort då dessa anses vara undervisningsstrategier och därmed inte relevanta för studien.

I det tredje analyssteget jämförs uttalandena i syfte att hitta skillnader, för att sedan placera dessa i ramverkets kategorier, vilka är följande:

- Förståelse för täljarens innebörd
- Förståelse för nämnarens innebörd
- Förståelse för relationen mellan täljaren och nämnaren
- Förståelse för relationen mellan bråktal i tal, skrift och modeller

Varje kategori gavs en varsin färg och sedan färgkodades samtliga relevanta uttalanden i transkripten utifrån dessa. För att skapa en tydlig överblick av det färgkodade materialet rekonstruerades ramverket (figur 4) från avsnitt 4.3 i form av att de två kolumnerna “lärares uttalanden” och “tolkning av lärares uttalanden” lades till, samtidigt som kolumnerna “varierande aspekt”, “konstant aspekt” och “variationsmönster” togs bort (se figur 5). I den nya kolumnen “lärares uttalanden” placerades uttalanden in i relation till de kritiska aspekterna, i kolumnen “tolkning av lärares uttalanden” skrevs tolkningar av uttalandena utifrån varierande och konstant aspekt för att sedan mynna ut i ett variationsmönster. För att tydliggöra detta steg av analysprocessen ges ett exempel av följande uttalande:

> Man skulle ju kunna jobba med att det är noll av delarna ibland, att man skriver noll fjärdedelar eller att man tar noll sjättedelar. Då blir det ju också tydligt att det där nere har ju liksom inget värde, det har ju bara en. Det förklarar ju bara hur många delar det är och har man noll så blir kanske det extra tydligt.

Detta citat placeras in i tabellen bredvid den kritiska aspekten *förståelse för nämnarens innebörd,* då det tolkas som att läraren genom denna form av undervisning önskar skapa en förståelse för nämnarens innebörd hos eleven. Detta utifrån att den varierande aspekten tolkas vara nämnaren, eftersom den varierar i form av fjärdedelar och sjättedelar. Den konstanta aspekten tolkas vara täljaren och bråkstrecket, där täljaren beskrivs som 0. Utifrån denna tolkning kan variationsmönstret separation sägas uppstå vid denna form av undervisningssituation.

Kritisk aspekt	Lärares uttalanden	Tolkning av uttalanden
Förståelse för täljarens innebörd	Man skulle ju kunna jobba med att det är noll av delarna ibland, att man skriver noll fjärdedelar eller att man tar noll sjättedelar. Då blir det ju också tydligt att det där nere har ju liksom inget värde, det har ju bara en. Det förklarar ju bara hur många delar det är och har man noll så blir kanske det extra tydligt.	Undervisningen önskar skapa en förståelse för nämnarens innebörd hos eleven. Den varierande aspekten tolkas vara nämnaren (fjärdedelar och sjättedelar). Den konstanta aspekten tolkas vara täljaren och bråkstrecket (täljaren är noll). Variationsmönstret separation uppstår.
Förståelse för nämnarens innebörd		
Förståelse för relationen mellan täljaren och nämnaren		
Förståelsen för relationen mellan bråktal i tal, skrift och modeller		

Figur 5. Rekonstruerad tabell av figur 4 som visar ett exempel på dess användning vid analysarbetet.

5.5 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet handlar om att en studie är tillförlitlig och trovärdig, det vill säga att studien är gedigen och har tillförlitlighet i sättet att samla in empiri och framställa resultatet (Larsen, 2018, s. 131). Det innefattar att resultatet tagits fram på det sätt som beskrivs i teori och analysmetod samt att resultatet inte visar något som inte är relevant eller sanningsenligt. Det inte är helt lätt att säkerställa reliabiliteten i kvalitativa studier eftersom resultatet sammanställs genom tolkningar av en situationsbunden kontext. Detta menar Larsen (2018, s. 129–132) bland annat beror på att det vid kvalitativa metoder förekommer många tolkningar från forskarens sida, dessutom finns det en risk att informanten i kvalitativa metoder påverkas negativt av situationen och/eller forskaren. Detta innebär att trovärdighet inte kan säkerställas av ett datamaterial som bygger på forskarens subjektivitet eller slumpmässiga omständigheter. Däremot kan kvalitativa studier medföra specifika exempel på hur lärare resonerar och samtalar om undervisning, detta är av vikt att undersöka även om det inte går att dra slutsatser om att alla lärare resonerar på samma sätt. För att uppnå den högsta möjliga reliabiliteten vid kvalitativa studier måste datainsamlingen genom hela studieprocessen vara systematisk och noggrann. För att minimera risken för låg reliabilitet i denna studie har det systematiska tillvägagångssättet för insamlandet av material beskrivits noggrant, likaväl som analysen av materialet. Larsen (2018, s. 132) beskriver vidare att generellt gäller att ju fler som gör samma sak desto högre blir reliabiliteten. I syfte att höja studiens reliabilitet genomfördes analysen av det insamlade materialet enskilt av båda forskarna för att sedan jämföras och slås samman. Det enskilda arbetet visade att större delen av materialet analyserades lika av oss båda, men det medförde även en god diskussion om några delar som tolkades på olika sätt.

Validitet handlar om att det som undersöks ska vara relevant för studien, det vill säga om undersökningen har undersökt det den hade som avsikt att undersöka (Fejes & Thornberg, 2019, s. 274–275; Larsen, 2018, s. 129; Thurén, 2019, s. 49). Utifrån studiens syfte och frågeformulering bör lämpliga insamlingsmetoder väljas för att samla in den data som behövs. Genom att enbart samla in material som rör samtal om bråkundervisning, utifrån uppgifter och elevlösningar om rationella tal, säkerställs att materialet är relevant och aktuellt för denna studie. Materialet som analyserats utgörs av transkriberingar av inspelningarna från intervjutillfällena och genom transkriberingarna säkerställs att viktig information inte missas (Dahlgren & Johansson, 2019, s. 183).

5.6 Etiska överväganden

Som forskare har man ett ansvar gentemot de människor och djur som medverkar i ens forskning, dessutom har man ett ansvar mot alla som indirekt påverkas av forskningen i både positiv och negativ bemärkelse. För att samtliga individer berörda av forskningen ska behandlas väl måste forskare ta hänsyn till åtta forskningsetiska riktlinjer, vilka grundas i samhällets etiska normer. Riktlinjerna citeras nedan, utifrån Vetenskapsrådet (2017, s. 8).

1. Du ska tala sanning om din forskning.
2. Du ska medvetet granska och redovisa utgångspunkterna för dina studier.
3. Du ska öppet redovisa metoder och resultat.
4. Du ska öppet redovisa kommersiella intressen och andra bindningar.
5. Du ska inte stjäla forskningsresultat från andra.
6. Du ska hålla ordning i din forskning, bland annat genom dokumentation och arkivering.
7. Du ska sträva efter att bedriva din forskning utan att skada människor, djur eller miljö.
8. Du ska vara rättvis i din bedömning av andras forskning.

Riktlinjerna tas hänsyn till i studien genom att noggranna övervägningar har gjorts vad gäller hur samtligt material och forskningsresultat presenteras, behandlas och analyseras, för att varken individer eller miljö ska komma till skada. Deltagarna i studien har innan undersökningen tagit del av ett informations- och samtyckesbrev (se bilaga 1) där det tydligt framgår vad studien syftar till, vad som förväntas av dem samt att deltagandet är frivilligt och att de när som helst, utan motivering, kan välja att avbryta sin medverkan. Deltagarna informeras även om ljudinspelningarna och dess syfte, detta för att inspelningen ska ske på ett respektfullt och ansvarsfullt sätt (Vetenskapsrådet, 2017, s. 27).

Forskningskravet innebär att den forskning som bedrivs ska vara till nytta för samhällets och individens utveckling (Vetenskapsrådet, 2017, s. 13). Vidare ska forskare ta hänsyn till individskyddarkravet som syftar till att medverkande individer i forskningen skyddas från skador och kränkningar (Vetenskapsrådet, 2017, s. 13). I syfte att minimera risken för att lärarna känner sig förolämpade i sin yrkesroll skapas aktuella elevlösningar med inspiration från tidigare forskning och inhämtas inte från elever kända av lärarna. Utöver ovan nämnda krav är det som forskare dessutom viktigt att beakta begreppen sekretess, tystnadsplikt, anonymitet och konfidentialitet (Vetenskapsrådet, 2017, s. 40). För denna studie är det relevant att beakta deltagarnas anonymitet och konfidentialitet.

