HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete för ämneslärarexamen

Grundnivå

Lärares möjligheter och utmaningar i att undervisa begreppet variabel i algebra

En fallstudie om lärares uppfattning om deras förutsättningar att skapa förståelse för begreppet variabel

Teachers' opportunities and challenges for teaching the concept of variable in algebra

Författare: Jukka Mikkonen
Handledare: Abdel Seidouvy
Examinator: Kjell Staffas
Ämne/huvudområde: Pedagogiskt arbete/Matematik
Kurskod: GPG22K
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 2022-01-19

Vid Högskolan Dalarna finns möjlighet att publicera examensarbetet i fulltext i DiVA. Publiceringen sker open access, vilket innebär att arbetet blir fritt tillgängligt att läsa och ladda ned på nätet. Därmed ökar spridningen och synligheten av examensarbetet.

Open access är på väg att bli norm för att sprida vetenskaplig information på nätet. Högskolan Dalarna rekommenderar såväl forskare som studenter att publicera sina arbeten open access.

Jag/vi medger publicering i fulltext (fritt tillgänglig på nätet, open access):

Ja ☒ Nej ☐

Abstract: Skolan har ett uppdrag att utbilda matematiskt kompetenta medborgare. Elevernas motivation att öva grundläggande förmågor som huvudräkning och läsning minskar när de har ständig tillgång till digitala verktyg. Därmed får de även olika förutsättningar att ta till sig matematiken utifrån skillnaden i förmågorna. Algebra utgör grunden till matematik och dess verktyg men elevernas dåliga prestationer i algebra kan förklaras av systematiska fel som deras bristande begreppsförståelse orsakar. Ett centralt begrepp inom algebra är variabel och lärarens roll att vägleda eleverna till begreppsförståelse därmed en viktig pusselbit i elevernas lärande. Studien undersöker lärarnas uppfattning om sina förutsättningar att kommunicera innebörden av begreppet variabel så att det leder till djup förståelse. Studiens syfte är att belysa faktorer som påverkar lärares möjligheter att skapa förståelse och bidra med insikter till lärarutbildning och skolans ledning. Sociokulturella perspektivets betoning på språk och kommunikation samt variationsteorins begrepp *kontrastering* används för att analysera dessa faktorer genom tematisk analys. Resultaten tyder på att lärarna ser sina förutsättningar på väldigt olika sätt, både i hur de uppfattar vad matematik med förståelse innebär samt hur skolans verksamhet stöder dem i sin strävan att skapa det för variabelbegreppet. Diagnostiska frågor föreslås som ett sätt att underlätta lärarens arbete.

Nyckelord: Matematik med förståelse, begrepp, begreppsförståelse, matematikens språk, kommunikation, lärarens roll, traditionell matematik-undervisning, reforminriktad matematikundervisning, diagnostiska frågor.

Innehåll

Inledning
Skolan har ett uppdrag att utbilda kompetenta medborgare (Skolverket, 2022a, s. 7). För att utbilda eleverna till att bli *matematiskt* kompetenta har dock blivit svårare i takt med teknikutvecklingen. Vårt moderna samhälle är uppbyggt på naturvetenskapens framgångar ända sedan industrialiseringens framfart i mitten av 1800-talet. Digitala verktyg har inte bara varit stora uppfinningar, utan även radikalt förändrat hur vi lever våra liv. Tekniken underlättar våra liv på många sätt och gör det möjligt att utöva väldigt många olika intressen med likasinnade även på distans. Då våra intressen styr även vilka förmågor vi övar i vår vardag, får vi som följd olika grundförutsättningar att förstå världen. Till exempel, när matematiken som krävs för att förstå tekniken blir mer avancerad, kan den även bli svårare att ta till sig utifrån skillnaden i förmågorna om det inte ingår i intressen i någon form.