Anonymitet innebär att en anonymisering av somliga uppgifter är en förutsättning för en godkänd studie, med det menas att uppgifter som kan härledas till specifika människor tas bort (Vetenskapsrådet, 2017, s. 41). För denna studie har samtliga personuppgifter på deltagarna utelämnats, även namn på skolor och kommuner utelämnas. Konfidentialitet syftar till att forskaren inte ska sprida uppgifter som denne fått i förtroende av deltagarna, det vill säga obehöriga ska inte kunna delges konfidentiell information (Vetenskapsrådet, 2017, s. 40). Då forskningsprojektet sedan är avslutat bör det insamlade datamaterialet arkiveras (Vetenskapsrådet, 2017, s. 42). Genom att inte sprida konfidentiell information och bevara datamaterialet oåtkomligt från obehöriga under forskningen, samt efter publicering av uppsatsen makulera allt datamaterial kan konfidentialitet sägas uppfyllas i denna studie.

6 Analys och resultat

Resultatet från analysen av intervjutranskripten redovisas utifrån variationsteorin och de kritiska aspekterna *förståelsen för täljarens innebörd, förståelsens för nämnarens innebörd, förståelsen för relationen mellan täljaren och nämnaren* samt *förståelsen för relationen mellan bråktal i tal, skrift och modeller.* Avsnittet avslutas med en resultatsammanfattning.

6.1 Förståelsen för täljarens innebörd

Resultatet i detta avsnitt är framtaget genom en analys av lärarnas samtal med fokus på täljarens innebörd. Ett separationsmönster kan urskiljas i lärarnas uttalanden då täljaren varierar medan nämnaren hålls konstant.

Lärarna i grupp 1 beskrev att genom tydliga bilder på antingen geometriska former eller elevnära ting kan täljarens innebörd synliggöras för eleverna. En av lärarna sa till exempel “Det jag också skulle gjort är att göra en bild till varje uppgift. Visat en fjärdedel, två fjärdedelar. Att de får se just de här bitarna och kunna jämföra”. I detta uttalande hålls nämnaren konstant och läraren vill variera täljaren för att synliggöra kontrasten mellan 1/4 och 2/4. Ett liknande uttalande gjordes av en annan lärare som uttryckte ett annat sätt att skapa förståelse för bråktalen 1/4 och 2/4. Läraren uttryckte att eleven ska få ta och känna på de olika delarna till bråktalen. Lärarna vill alltså att eleven ska få se kontrasten mellan talen genom att visualisera att delarna tillsammans inte är lika stora.

I samtalet i den andra lärargruppen uppkom det förslag på att använda tallinjer som modell för att konkretisera och synliggöra kontrasten mellan bråktalen 1/4 och 3/4. Lärarna påpekade dock att de inte brukar använda tallinjen i bråkundervisningen men menar att de med hjälp av två (eller flera) tallinjer kan synliggöra kontrast mellan bråktalen. Detta kan tolkas som att lärarna vill skapa variationsmönstret separation genom att använda separata tallinjer för att synliggöra kontrasten mellan bråktalen genom att variera täljaren i förhållande till tallinjen.

6.2 Förståelse för nämnarens innebörd

I följande avsnitt redovisas det separationsmönster som blev synligt i lärarnas samtal om hur bråkundervisningen kan bidra till förståelse för nämnarens innebörd, där nämnaren varierar i förhållande till en konstant täljare.

Lärarna i grupp 1 var eniga om att språket har betydelse för hur nämnaren kan förstås. Genom att uttryckligen beskriva bråktalets täljare som “en del av” menar lärarna att det blir synligt vad nämnaren syftar till. Till exempel kan 1/6 av ett äpple beskrivas som en del av sex eller att en halv kan beskrivas som en del av två. På detta sätt varierar läraren olika nämnare till en konstant täljare, separation uppstår, och genom att säga *en del av* har lärarna uppfattningen om att eleverna lättare kan koppla samman att det finns fler delar än de delar som täljaren avser.

Ett annat förslag som framkom av grupp 1 om hur undervisningen kan utformas där variationsmönstret separation sker är genom att hålla täljaren konstant, variera nämnaren samt låta eleverna rita upp bråktalen 1/4 och 1/6 i till exempel areamodeller. Därefter kan eleverna undersöka och jämföra vilka delar som är störst. På liknande sätt föreslog grupp 2 att ett sätt att visa bråktals storlek på, är att klippa ut fjärdedelar och sjättedelar ur cirklar och jämföra dessa. På så sätt blir storleken mellan talen 1/4 och 1/6 kontrasterade och nämnaren varieras i relation till en konstant täljare genom att cirklar delas upp i olika många delar. Grupp 2 gav också förslag på att arbeta med 1/3 och 1/4 tillsammans med konkret material genom att till exempel dela klossar först i tredjedelar och plocka en hög, vilket då representerar 1/3. För att sedan göra lika med fjärdedelar och jämföra antalet i högarna. I det här förslaget sker en kontrast mellan 1/3 och 1/4 för att skapa en förståelse för nämnarens innebörd. En av lärarna i grupp 1 gav som förslag att täljarens värde kan vara noll i syfte att synliggöra nämnarens innebörd. Läraren menar då att om täljaren är 0 visar det eleverna att nämnaren inte har något eget värde, utan visar enbart hur många delar något avser. I detta förslag till undervisning vill läraren använda en konstant täljare i förhållande till en varierande nämnare för att eleverna ska förstå nämnarens innebörd, det vill säga en separation uppstår.

En av lärarna i grupp 2 framhävde ett annat sätt att tydliggöra nämnarens funktion och innebörd i bråktalet genom att använda tallinjen som modell. I följande citat talar läraren utifrån en specifik bråkuppgift med de givna bråktalen 1/2 och 1/4, hen sa:

> Men jag tänker liksom att, vi säger de där fjärdedelarna, då hade jag velat dela in den här tallinjen i fyra lika stora delar och sen är det ju bara en, alltså fram till det första strecket. Och sen hade jag velat delat in en annan tallinje i halvor. Kanske två tallinjer under varandra liksom. Då har vi en tallinje uppdelad i fjärdedelar, fyra lika stora delar, och en tallinje uppdelad i två delar, alltså hälften. Och vi har dom ovanför varandra, då ser vi var halvan hamnar och var fjärdedelen hamnar och vilken av dom som är störst.

I detta uttalande är täljaren konstant medan nämnaren varierar, variationsmönstret separation kan sägas uppstå. Genom tallinjen kan bråktalens olika storlekar och dess kontrast synliggöras.

6.3 Förståelsen för relationen mellan täljaren och nämnaren

I följande avsnitt presenteras resultatet utifrån den kritiska aspekten förståelsen för relationen mellan täljaren och nämnaren. Resultatet redovisar delvis variations-mönstret fusion som kan urskiljas i lärarnas uttalanden om att undervisningen bör framhäva att flera kritiska aspekter kan variera samtidigt för att förståelsen för lärandeobjektet (bråktals storlek) ska bli möjlig. Vidare redovisar resultatet variationsmönstret separation som blev tydligt i lärarnas samtal om relationen mellan täljaren och nämnaren, då bråktalet varierar i relation till en konstant modell.

I samtal om missuppfattningar gällande bråktals storlek framhävde lärare i båda grupperna att ett sätt att utforma undervisningen på är att använda tallinjen. Tallinjen används då som en konstant modell för att sedan variera bråktalen genom att placera ut dessa på tallinjen. Relationen mellan täljaren och nämnaren synliggörs då varierande bråktal ses i förhållande till en konstant modell, ett separationsmönster kan urskiljas i den beskrivna undervisningen. I samband med detta menar lärarna dessutom att det är viktigt att synliggöra för eleverna att bråktalen de använder är bråktal vars storlek är mindre än ett. En av lärarna i grupp 1 sa:

> Sen tänker jag jobba mer med tallinjen generellt, för att de ska förstå att över ett där ska du inte ens vara och kika. Det här talet är ju mindre än ett. Det ska vara så självklart att vi behöver inte ens titta över ett, för att det är mindre än ett. En fjärdedel är mindre än ett...

En annan lärare i grupp 1 poängterade vikten av att kombinera det muntliga uttrycket med bilder och elevnära ting. På så vis kan dessutom en undervisning skapas som medför att eleverna i ett senare skede kan förstå att samma rationella tal kan uttryckas på flera olika sätt, såsom 3/6 och 1/2. Här vill läraren ta in material för att påvisa att ett bråktal kan uttryckas på olika sätt men är lika stora i relation till det specifika materialet. Detta skulle också kunna förstås som att läraren vill arbeta med ett konstant material, men variera bråktalet för att synliggöra att olika bråktal kan vara lika stora. I denna beskrivning urskiljs en fusion. Läraren sa:

> Sen att man kombinerar också med bilder, att man ger bildstöd till det. Är det tre delar av sex ritar man upp en cirkel med sex delar och visar att den här betyder att det är sex bitar i den här tårtan, eller vad man nu väljer att använda, och att trean betyder att det är tre utav de här. Och sen kan man koppla det vidare, ja men det blir ju faktiskt halva cirkeln, att man kan bygga vidare på det. Men just att de kopplar ihop att de olika siffrorna är olika delar.

En lärare i grupp 2 gav ett liknande exempel men väljer att inte koppla talet vidare till att olika tal kan vara samma storlek, hen sa:

> Ja men återigen visa med konkret material, att siffran där nere betyder hur många delar du har delar in pizzan i, sex lika stora delar. Och siffran där uppe, det är hur många delar du tar, du tar en av de sex delarna.

Valet av att inte koppla uttalandet till andra bråktal resulterar i att uttalande inte går att koppla till relationen mellan täljaren och nämnaren utan handlar istället om täljaren och nämnarens innebörd separat. Till skillnad från det tidigare presenterade citatet uppstår inte variationsmönstret fusion i detta exempel eftersom täljaren och nämnarens relation inte kan förstås i förhållande till bråktals storlek.

6.4 Förståelse för relationen mellan bråktal i tal, skrift och modeller

Resultatet i följande avsnitt är framtaget utifrån en analys av lärarnas samtal där variationsmönstret generalisering blev synligt. Lärarnas olika uttryck beskriver undervisningen vilken innehåller en variation av det muntliga uttrycket, det skriftliga uttrycket och olika modeller i relation till ett konstant bråktal.

Stora delar av samtalen om bråkundervisningen i båda lärargrupperna handlade om språket och om hur lärarna uttrycker bråktal muntligt. Samtliga lärare menar att det är av största vikt att lärare uttrycker sig korrekt, men även att en varierar sina uttryck för att eleverna ska ges en djupare förståelse för relationen mellan uttrycken och bråktalet. En lärare i grupp 1 sa “Det handlar ju mycket om hur man säger det, just att man säger *en del av* för att koppla det...”. En av de andra lärarna tog vid och fortsatte uttalandet med “Ja precis, jag brukar säga en del av fyra, en fjärdedel, en del av fem, en femtedel”. I lärarnas uttalanden kan bråktalet sägas vara konstant (en fjärdedel eller en femtedel) medan den varierande aspekten blir uttalandets formulering. Med detta antas lärarna vilja uppnå att eleven kan generalisera mellan olika uttryckssätt av samma bråktal och variationsmönstret generalisering kan sägas synliggöras.

Fortsättningsvis samtalade lärarna mycket om att man i undervisningen muntligt måste förklara relationen mellan bråktalet i tal och skrift. En lärare i grupp 2 uttryckte att man tydligt måste visa ett konstant bråktal, till exempel 1/2, för att sedan förklara de olika delarnas innebörd och koppla samman det till varierande uttryck såsom *hälften, en del av två* och *en halv*. Vidare sa samma lärare att ett ytterligare sätt att skapa förståelse för detta är att koppla samman en modell eller ett konkret föremål som eleven kan koppla talet och uttrycken till. Läraren sa "Två, den nedre siffran, visar hur många delar, man delar ett äpple i två delar, och ettan, då tar vi en av delarna. Vi tar *halva* äpplet". Även lärarna i grupp 1 menade att det är fördelaktigt att i undervisningen koppla samman talet, skriften och diverse modeller eller bilder till ett och samma bråktal. En tydlig generalisering av ett konstant bråktal synliggörs då en av lärarna uttryckte "Jämföra, prata mycket, och visa både med text och bild. Man kan ju också ha både texten och talet bredvid varandra mycket, så att de ser att texten och talet är samma sak". En annan lärare fyllde i och sa "Ja, jag hade också velat ha bilder tillsammans med det". För att exemplifiera lärarnas gemensamma uttalanden kan det konstanta bråktalet 1/6 skrivas ut på varierande sätt med siffror, med text (en sjättedel) men även med hjälp av en bild såsom en rektangel uppdelad i sex delar varav en är markerad.

Vad gäller uppgifter där bråktal representeras med antalsmodellen uttryckte flera lärare i båda grupperna att de upplever det problematiskt för eleverna att förstå hur bråktal representeras med antalsmodellen. Både grupp 1 och 2 gav förslag på hur det fördelaktigt går att utgå från elevernas redan befintliga kunskaper om andra modeller och koppla samman dessa med antalsmodellen. En lärare i grupp 1 föreslog att man kan koppla samman area- och antalsmodellen genom att placera ett visst antal föremål inom en cirkel för att förtydliga att samma bråktal kan representeras på diverse sätt. Här varieras olika modeller och kopplar bråktalet i relation till area- och antalsmodellen vilket kan ses som en generalisering om hur bråktalet kan representeras på olika sätt. På liknande sätt föreslog en lärare i grupp 2, utifrån en uppgift där eleven med siffror ska skriva det bråktal som visas med fyra cirklar varav en är blå, följande:

> Ja jag tänker att den kan man ju lika gärna visa att det är samma sak som om vi tar en cirkel och delar den i fyra lika stora delar och så målar vi en av tårtbitarna blå. Det är ju samma sak, det är fortfarande fyra delar och en är blå, vi skriver det på samma sätt. För oftast är det ju de geometriska figurerna delade i delar man böjar med, då får man återkoppla till det.

Vid samtalet om hur man i undervisningen skapar en förståelse för täljarens och nämnarens relation till varandra landade lärarna i både grupp 1 och 2 i att lägga tyngd vid att föra en konstant dialog med eleverna. Samtliga lärare uttryckte flertalet gånger "att prata om siffrornas betydelse, vad är siffran ovanför strecket och vad är siffran under strecket". En av lärarna i grupp 1 uttryckte det som att man ska tala om "vad berättar siffrorna?" med eleverna. Genom att förklara siffran ovanför strecket (täljaren) som hur många delar vi har av någonting, medan siffran under strecket (nämnaren) förklaras som hur många delar som finns totalt menar samtliga lärare att eleverna kan skapa en förståelse för relationen mellan siffrorna. Här synliggör lärarna att språket och samtalen om bråktal är betydande i undervisningen, men något variationsmönster kan inte urskiljas.

6.5 Resultatsammanfattning

Resultatet visar att bråkundervisningen kan utformas på flertalet olika sätt och där variationsmönstren separation, fusion och generalisering kan ske på skilda sätt i bråkundervisningen. Det framkommer tydliga exempel om hur lärarna skapar variationsmönstret separation när det gäller innebörden av täljaren respektive nämnaren. I lärarnas beskrivningar om en gynnsam bråkundervisning tolkas det som att en konstant täljare i förhållande till en varierande nämnare kan gynna förståelsen för innebörden av nämnaren. På liknande sätt tolkas det som att förståelsen för innebörden av täljaren gynnas då nämnaren hålls konstant i förhållande till en varierande täljare. I lärarnas samtal om undervisning gällande täljaren och nämnarens relation framkom inga exempel på separation, däremot framkom enbart ett förslag på undervisning där variationsmönstret fusion kan sägas ske. Återkommande i lärarnas samtal om bråkundervisningen är att skapa kopplingar mellan olika uttryckssätt av bråk (i skrift, tal och modeller) vilket kan ses som ett exempel på generalisering. Även om det vid analysen av materialet framkom flera exempel på variationsmönster och antydningar till variationsteoretiska begrepp användes dessa inte medvetet av lärarna.

En återkommande likhet mellan lärarnas uttalanden är att det är viktigt att tänka på hur bråktal uttrycks muntligt. Där uttalanden tydliggör hur samma bråktal kan uttryckas på olika sätt, till exempel *en del av två* och *en halv*, framkommer variationsmönstret generalisering. Men i många av de andra av uttalandena lärarna gör framkommer inget tydligt variationsmönster utan det ger endast en förklaring till vad bråktalets olika delar syftar till. En annan likhet är att båda grupperna uppger att antalsmodellen upplevs som problematisk att arbeta med. Båda grupperna ger exempel på hur en kombination av antals- och areamodellen kan användas för att skapa förståelse för hur bråktalet kan representeras genom olika modeller och på olika sätt vilket som kan ses som om en generalisering. Ytterligare en likhet är att när variationsmönstret separation går att urskilja i lärarnas samtal görs detta genom tydliga kopplingar till andra representationsformer eller modeller både gällande innebörden av täljaren och innebörden av nämnaren. När det kommer till den kritiska aspekten relationen mellan täljaren och nämnare framkommer det minst exempel där variationsmönster kan urskiljas i lärarnas samtal i jämförelse med de andra kritiska aspekterna.