Algebra utgör grunden till matematik och dess verktyg (Palm, 2008, s. 41) och har därmed en avgörande roll för elevernas fortsatta studier och teknikens utveckling. Enligt TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) från 2015 presterar svenska elever i årskurs 8 sämst i just algebra (Skolverket, 2016, s. 33). Enligt forskning kan elevernas dåliga prestationer i algebra i huvudsak förklaras av systematiska fel som deras bristande begreppsförståelse orsakar (Olteanu, 2003, s. 35; Olivier, 1989, s. 6–7; Palm, 2008, s. 40). Författarna ger exempel på att eleverna kan bland annat övergeneralisera begreppets tillämpningsbara sammanhang eller särskiljer inte mellan begreppets olika användningsområden. Bristande begreppsförståelse för matematikens centrala begrepp uppvisar även tydligt samband med sämre betyg (Blad Röing, 2021, s. 15–16). Ett centralt begrepp inom algebra är *variabel* och lärarens roll att vägleda eleverna till begreppsförståelse därmed en viktig pusselbit i elevernas lärande.

Idén för denna studie föddes när jag skulle undervisa algebrans begrepp *räta linjens ekvation*, som representeras av ekvationen $y=kx+m$, för eleverna på årskurs nio under min första VFU-kurs (verksamhetsförlagd utbildning). Jag trodde mig ha bra förutsättningar att genomföra lektionen då lektionsplaneringen, som utnyttjade variabelbegreppets aspekter så som att det står för ett varierande tal för att förklara ekvationen, granskades av andra studenter och seminarieledare som en del av kursens innehåll. Eleverna visade dock svårigheter att arbeta med variabelbegreppet, som kan bero på att de sällan erbjuds möjligheter att diskutera begreppets aspekter i undervisningen. Det konkretiserar forskningen hur bristande begreppsförståelse och traditionella matematikundervisningens syn på vad matematik är kan försvåra för elevernas studier (Riesbeck, 2008, s. 9). Det är alltså angeläget att undersöka lärarnas förutsättningar att kommunicera innebörden av begreppet variabel så att det leder till djup förståelse. Hur uppfattar lärarna utmaningarna i att förstå variabelbegreppet? På vilka sätt får lärarna stöd av skolans verksamhet och läroboken för att lyckas förmedla det? Vilka användningsområden för variabel är relevanta för algebra på högstadiet? Vad krävs för att läraren ska kunna ta reda på om eleven missuppfattat något om variabel? Denna studie utgår därmed från ett sociokulturellt perspektiv på lärande där språket har en central roll för att skapa begreppsförståelse.

Syfte och frågeställning
Skolan har ett uppdrag att skapa framtida kompetenta medborgare som kan följa den tekniska utvecklingen. Att eleverna lär och förstår algebras begrepp är centralt för att läraren ska lyckas i uppdraget. Lärares förutsättningar att skapa begreppsförståelse för variabel undersöks utifrån faktorer som att hur lärarna uppfattar förståelse och på vilka sätt

variabelbegreppets mångsidighet är utmanande att förklara. Studiens syfte är att belysa dessa faktorer och därmed bidra med insikter till lärarutbildning och skolans ledning.

Frågeställningar som används för att besvara studiens syfte är:
1) Vad innebär matematik med förståelse enligt lärarna?
2) Vilka uppfattningar om möjligheter och utmaningar för att skapa begreppsförståelse för variabel finns hos lärare?

Bakgrund

Språket spelar en viktig roll i att skapa förståelse för matematikens begrepp, och förståelse samspelar med lärarens språkbruk. Traditionella matematikundervisningens betoning på matematiska metoder minskar tillfällen att skapa förståelse jämfört med reforminriktad matematikundervisning, som dock medför andra utmaningar. Lärarens roll som vägledare i elevens möte med matematiska begrepp underlättas av diagnostiska frågor för att följa upp elevernas begreppsförståelse. Till sist belyses några utmaningar som lärarna möter i att undervisa om algebra i allmänhet och begreppet variabel i synnerhet.