7 Diskussion

I kommande två avsnitt diskuteras val och dilemman i relation till metod samt en diskussion om hur resultatet kan förstås och tolkas i förhållande till tidigare forskning och variationsteorietiska begrepp.

7.1 Metoddiskussion

I följande avsnitt diskuteras studiens val av metod och andra möjliga val i relation till studiens syfte och resultat. Sedan diskuteras samtalsfokus och vår roll i intervjuerna följt av val kring hur uppgifter och lösningsförslag konstruerades och användes som samtalsunderlag i intervjuerna. Därefter presenteras problematik kring urval av deltagare, digitala intervjuer, transkriberingen och avslutningsvis beskrivs svårigheter kring analysprocessen.

7.1.1 Val av metod, samtalets riktning och vår roll

För att samla in material till studien valdes kvalitativa fokusgruppsintervjuer i en semistrukturerad form som metod. Detta med grund i att förklara tidigare forskning och med förhoppning om att informanterna kunde föra ett samtal så naturligt som möjligt. I samtalen mellan lärarna synliggjordes deras uppfattning av bråkundervisning och de byggde på varandras uttalanden så att svaren blev utförliga och nyanserade på ett naturligt sätt. Med hjälp av följdfrågor kunde lärarna utveckla sina uttalanden kring bråkundervisningen, detta påverkade resultatet eftersom fler uppfattningar och förslag synliggjordes. Om istället en strukturerad eller enskild intervju hade valts som metod hade datainsamlingsmaterialet kunnat bli annorlunda, eftersom tankar som bygger på varandras uttalanden inte blivit möjliga och då gått förlorade. Men istället hade svaren från informanterna möjligen varit mer strukturerade och ingående om hur bråkundervisningen kan utformas. Valet av metod kan därmed sägas ha bidragit till att uppfylla studiens syfte; att utforska hur lärare samtalar om bråkundervisning i årskurs 1–3 utifrån kända missuppfattningar om rationella tal.

Samtliga intervjuer fick dock stundvis ett annat fokus än önskat. Stora delar av samtalen handlade om hur eleverna i fråga kan ha tänkt vid elevlösningarna eller hur elever skulle kunna tänka vid uppgifter likt de som presenterades. Detta trots att samtalet syftade till att handla om bråkundervisning. Samtalen svävade dock aldrig ut i irrelevanta samtalsämnen utan hade hela tiden ett fokus på samtalsunderlaget. Om studien istället haft en strukturerad intervju som metod hade lärarna lättare kunna bibehålla fokuset i samtalet och enbart diskutera bråkundervisningen, fokuset hade därmed avletts från uppgifterna. Ytterligare frågor skulle möjligtvis kunnat hjälpt samtalet i rätt riktning, men trots den oönskade samtalsriktningen så mynnade samtalen oftast ut i hur undervisningen kan utformas utifrån samtalsunderlaget. Vår roll under samtalens gång blev att leda samtalet in på hur undervisningen skulle kunna utformas vid de tillfällen då lärarna själva inte ledde diskussionen vidare. Frågor som “Hur får ni eleverna att förstå det i undervisningen?” och “Hur gör ni i undervisningen då?” ställdes för att få lärarna att reflektera över undervisning snarare än elevernas tankar.

7.1.2 Mini-föreläsningen

Mini-föreläsningen innehöll missuppfattningar framtagna från tidigare forskning, då syftet med studien var att utforska hur lärare samtalar om bråkundervisning utifrån kända missuppfattningar om rationella tal. Mini-föreläsningen bidrog till att samtliga lärare gavs samma grundförutsättningar inför intervjuerna, det vill säga att lärarna gavs samma information om kända missuppfattningar om rationella tal. Å ena sidan kan mini-föreläsningen ha påverkat studiens validitet positivt i den mån att samtalet blev tydligt riktat. Det vill säga, det som avsågs att undersökas undersöktes. Däremot kan mini-föreläsningen påverkat lärarna i den mån att de inte kunde tänka bortom den information som delgetts. Å andra sidan kan mini-föreläsningen (och presenterade uppgifter samt elevlösningar) ha bidragit till ett samtal utifrån de givna missuppfattningar som mest troligt inte skulle skett om upplägget vore ett annat. Bland annat fördes ett samtal utifrån missuppfattningar gällande om hur modeller kan representera bråktal. Samtalet fördes in på hur tallinjen kan användas som modell i en gynnsam bråkundervisning, detta trots att lärarna uttryckt att modellen vanligtvis inte används i deras egen bråkundervisning. Presentationen av missuppfattningarna medförde alltså att lärarna gavs förslag på hur bland annat tallinjen kan ses som en användbar modell i bråkundervisningen, trots att de själva vanligtvis inte använder den. Om mini-föreläsningen däremot inte hade genomförts hade samtalen under intervjuerna riskerats att leda åt fel håll och därmed påverkat studiens validitet negativt.

7.1.3 Konstruerandet av uppgifterna och lösningarna

Konstruerandet av uppgifter och lösningar upplevdes bitvis som problematiskt. Vi ställdes inför många val om vilka bråktal uppgifterna skulle innehålla då tidigare forskning presenterade en mängd av alternativa uppgifter och lösningar. Vi valde därför att utgå från läroplanen och att undervisningen i årskurs 1–3 ska behandla enklare bråktal såsom 1/2 och 1/4 (Skolverket, 2021, s. 11). Detta medförde att förslagen på undervisning som uppkom under intervjuerna innefattade de tal som presenterats i uppgifterna. Om andra tal hade använts i uppgifterna hade samtalen med stor sannolikhet istället innefattat de talen. Valet av tal hade betydelse för vilka tal samtalen utformades efter, däremot är det svårt att avgöra om lärarnas samtal om utformningen av bråkundervisning hade sett annorlunda ut eller inte med andra tal. Det vill säga, det är svårt att avgöra om valen av tal hade någon inverkan på hur lärarna samtalade om undervisningen. Vid konstruerandet av lösningsförslag ställdes vi inför valet att presentera ett eller flera lösningsförslag med felaktiga lösningar för att påvisa vanliga missuppfattningar. Valet föll på att göra olika på olika uppgifter då det i vissa fall lämpade sig bättre att presentera flera förslag, medan det på andra uppgifter fanns en risk för förvirring för lärarna om flera lösningsförslag presenteras.

7.1.4 Användningen av samtalsunderlaget på intervjuerna

Uppgifterna presenterades först utan och sedan med lösningsförslag vid intervjutillfällena med förhoppning om att lärarna skulle utveckla sina tankar och ge fördjupade svar kring hur bråkundervisningen kan utformas. Uppgifterna hade kunnat presenterats och användas på flera olika sätt till intervjuerna. Ett alternativ var att endast visa uppgifter med lösningsförslag. En möjlig risk att endast använda lösningsförslagen kunde vara att samtalet enbart riktades mot missuppfattningarna snarare än undervisningen, vi skulle därmed gå miste om värdefulla tankar om hur en gynnsam bråkundervisning kan utformas. Ytterligare ett alternativ var att informanterna skulle delges uppgifterna utan lösningsförslag innan intervjuerna med förhoppning om att förberedelserna skulle mynna ut i mer givande uttalanden om bråkundervisning. Nackdelen med detta alternativ var att lärarna innan intervjun kunde diskutera lösningsförslagen med varandra och därmed ha ett förutbestämt förslag på undervisning. Detta medförde en risk om att många förslag på gynnsam undervisning hade gått förlorade.

7.1.5 Urvalet

Urvalet av deltagare till intervjuerna skulle avsiktligen ske genom redan etablerade kontakter, men den rådande pandemin gjorde detta problematiskt. En del av de kontakter vi avsett intervjua var tyvärr tvungna att avböja, på grund av hög arbetsbelastning. Detta medförde att vi beslutade att kontakta andra skolor för att få ihop fler fokusgrupper och fler informanter att intervjua. Ett hundratal skolor kontaktades men utan resultat. Detta resulterade att vi endast fått ihop fyra fokusgruppsintervjuer, men att dessa grupper består av informanter från redan etablerade kontakter. Detta påverkar givetvis resultatet i studien eftersom datainsamlingsmaterialet inte blir lika omfattande som det var tänkt, då det endast blir möjligt att analysera fyra intervjuer istället för sex.

7.1.6 Digitala möten

Det mest önskvärda sättet att utföra intervjuer på är i ett fysiskt rum där det ges möjlighet att uppleva sinnesstämning, kroppsspråk och ansiktsuttryck i sin helhet. Men på grund av rådande pandemi och tillhörande restriktioner ansågs detta inte vara ett alternativ, därmed togs beslutet att genomföra intervjuerna digitalt via Zoom. Risken med digitala möten är bland annat att informanterna ges ett minskat helhetsintryck av varandra och samtalet. Samtalet riskerar att bli lidande på grund av bland annat missade signaler i form av kroppsspråk, internetstörningar eller rundgång av ljud. Trots dessa risker upplevdes samtalen som naturliga, flytande och givande där informanterna fick tillfälle att fylla i varandras uttalanden utan utomstående störningsmoment. En möjlig bidragande faktor till detta kan vara urvalet av deltagarna arbetar i samma arbetslag, vilket medför att lärarna redan kände varandra och kunde tack vare det tyda varandras signaler även digital.

7.1.7 Transkriberingen

Under transkriberingen av intervjuerna rensades onödiga småord bort och vissa justeringar gjordes av ofullständiga ord och meningar för att underlätta läsande av transkripten. Det faktum att intervjuerna bestod av flera deltagare försvårande transkriberingen vid några tillfällen då det var svårt att urskilja vad deltagarna sa då de ibland gjorde uttalanden samtidigt. Detta är dock inget som påverkar resultatet utan endast försvårat arbetet med framställandet av material till analysen.

7.1.8 Analysen

Vad gäller analysmetoden utifrån variationsteorin upplevdes processen bitvis som svår och tankekrävande. Svårigheterna låg i att avgöra *vad* i lärarnas uttalanden som kunde relateras till respektive kritisk aspekt och därmed synliggöra olika former av variationsmönster i den tänkta bråkundervisningen. Många uttalanden kunde kopplas samman till flera av de kritiska aspekterna, därför krävdes det noga avvägningar och många tolkningar för att avgöra inom vilken aspekt respektive uttalandena skulle placeras, detta resulterade i att några uttalanden placerades under dubbla kritiska aspekter. Analysprocessen hade kunnat förenklats om fler följdfrågor hade ställts, dessutom skulle detta kunna leda till tydligare och fördjupade uttalanden från lärarna. Det vill säga, lärarnas uttalanden hade behövt specificerats och utvecklats för att underlätta analysen om inom vilken kritisk aspekt respektive uttalande tillhörde.

7.2 Resultatdiskussion

Stora delar av tidigare forskning stämmer överens med vad som framkommer i studiens resultat. Till exempel uttrycker lärarna att antalsmodellen är problematisk att lära ut vilket överensstämmer med Sveider (2016, s. 22), som menar att modellen är svårförståelig för elever då helheten inte blir konkret. Däremot visar resultatet att lärarna inte använder variationsteorin eller dess begrepp på ett medvetet sätt i uttrycken om hur bråkundervisningen på ett gynnsamt sätt kan utformas utifrån kända missuppfattningar. Med andra ord går det inte i resultatet att uppfatta om lärarna medvetet fokuserar på att utforma bråkundervisningen utifrån konstanta och varierande aspekter. Men genom analysen av det insamlade materialet kan det i resultatet urskiljas konstanta och varierande aspekter samt olika variationsmönster i den beskrivna bråkundervisningen. Skulle variationsteorin kunna användas som ett verktyg för att utveckla bråkundervisningen ytterligare?

I följande avsnitt förs en diskussion om det framkomna resultatet utifrån tidigare forskning och variationsteorin. Diskussionen presenteras utifrån följande rubriceringar: *användningen av modeller i bråkundervisningen* och *undervisning som bygger på lärarnas uttryckssätt för bråktal*.

7.2.1 Användningen av modeller i bråkundervisningen

För att underlätta elevers tänkande och mentala representation av bråk används ofta modeller i undervisningen (Cramer & Wyberg, 2009, s. 228). Resultatet antyder att lärarna anser att användningen av modeller i bråkundervisningen är fördelaktig. Lärarna ger gång på gång förslag på hur olika modeller kan användas för att synliggöra innebörden av täljaren och nämnaren, relationen dem emellan samt relationen mellan olika uttryckssätt av bråk. I uttalanden som rör tallinjen är det mest förekommande att variationsmönstret separation uppstår, samma sak gäller areamodellen. Lärarnas uttalanden tyder på att genom användningen av tallinjen och areamodellen vill de kontrastera olika bråktals storlek och därmed skapa en separation i undervisningen. Då lärarna istället talar om att kombinera area- och antalsmodellen synliggörs en generalisering i den beskrivna bråkundervisningen. Utan att nämna specifika variationsteoretiska begrepp uttrycker lärarna att undervisningen kan bidra till att eleverna kan generalisera mellan olika uttryckssätt för bråk om olika modeller används i relation till varandra i undervisningen. I lärarnas beskrivningar av undervisning kopplat till modeller kan variationsmönstren separation och generalisering synliggöras, däremot kan variationsmönstret fusion inte tydligt kopplas samman till någon specifik modell i lärarnas uttalanden.

Genom Los (2014, s. 117, 119) beskrivning av variationsmönster framställs fusion som det sista och avslutande steget i skapandet av förståelse för ett lärandeobjekt. I analysen av lärarnas samtal kan enbart ett uttalande urskilja fusion. Lo (2014, s. 119) beskriver att fusion innebär att olika kritiska aspekter sammanfogas och ges en relation, vilket medför att lärandeobjektets helhet blir tydlig för eleven. Lärarna nämner inte någon form av undervisning där fusion kan sägas uppstå, förutom en gång. Kan då undervisningen möjliggöra en djupare förståelse för lärandeobjektet (bråktals storlek) hos eleverna? Fusion kan sägas uppta en anmärkningsvärt liten del av den beskrivna bråkundervisningen i årskurs 1–3, enligt resultatet från denna studie. Kanske kan detta bero på det faktum att det framställs vara det sista steget i förståelsen för ett lärandeobjekt. Kanske kan detta även bero på att bråkundervisningen upptar lite tid av matematikundervisningen i de lägre årskurserna och att fusionen antas ske i högre årskurser. Kan det finnas ett samband mellan elevers uppvisade svårigheter inom bråk och att fusion sällan sker? Om lärarna i studien är medvetna om variationsteorin eller inte framgår ej. Lo (2014, s. 83) beskriver att lärare med fördel bör skapa undervisning utifrån lärandeobjektets kritiska aspekter för att eleverna ska ges möjlighet till djupare förståelse för lärandeobjektet. Om lärarna därmed vore medvetna om variationsteorin och dess funktion i undervisningen skulle det kunna ges förutsättning till att fusion skulle uppstå oftare och lärandeobjektet (bråktals storlek) skulle kunna förstås på ett djupare plan.

Oavsett om variationsteorin används på ett medvetet sätt eller ej kan kombinationen av modeller antas vara fördelaktigt för elevernas lärande med koppling till det Clarke et al. (2008, s. 375–377) beskriver om att olika modeller ökar möjligheterna att tillägna sig kunskaper om bråk. Vid intervjuerna framgår det dock endast förslag på att antalsmodellen kan användas tillsammans med areamodellen, två modeller som är ganska lika varandra i utformandet. Det ges inga ytterligare förslag på andra modeller, såsom tallinjen, som kan användas i relation till antalsmodellen. Användning av flera olika modeller skulle kunna skapa förutsättning för att ytterligare generaliseringar kan göras av bråktalet. Enligt Barber (2021, s. 205) bör flera modeller användas i undervisningen för att elevernas tänkande inte ska begränsas. Emellertid hävdar Nagy (2017, s. 113) att användandet av flera modeller eller representationsformer inte nödvändigtvis leder till kunskapsutveckling utan att en övergång mellan olika modeller bör ske med eftertänksamhet och medvetenhet så att dessa kan kontrasteras mot varandra, om inte kan elevers progression påverkas negativt. Detta skulle kunna förstås som att eleverna behöver behärska och ha förståelse för de kritiska aspekterna innan generaliseringar om bråktals storlek kan göras innan olika modeller används för att skapa fusion. Har eleverna inte denna förståelse när en fusion av flera modeller introduceras kan detta ha en negativ påverkan på deras förståelse för bråktals storlek. De medverkande lärarnas beskrivna sätt att kombinera och jämföra de två skilda modellerna skulle kunna vara ett gynnsamt sätt att använda modeller i undervisningen för att skapa tillfälle för progression och kunskapsutveckling med förutsättning att eleverna har den förståelse som krävs och att övergången mellan modellerna sker medvetet. Barber (2021, s. 210) menar att eleverna behöver motivera sina tankar i samband med deras arbete med representationsformer för att elevernas progression ska bli synlig. Detta kan antas vara ett sätt att utveckla arbetet med olika representationsformer ytterligare i bråkundervisningen.