Matematiskt språk – begrepp och förståelse

Matematik har ett eget, universellt och precist språk, motsvarande men annorlunda än naturliga språk som svenska eller finska. Riesbeck (2008, s. 34) tar jämförelsen ännu längre och hävdar att matematikspråket följer även liknande logisk grammatik som naturliga språk. Eleverna utvecklar sin kommunikationsförmåga, alltså ”förmåga att använda matematikens uttrycksformer för att samtala om och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” (Skolverket, 2022a, s. 55) genom att öva och använda matematikens språk. Resonemangsförmåga, eller ”förmåga att föra och följa matematiska resonemang” (ibid.) motsvarar då förmåga att tolka kommunikation mellan matematikens språk (vad säger matematiken) och naturligt språk (vad det innebär i det aktuella sammanhanget). Matematiska språkets termer kallas för *begrepp* och dessa utgör grunden för begreppsförmåga, eller mer precist ”förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp” (Skolverket, 2018, s. 1; Skolverket, 2022a, s. 55). Dessa förmågor med starka kopplingar till språk är därmed inte bara slutprodukter i att kunna matematik, utan även centrala i att lära sig det. Resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga underlättas av begreppsförmågans precisa termer att tolka och kommunicera matematik med. Det innebär att begreppsförståelse är en central del av att kunna matematik, och brister i denna syns i elevens resultat.

Att förklara matematiska begrepp så att det leder till djupare förståelse är utmanande. Språk kan ses som en resurs i sig i undervisningen för att skapa förståelse, argumenterar Planas (2021, s. 277). Naturliga språk har motsvarande abstrakta strukturer som matematikens språk, och eleverna har intuitiv förståelse för dessa. Eftersom vardagsspråket är den minsta gemensamma språkliga nämnaren i ett klassrum mellan läraren och eleverna, är det naturligt för läraren att utgå från det i sin kommunikation (Riesbeck, 2008, s. 33). Sättet att bilda matematiska begrepp med hjälp av vardagsspråket motsvarar den kulturhistoriska tolkningen av språkets roll i lärande (Skott, Jess, Hansén och Lundin, 2010, s. 145). Naturliga språk prioriterar dock flexibilitet före precision. Till exempel innehåller det till synes oproblematiska uttrycket ”jag vill köpa en fisk” redan ett logiskt fel då begreppet fisk är det abstrakta samlingsnamnet för olika *arter* av fiskar som gädda eller lax. Fisk är inte ett konkret djur som går att köpa.

Utmaningar med matematiska begrepp

Att kommunicera innebörden av och resonera om begrepp så att det gagnar elevernas begreppsförståelse kräver språklig precision. Traditionellt ses kommunikation som att parterna växelvis agerar som sändare eller som mottagare av information. Enligt den sociokulturella tolkningen av lärande går det inte att överföra begreppsförståelse direkt till eleverna, utan eleven konstruerar begreppsförståelse *utifrån* kommunikationen (Riesbeck, 2008, s. 12; Säljö, 2011, s. 68). Matematikundervisning innehåller även andra former av kommunikation och därmed blandas matematikspråket med vardagens språk, ofta oreflekterat konstaterar Löwing (2004, s. 70). Ett blandat språk kräver kunskaper i båda språk samt identifiering av språket som används för stunden för att kommunikationen ska bli förståeligt. Därmed kan elevernas begreppsförståelse bli lidande när begrepp och vardagsspråkets tolkningar av dessa blandas. Säljö (2011, s. 79) problematiserar även användandet av sunt förnuft, *common sense,* för att förklara begrepp då eleverna kan misstolka sammanhanget utifrån sin vardagsförståelse som ännu inte når det vetenskapliga. Tidiga missuppfattningar för ett begrepp kan äventyra förståelsen för allt som eleven konstruerar på det senare (Olivier, 1989, s. 2–3; Skott et al., 2010, s. 92–94). Därmed är det viktigt att minimera risken för missförstånd genom att undvika eller förklara tvetydigheter.