Att tallinjen är en användbar modell för att hjälpa elever skapa en förståelse för bråktal i relation till andra redan bekanta naturliga tal är något som styrks av Siegler et al. (2011, s. 277). Schumacher et al. (2018, s. 192) menar dessutom att tallinjen kan användas för att ge elever en möjlighet att förstå att ett bråktal inte är två separata tal utan ett rationellt tal som kan placeras ut på tallinjen. Nagy (2017, s. 90–91) hävdar att undervisningen behöver framhäva olika talföljder på tallinjen för att elever ska kunna uppmärksamma bråktalets storlek i relation till tallinjen. Anmärkningsvärt är att lärarna i studien själva beskriver hur modellen kan användas i undervisningen trots att de påpekar att de normalt sätt inte använder tallinjen i bråkundervisningen. Detta skulle kunna bero på att lärarnas läromedel inte presenterar användningen av tallinjen tillsammans med bråk. Dock hävdar Wijaya (2017, s. 232) att det är viktigt att lärare arbetar med modeller och representationsformer tillsammans med de ordinarie läroböckerna. Det skulle också kunna bero på att lärarna tidigare inte stött på dessa missuppfattningar tillsammans med tallinjen, utan fick det presenterat i intervjun tillsammans med mini-föreläsningen om kända missuppfattningar och samtalsunderlaget med elevuppgifterna. Barbosa och Vale (2021, s. 4) framhäver att bråktalet är ett komplext begrepp som innefattar att ha förståelse för vad de olika delarna står för men också att det är ett rationellt tal som representeras som ett bråktal. Detta kan ses som det variationsteorin beskriver om att lärandeobjektet har flera olika kritiska aspekter som elever behöver skapa förståelse för och koppla samman för att få en djupare förståelse. Tallinjen skulle alltså kunna vara ett sätt att hjälpa eleverna skapa en förståelse för bråktalets storlek i relation till 0 och 1 för att motverka förvirring som kan uppstå av hur lärare uttrycker bråktalets olika delar.

7.2.2 Undervisning som bygger på lärarnas uttryckssätt för bråktal

Den grundläggande förståelsen för bråk innefattar, enligt McIntosh (1992, s. 4–6), bland annat att bråktalet kan uttryckas på olika sätt. I resultatet av denna studie framkommer det att lärarna menar att deras sätt att muntligt uttrycka bråktal och dess olika delar på i undervisningen är av stor betydelse för elevers fortsatta kunskapsutveckling. Lärarna framhäver att det är viktigt att uttrycka sig korrekt i undervisningen om bråk. Utifrån lärarnas samtal görs antagandet att korrekt sätt att uttrycka sig på är att nämnaren beskriver hur många delar som totalt finns, medan täljaren beskriver hur många av delarna som avses. Detta sätt att förklara bråk på är något som Clarke et al. (2008, s. 375) hävdar kan medföra en förvirring hos eleverna i den fortsatta bråkundervisningen, då bråktalen vidgas till tal som är större än 1 och bråktalets täljare blir större än nämnaren. Dock menar båda grupperna att tallinjen är ett verktyg som kan hjälpa eleverna skapa förståelse för bråktals storlek och att de bråktal bråkundervisningen (i årskurs 1–3) innehåller är bråktal mindre än 1. Genom lärarnas beskrivning av att använda tallinjen för att skapa en förståelse mellan täljaren och nämnarens relation i förhållandet till bråktals storlek kan variationsmönstret separation uppstå. Genom analysen av lärarnas samtal blir separation synligt, trots att det inte är något lärarna själva uttrycker.

Vidare påpekar Barbosa och Vale (2021, s. 4) att förståelse för bråktal också innebär att ha en konceptuell förståelse. Detta kan ses som ytterligare en kritisk aspekt, det vill säga att kunna koppla bråktalet till tal och skrift, som då forskning visar är svårt för elever (Mohyuddin & Khalil, 2016, s. 142). Medverkande lärare menar att elevers förståelse kan utvecklas genom att variera och utvidga uttryckssätten i bråkundervisningen. Det vill säga att genom det muntliga uttrycket skapa en förståelse hos eleverna om att till exempel *en del av två* är synonymt med *hälften* och *en halv*, samt att *en del av tre* är detsamma som *en tredjedel*. Lärarna menar också att det är viktigt att eleverna får se hur bråktalet uttrycks med både symboler, skriftligt och muntligt tillsammans med bilder och material. Här talar lärarna om en form av generalisering, utan att använda den formuleringen, där eleverna ska få en förståelse för att ett konstant bråktal kan uttryckas på varierande sätt genom symboler, text, bilder och material. Säfström (2017, s. 66) poängterar att vidgat innehåll, utmaning och ökat krav är det som behövs för att undervisningen ska ge förutsättning för progression. Samtidigt menar Lo (2014, s. 83) att lärare bör utforma undervisningen utifrån lärandeobjektets kritiska aspekter. Dessutom menar Barber (2021, s. 207–208) att planeringen, utförandet och den uppföljande reflektionen av undervisningen bör ske med utgångspunkt i de missuppfattningar elever har gällande bråk. Om lärare då medvetet planerar att använda flera olika uttryck för samma bråktal kan synsättet för bråktalet vidgas och därmed utmana eleverna till att koppla samman uttryck med symboler, bilder och dylikt. Genom en medveten planering av undervisning utifrån variationsteorin och lärandeobjektets kritiska aspekter kan det därmed antas att undervisningen skulle ge elever större förutsättningar till progression i undervisningen samt att reducera uppkomsten av missuppfattningar.

7.3 Slutsatser

De medverkande lärarna talar varken om några variationsteoretiska begrepp eller variationsmönster, men trots detta kan både separation och generalisering urskiljas vid flera tillfällen under samtalen. Däremot urskiljs fusion enbart en gång, vilket kan anses anmärkningsvärt i och med Los (2014, s. 117–119) beskrivning av att fusion är den sista pusselbiten i förståelsen för ett lärandeobjekt. Det antas att om lärarna medvetet använde variationsteorin som ett verktyg i bråkundervisningen skulle det kunna bidra till undervisningen sker i etapper likt variationsteorins olika faser. Då skulle ett medvetet mål med undervisningen vara att nå fasen fusion. Om fusion uppstår oftare skulle det kunna bidra till att lärandeobjektet kan förstås på ett djupare plan. Vidare görs antagandet att en planerad undervisning utifrån variationsteorin inte enbart kan ge elever större förutsättningar till progression, utan även reducera uppkomsten av missuppfattningar vad gäller rationella tal.

8 Förslag på fortsatt forskning

Studien synliggör lärares tankar om en gynnsam bråkundervisning i årskurs 1–3. Men elevers missuppfattningar inom bråk har visat sig vara många och samstämmiga i alla grundskolans årskurser och progressionen mellan årskurserna har därmed visats vara liten. För att synliggöra hur undervisningen kan bidra till elevers förståelse för bråk och därmed en vidare progressionen mellan årskurserna vore det intressant om en liknande studie till denna genomfördes i högre årskurser såsom 4–6 och 7–9.

9 Referenser

Barber, K. (2021). Critical Turning Points During Lesson Study: Student Misconceptions Spark Teacher Learning. *Excelsior: Leadership in Teaching and Learning*, *13*(2), 197–213. https://doi.org/10.14305/jn.19440413.2021.13.3.02 (Hämtad 2021-11-23).

Barbosa, A., & Vale, I. (2021). A Visual Approach for Solving Problems with Fractions. *Education sciences*, *11*(11), 1-18. https://doi.org/10.3390/educsci11110727 (Hämtad 2021-12-27).

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 Practical Tips for Making Fractions Come Alice and Make Sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 372–380. https://www.jstor.org/stable/41182579 (Hämtad 2021-11-15).

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 226–257. https://doi-org.www.bibproxy.du.se/10.1080/10986060903246479 (Hämtad 2021-12-13).

Dahlgren, L. O., & Johansson, K. (2019). Fenomenografi. I A. Fejes & R. Thornberg (Red.), *Handbok i kvalitativ analys* (3 uppl., s. 179–192). Liber.

Deringöl, Y. (2019). Misconceptions of primary school students about the subject of fractions. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, *8*(1), 29–38. http://doi.org/10.11591/ijere.v8i1.16290 (Hämtad 2021-11-22).