En bra beskrivning för ett begrepp bör inkludera begreppets mest väsentliga aspekter och *endast* dem, samt att aspekterna bör vara enkla att både förstå och använda, förklarar Jamison (2000, s. 48). Hans till synes enkla förklaring döljer hur svårt det kan vara i praktiken. För det första är matematiska begrepp abstrakta. Vygotskij tydliggör att riktiga begrepp är omöjliga att konstruera utan ord och existerar inte utanför vårt verbala tänkande (Vygotskij, 1986, s. 106–107, citerad i Skott et al., 2010, s. 91). Det innebär att det inte är möjligt att ge konkreta exempel på matematiska begrepp. Till exempel, det naturliga talet *tre* kan läraren visserligen representera med symbolen *3,* definiera som antalet av saker som det finns tre av och relatera till föregående *två* och efterföljande *fyra*, men *innebörden* av begreppet *tre* kvarstår i språket mellan läraren och eleverna. För det andra kan begrepp representeras i flera olika matematiska sammanhang, som Riesbeck (2008, s. 32) kallar *register.* Att lära sig passera gränsen mellan dessa register, till exempel genom att rita en graf för en funktion eller tvärtom, tolka funktionen utifrån dess graf, är viktig kunskap i att lära matematik (ibid., s. 36). Ryve (2006, s. 8) likställer begreppsförståelse med förmågan att representera och lösa samma problem på olika sätt. För det tredje, begrepp kan representera matematiska *objekt* (tre, graf), *process* (multiplikation, integration) eller *egenskap* (volym, längd), vilket försvårar elevernas tolkning av begreppet ytterligare (Skolverket, 2018, s. 1). För det fjärde, begrepp består av och är *relaterade* till andra begrepp på olika abstraktionsnivåer i en komplex hierarki. Till exempel, ett *tal* tolkas genom *positionssystemet*, där *siffrornas* placering i talet bestämmer deras *tiopotensvärde* (ental, tiotal, hundratal) och *värdet* av hela talet är en *summa* av dessa. Skolverkets stödmaterial för specialpedagogik sammanfattar begreppens generella aspekter som egenskaper, representationer, relationer och definition (Skolverket, 2018, s. 2–3), vilket möjliggör en konceptuell fördelning av begreppen till mer hanterbara enheter.

Matematik med förståelse och begreppsförståelse

Läroplanens betygskriterier för årskurs nio (Skolverket, 2022a, s. 62–64) tydliggör att eleverna ska få möjligheten att utveckla samtliga fem förmågor på samtliga betygsnivåer. Läroplanen anger dock inte hur undervisningen ska betona förmågorna eller hur den ska utformas. Traditionella undervisningsmetoder, läroböcker och skriftliga prov som används för att bedöma elevernas prestationer tyder på ihållande betoning på metodförmåga och enskilt arbete (Löwing, 2004, s. 82; Riesbeck, 2008, s. 9; Wiklund, 2017, s. 8–9; Granström i Berg, Sundh och Wede, 2020, s. 46; Nordgren, Odenstad och Samuelsson, 2017, s. 76–77). Riesbeck (2008, s. 9–10) argumenterar för att det försummar kommunikationens roll i matematiskt lärande. Eleverna får alltför sällan höra andras kommunikation och resonemang för att kunna bilda begreppsförståelse, menar hon. Watson och Mason (2006, s. 7) tydliggör att undervisning av begrepp genom till exempel beräkningar eller representationer riskerar att avleda elevernas uppmärksamhet till själva aktiviteten i stället för den generaliseringen som läraren hade tänkt. De (ibid., s. 22–23) problematiserar användningen av mängdträning i läroböckerna i syfte att utveckla elevernas arbetstempo eller noggrannhet då variationen i uppgifterna är ofta oreflekterad och bidrar inte till dessa syften, utan varje uppgift upplevs som en ny utmaning av eleverna. Britt-Mari Barth (i Insulander och Selander, 2018, s. 140) tydliggör att eleverna behöver få höra begreppets benämning (etikett), aspekter (attribut) och mening (exempel) *tillsammans* för att kunna samordna dessa tre element till ett begrepp. Eftersom begreppens aspekter används som byggstenar i problemlösningens strategier får eleverna även svårt att förstå verktygen till att utveckla det. Många elever riskerar därmed lämna grundskolan med brister i en eller flera förmågor. Trots stödinsatser för elever som riskerar att få icke-godkänt betyg i matematik fick 11% av eleverna på årskurs 9 ett icke-godkänt betyg i matematik efter läsåret 2021/2022 (Skolverket, 2022b; Skolverket, u.å.).

Allt fler hävdar att *förståelse* är nyckeln till att både lära och undervisa matematik, i stark kontrast mot traditionell matematikundervisning (Skott et al., 2010, s. 56–58 och 174–175; Gärdenfors, 2010, s. 35–36; Riesbeck, 2008, s. 39–40). Wiklund (2017, s. 10–12) sammanfattar de processer och metoder som enligt forskningen stödjer elevernas utveckling i problemlösning och djupare förståelse för matematiken som *reforminriktad matematikundervisning*. Enligt hennes sammanfattning kännetecknas den av ihärdiga problemlösare som söker konceptuell förståelse genom utmanande uppgifter. Eleverna ses som autonoma tänkare som utvecklar förmågor och undersöker kopplingar mellan matematiska idéer och representationer i samarbete. Det finns även starkt stöd för reforminriktad undervisning i skolans styrdokument, konstaterar hon (ibid., s. 13). Hon tillägger dock att det är svårare att både skapa förståelse och mäta det med prov samt kräver nya kompetenser av lärare att skapa, vilket gör att traditionella metoder kommer att vara svåra att ersätta. Traditionell undervisning ses även som beprövad erfarenhet vilket reforminriktad undervisning inte gör i samma utsträckning (ibid., s. 14). Gärdenfors (2010, s. 268–270) sammanfattar att läraren kan skapa förståelse genom att välja generaliserbara teman, formulera förståelsemål, organisera aktiviteter som leder till förståelse och utvärdera förståelsen fortlöpande.

Vad betyder då termen *matematik med förståelse* i praktiken? Enligt läroplanen ska eleverna bland annat få utveckla förtrogenhet med att använda begrepp (Skolverket, 2022a, s. 54). Matematiska begrepp är precisa och begreppsförståelse ger eleverna verktyg att precisera sin kommunikation. *Standards 2000* (riktmärken för matematikundervisning i USA, refererad i Skott et al., 2010, s. 26 och 56) fastslår att det inte räcker att bara kunna metoder (*procedurer* i Standards) utan att förstå deras innehåll och användningsområden. Enligt Gärdenfors (2010, s. 36) är förståelse en förutsättning att kunna tillämpa kunskaper i nya sammanhang, så som i problemlösning där begrepp och deras egenskaper används. Hattie, Fisher och Frey (2017, s. 157–158) använder termen *djuplärarande* som kännetecknas av att känna igen förhållanden mellan idéer, delta i diskurser och upptäcka mönster. Dessa belägg stödjer Skott et al. (2010, s. 57–58) sammanfattning att matematik*lärande* med förståelse har fem huvudsakliga kännetecken: att upprätta relationer mellan det som eleven redan kan och det nya hon ska lära sig; att utvidga och tillämpa kunskaper; att reflektera över erfarenheter; att uttrycka sin förståelse i tal, skrift eller på annat sätt samt genom att göra matematiska innehållet till sitt. Matematik med förståelse definieras därmed som undervisning som strävar efter *mer* än att bara använda, kunna eller ha kunskaper om något, och som ger eleverna goda förutsättningar att lära matematik med förståelse. Det innebär att kännedom om och användning av matematikens begrepp, metoder och idéer utgör grunden till att *även* kunna kommunicera och resonera om sambanden mellan dem. För *begreppsförståelse* innebär det att eleverna får möjligheter att lära sig skillnader mellan lämpliga och olämpliga användningsområden för begrepp och kan *även* kommunicera och resonera om dessa i olika sammanhang. Båda definitioner stämmer, tekniskt sett, med hur läroplanen redan definierar förmågorna (Skolverket, 2022a, s. 55), men betonar språkets roll i att *utveckla* dem. Matematik med förståelse fokuserar alltså på förmågornas roll i lärandets process till skillnad mot läroplanens tolkning av förmågorna som slutprodukter. Till exempel, eleven kan lära sig förenkla uttrycket $2x+3x$ till $5x$ genom att härleda till att räkna objekt: *2 äpplen + 3 äpplen = 5 äpplen*. Det sättet fallerar dock med uttrycken $2x+3$ och $2x+3y$ utan förståelse för att olika variabler och konstanter representerar olika saker. Andra sätt att se begreppsförståelse kan vara att trots dessa skillnader står ett uttryck alltid för ett tal eller att det förutsätts att samtliga x står för *identiska* objekt i ett visst uttryck men inte nödvändigtvis dem emellan.