Dimenäs, J. (2020). *Vetenskap och beprövad erfarenhet: forskningsmetodik för förskollärar- och lärarprofessionen* (1 uppl.). Liber.

Ejlertsson, G. (2019). *Enkät i praktiken. En handbok i enkätmetodik* (4 uppl.). Studentlitteratur.

Empson, S. B. (1999). Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a First-Grade Classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283–342. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1703_3 (Hämtad 2021-12-27).

Fejes, A., & Thornberg, R. (2019). Kvalitet och generaliserbarhet i kvalitativa studier. I A. Fejes & R. Thornberg (Red.), *Handbok i kvalitativ analys* (3 uppl., s. 273–295). Liber.

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N., & Dyson, N. (2017). Delaware Logitudinal Study of Fraction Learning: Implications for Helping Children With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 621–630. https://doi.org/10.1177/0022219416662033 (Hämtad 2021-11-24).

Karlsson, I. (2019). *Elever i matematiksvårigheter: Lärare och elever om låga prestationer i matematik.* [Doktorsavhandling, Lund universitet]. https://portal.research.lu.se/sv/publications/elever-i-matematiksv%C3%A5righeter-l%C3%A4rare-och-elever-om-l%C3%A5ga-prestatio (Hämtad 2021-12-30).

Karlsson, N., & Kilborn, W. (2020). Teachers and students perception of rational numbers. *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 291-297. https://pme44.kku.ac.th/home/uploads/welcome/interim_proceedings.pdf (Hämtad 2021-12-29).

Kihlström, S. (2007). Fenomenografi som forskningsansats. I J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket – vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik.* (1 uppl., s. 157–173). Liber.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan* (1 uppl.). Nationellt Centrum för Matematikutbildning. https://docplayer.se/9144857-Matematiktermer-for-skolan.html (Hämtad 2021-12-29).

Kroksmark, T. (2007). Fenomenografisk didaktik – en didaktisk möjlighet. *Didaktisk tidskrift 17*(2–3), 1–50. http://www.tomaskroksmark.se/Fenomenografiskdidaktik%202007.pdf (Hämtad 2021-12-30).

Larsen, A. K. (2018). *Metod helt enkelt. En introduktion till samhällsvetenskaplig metod.* (2 uppl.). Gleerups.

Lo, M. L. (2014). *Variationsteori, för bättre undervisning och lärande.* (1 uppl.). Studentlitteratur.

Mack, N. (1990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16–32. https://www.jstor.org/stable/749454 (Hämtad 2021-12-14).

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8, 44. https://www.jstor.org/stable/40248053 (Hämtad 2021-12-29).

Mohyuddin, G. R., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research, 38*(1), 133–162. https://www.proquest.com/eric/docview/1813909824/fulltextPDF/433EE8CDC16E4536PQ/7?accountid=10404 (Hämtad 2021-11-18).

Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisningen. En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression.* [Licentiatuppsats, Göteborgs universitet]. http://hdl.handle.net/2077/54705 (Hämtad 2021-11-23).

Nationalencyklopedin (u.å.a). Bråk. Hämtad 19 november 2021 från https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/br%C3%A5k

Nationalencyklopedin (u.å.b). Missuppfatta. Hämtad 19 november 2021 från https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/missuppfatta

Sari, E., Juniati, D., & Patahuddin, S. (2012). Early Fractions Learning of 3rd Grade Students in SD Laboratorium Unesa. *Journal on Mathematics Education, 3*(1), 17–28. https://doi.org/10.22342/jme.3.1.617.17-28 (Hämtad 2021-12-14).

Schumacher, R. F., Jayanthi, M., Gersten, R., Dimino, J., Spallone, S., & Haymond, K. S. (2018). Using the Number Line to Promote Understanding of Fractions for Struggling Fifth Graders: A Formative Pilot Study. *Learning Disabilities Research & Practice*, *33*(4), 192-206. https://doi-org.www.bibproxy.du.se/10.1111/ldrp.12169 (Hämtad 2021-12-21).

Sidney, P. G., Thopson, C. A., & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children´s accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, *58*, 288-298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011 (Hämtad 2021-12-27).

Skolverket. (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011. Reviderad 2019.* https://www.skolverket.se/getFile?file=4206 (Hämtad 2021-11-15).

Skolverket. (2021). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Grundskolan.* https://www.skolverket.se/getFile?file=7840 (Hämtad 2021-11-15).

Siegler, R. S., Thompson C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theoty of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001 (Hämtad 2021-12-27).

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* (2 uppl.). Studentlitteratur.

Sveider, C. (2016). *Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolår 4-6 – vad görs möjligt för eleverna att erfara?.* [Licentiatuppsats, Linköpings universitet]. 10.3384/lic.diva-125924 http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:910366/FULLTEXT01.pdf http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:910366/FULLTEXT01.pdf (Hämtad 2021-12-27).

Svenska Akademiens Ordböcker (2021). Svårighet. Hämtad 2 december 2021 från https://svenska.se/tre/?sok=sv%C3%A5righet&pz=1

Säfström, A. I. (2017). Progression i högre utbildning. *Högre utbildning, 7*(1), 56–75. http://dx.doi.org/10.23865/hu.v7.955 (Hämtad 2021-12-14).

Thurén, T. (2019). *Vetenskapsteori för nybörjare (*3 uppl.). Liber.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.* (VR1708). Vetenskapsrådet. https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063/God-forskningssed_VR_2017.pdf (Hämtad 2021-12-16).

Wijaya, A. (2017). The Relationships between Indonesian Fourth Graders Difficulties in Fractions and the Opportunity to Learn Fractions: A Snapshot of TIMSS Results. *International Journal of Instruction, 10*(4), 221–236. https://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2017_4_13.pdf (Hämtad 2021-11-23).

10 Bilagor

10.1 Bilaga 1 - informationsbrev och samtyckesformulär

Information om undersökning gällande lärares uppfattningar om en fortsatt bråkundervisning

Du tillfrågas härmed om deltagande i denna undersökning.

Vi heter Sanna Halvarsson och Terese Ek och är två studenter vid Högskolan Dalarna som skriver vårt examensarbete inom matematik. Syftet med studien är att synliggöra vilka uppfattningar verksamma lärare i årskurs 1–3 har om hur bråkundervisning gynnsamt kan utformas utifrån kända missuppfattningar och elevlösningar om rationella tal.

Forskning visar att elever har svårigheter att tillägna sig grundläggande kunskaper om bråk och att äldre elever uppvisar liknande missuppfattningar som yngre elever. Progressionen i bråkundervisningen i de högre årskurserna är inte tillräcklig. Forskning visar att undervisningen i högre årskurser inte förändras och har liknande innehåll som de lägre årskurserna. Vi vill därför undersöka hur verksamma lärare i de lägre årskurserna ser på hur den fortsatta bråkundervisningen kan utformas för att förhindra att missuppfattningarna kvarstår hos elever.

Hela studien omfattar 6 olika intervjutillfällen med 3 olika lärargrupper bestående av 3–6 deltagare. Ett deltagande i studien innebär att du medverkar i 2 gruppintervjuer digitalt via Zoom. Intervjuerna beräknas ta cirka 60 minuter per gång. Du kommer totalt delta i intervjuer på sammanlagt cirka 2 timmar. Länk till samtalsrummet skickas ut i god tid före intervjutillfällena. Ingen förberedelse krävs, men du förväntas delta i diskussion och samtal om hur en gynnsam bråkundervisning kan utformas tillsammans med några kollegor. Vid intervjuerna kommer vi båda studenter att medverka digitalt och intervjuerna kommer även att ljudinspelas för att minimera risken att värdefull information missas under samtalets gång.

Det insamlade materialet kommer endast att användas i forskningssyfte och behandlas konfidentiellt. Detta innebär att varken personuppgifter eller namn kommer nämnas i studien. De uppgifter som kommer samlas in är lärarnas namn i form av underskrift på samtyckesformuläret samt epost-adress för utskick av länk till samtalsrum. Skolornas eller kommunernas namn eller placering kommer inte heller framgå i studien. Vidare kommer allt material förvaras oåtkomligt för obehöriga och efter uppsatsens godkännande makuleras allt insamlat material. Undersökningen kommer presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna.

Det är helt frivilligt att delta i studien och du kan när som helst välja att avbryta ditt deltagande utan närmare motivering.