Matematikundervisning och lärarens roll

Läraren har rollen som klassrummets ledare, både formellt genom sitt yrke, och informellt som vägledare på elevernas resa mot förståelse för undervisningens innehåll (Berg, Sundh och Wede, 2020, s. 24–25). Det informella ledarskapet kan förklaras genom en didaktisk triangel, där läraren *stödjer* elevens möte med innehållet enligt Kansanen, Hansén, Sjöberg och Krokmark (i Hansén och Forsman, 2017, s. 44–46). Löwing (2004, s. 77) förklarar att lärarens förutsättningar att lyckas med sin undervisning bestäms dels av lärarens egna kunskaper om ämnet, dels av elevernas förkunskaper, men läraren måste även bli medveten om vilka förkunskaper eleverna har. Hattie et al. (2017, s. 65–66) använder termen *expertens blinda fläck* för att betona att annars har läraren svårt att se vilka matematiska kopplingar eleverna saknar för att förstå innehållet på de sätt som läraren själv förstår det. Elevernas förkunskaper varierar även utifrån individuella intressen, vilket gör det utmanande att synliggöra dem i stora klasser.

För att kunna stödja eleven behöver läraren analysera och förstå sitt språkbruk och hur det hjälper elever att förstå. Sädbom (2022, s. 15–16) konstaterar att läraren ska kunna ”lära någon något”, snarare än ”lära ut något”. Jag tolkar det som att lärarens kommunikation kan inte *bara* förstås som enkelriktad överföring av information från läraren till eleverna. Läraren behöver utgå från elevens förståelse för att kunna stödja eleven, med språkbruk som eleven förstår. Det kan jämföras med att försöka vägleda en turist utifrån lokala landmärken som turisten inte känner till, men genom att beskriva landmärken kan hindret i förståelse överbryggas. Enligt Toropova, Johansson och Myrberg (2019, s. 275–276) gynnar lärarens språkliga skicklighet elevernas möjligheter att ta till sig innehållet på djupet. Lärarna saknar dock ofta metaspråkliga kunskaper och strategier för didaktiska resonemang för detta, enligt Riesbeck (2008, s. 39). Jämfört med lärarutbildningen, förutsätter undervisning språk som är anpassad för elevernas behov (ibid.; Löwing, 2004, s. 77). Avancerade begrepp eller resonemang som läraren använt under sin egen utbildning blir inte bara obegripliga utan lämnar eleverna med förundran om vad läraren vill få sagt (Löwing, 2004, s. 47–48). Denna studie försöker därmed belysa de kommunikativa aspekter som kan hjälpa läraren i sitt uppdrag.