Högskolan Dalarna är ansvarig för behandlingen av personuppgifter i samband med examensarbetet. Som deltagare i undersökningen har du enligt Dataskydds-förordningen (GDPR) rätt att få information om hur dina personuppgifter kommer behandlas. Du har också rätt att ansöka om ett så kallat registerutdrag, samt att få eventuella fel rättade. Vid frågor om behandlingen av personuppgifter kan du vända dig till Högskolans dataskyddsombud.

Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga.

Ort och datum: Falun, 220118

Student: Sanna Halvarsson **Student:** Terese Ek **Handledare:** Helén Sterner
Epost: **Epost:** **Epost:**
Mobil: **Mobil:** **Mobil:**

Samtyckesformulär

Samtycke till att delta i studien

Jag har fått muntlig och skriftlig informationen om studien och har haft möjlighet att ställa frågor. Jag får behålla den skriftliga informationen.

☐ Jag samtycker till att:

- delta i studien som gäller lärares uppfattningar om bråkundervisning
- uppgifter om mig samlas in och behandlas på det sätt som beskrivs i informationsbrevet
- personuppgifter som samlas in kommer endast att användas i den här undersökningen
- de insamlade uppgifterna kommer att bevaras tills uppsatsen är godkänd

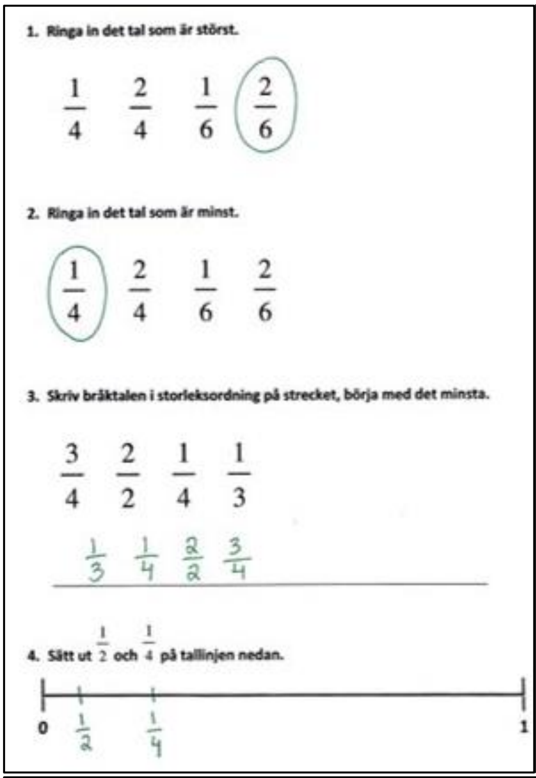
Ort och datum	Underskrift

Ansvarig för studien

Ort och datum: ____

Namnteckning: ____

10.2 Bilaga 2 - uppgifter och elevlösningar



1. Ringa in det tal som är störst.

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$

2. Ringa in det tal som är minst.

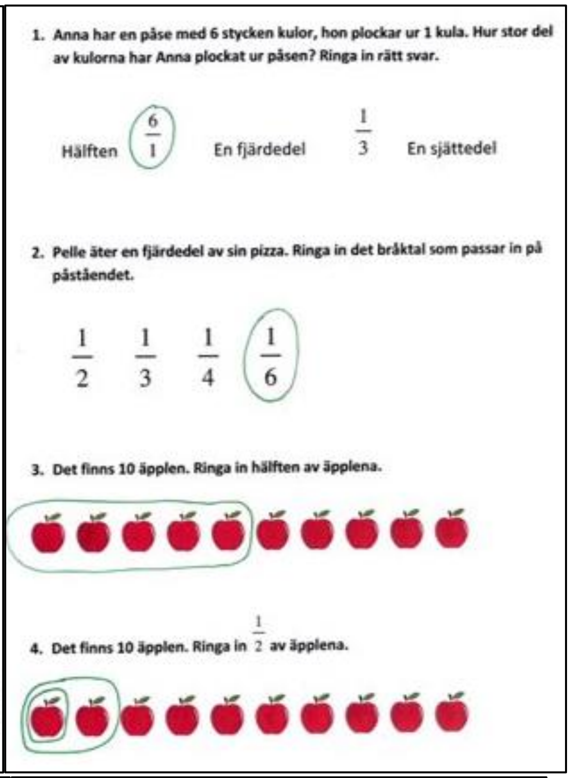
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$

3. Skriv bråktalen i storleksordning på strecket, börja med det minsta.

$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{4}$

4. Sätt ut $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ på tallinjen nedan.



1. Anna har en påse med 6 stycken kulor, hon plockar ur 1 kula. Hur stor del av kulorna har Anna plockat ur påsen? Ringa in rätt svar.

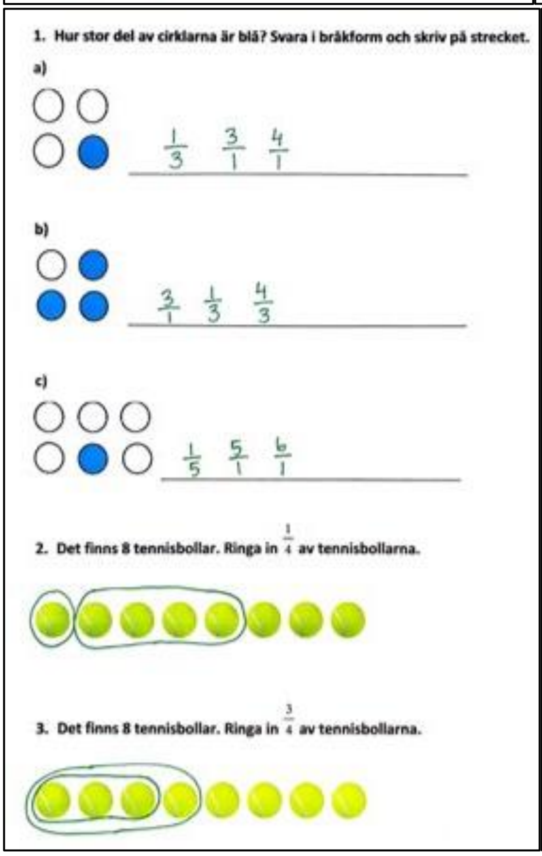
Hälften $\frac{6}{1}$ En fjärdedel $\frac{1}{3}$ En sjättedel

2. Pelle äter en fjärdedel av sin pizza. Ringa in det bråktal som passar in på påståendet.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

3. Det finns 10 äpplen. Ringa in hälften av äpplena.

4. Det finns 10 äpplen. Ringa in $\frac{1}{2}$ av äpplena.



1. Hur stor del av cirklarna är blå? Svara i bråkform och skriv på strecket.

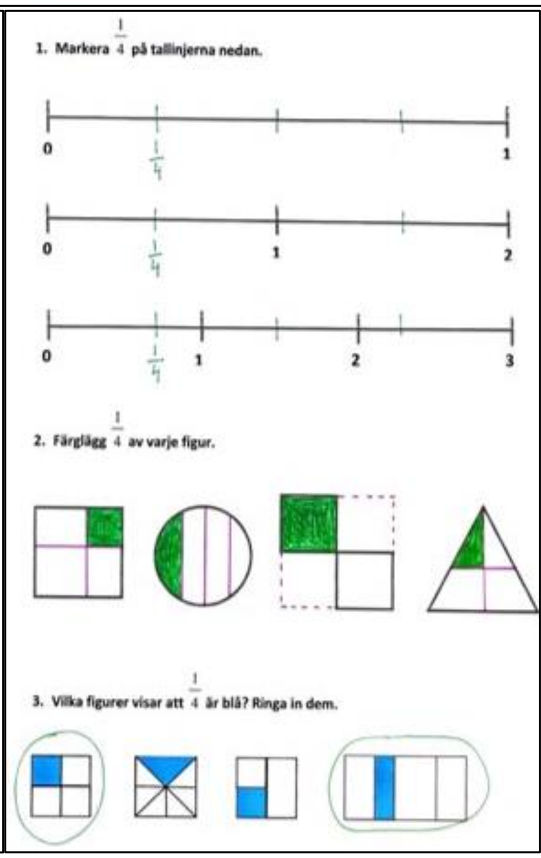
a) $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$

b) $\frac{3}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{5}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{6}{1}$

2. Det finns 8 tennisbollar. Ringa in $\frac{1}{4}$ av tennisbollarna.

3. Det finns 8 tennisbollar. Ringa in $\frac{3}{4}$ av tennisbollarna.



1. Markera $\frac{1}{4}$ på tallinjerna nedan.

2. Färglägg $\frac{1}{4}$ av varje figur.

3. Vilka figurer visar att $\frac{1}{4}$ är blå? Ringa in dem.