Uppföljning av kunskaper och förståelse

Läraren kan även stödja eleverna genom att bistå med att ta reda på vilken stöd de behöver eller om de råkat missförstå något. Det underlättar även uppdraget att samla belägg inför bedömning av elevernas resultat (Nordgren et al., 2017, s. 111). Dessa belägg beskriver elevernas förkunskaper och förståelse som läraren kan utnyttja för att skapa ny förståelse hos eleverna. Gärdenfors (2010, s. 270) tydliggör att utvärdering av elevernas förståelse behöver ske *kontinuerligt* och problematiserar därmed indirekt användning av skriftliga prov i detta syfte. Han stödjer sig på forskning om att läraren behöver både upptäcka och korrigera missförstånd snarast (Nordgren, Odenstad och Samuelsson, 2017, s. 100–101; Rosenshine, 2012, s. 17; Palm, 2008, s. 39). Löwing (2004, s. 78) förklarar att läraren kan kartlägga elevernas kunskaper både genom kontinuerlig, informell observation eller genom diagnostiska test. Digitala exit-tickets (Diaz, 2019, s. 50) är en möjlig metod för att samla belägg för förståelse på gruppnivå, men kräver noga planering för att kunna ge relevanta svar med tanke på elevernas varierande förkunskaper. Det finns även metoder för att uppskatta elevernas begreppsförståelse för specifika begrepp direkt (till exempel *reala funktioner* i Rodríguez-Vásquez och Ariza-Hernandez, 2021, s. 1), men är ofta för tidskrävande för lärarens vardagliga arbete.

Diagnostiska frågor

Diagnostiska frågor kan underlätta lärarens arbete. Lärarens stödjande roll begränsas av att eleverna har ofta svårt att uppvisa relevanta och precisa belägg för analysen som lärarens uppföljning av elevernas begreppsförståelse förutsätter (Riesbeck, 2008, s. 39). Lundahl (2014, s. 110–113) argumenterar för att läraren kan använda *diagnostiska frågor* i vanliga klassrumsdiskussioner för att avslöja missuppfattningar, inte bara fel svar. Han poängterar att det kan vara tidskrävande att konstruera *uppgifter* som kan avslöja missförstånd. Han hävdar att missförstånd sker i huvudsak på tre sätt: felaktiga föreställningar, ofullständig förståelse eller fel sammanhang så det räcker oftast att läraren ställer diagnostiska frågor utifrån dessa. Läraren planerar lektionen utifrån ett fåtal aspekter i ett större sammanhang och vanliga missförstånd som eleverna kan förväntas uppvisa. Det innebär att läraren kan bistå eleven med information om både vad eleven ska reflektera om och något att kontrastera sin förståelse mot om något som eleven ännu inte förstår fullt ut. Läraren kan då ställa enklare frågor som minskar kognitiva krav genom att förenkla språket eller erbjuda svarsalternativ enligt Lundahl (ibid., s. 114–115). Ett sätt att åstadkomma detta är att ställa frågor om någon av begreppets aspekter i stället för att fråga om eleven förstått hela begreppet. Till exempel, ”vad tror ni, är det variabel, koordinat eller ett tal som detta mystiska x står för i räta linjens ekvation?” för att sondera och precisera vilka relationer till andra begrepp eleverna har uppfattat.

Begreppet variabel i undervisning

Algebra och begreppet variabel har en framträdande roll i matematikundervisning. Begreppet nämns som en del av centralt innehåll för algebra för årskurser 4–9 i läroplanen (Skolverket 2022a, s. 57–58). Några av algebras idéer och begrepp som likhetstecknet eller representation av obekanta tal med en symbol ingår i matematikämnets centrala innehåll redan från årskurs ett (Skolverket, 2022a, s. 55). Algebra utgör därmed en stor del av läroplanens innehåll för matematik, även om det oftast inte kallas algebra förrän på grundskolans senare år.

Att undervisa om algebra och variabel

Lärarna kan använda kännedom av användningsområden och utmaningar kopplade till undervisning av algebra och variabel som ett led i att stödja eleverna. Algebra används bland annat som generaliserad aritmetik och problemlösningsverktyg enligt Andersson och Bolin (2008, s. 7). Enligt författarna är övergången från siffror (aritmetik) till bokstäver (algebra) samt likhetstecknets olika betydelser typiska utmaningar. Eleverna fick alltså inte möjligheten att skapa begreppsförståelse för skillnaderna mellan siffror och variabel samt mellan likhetstecknets betydelser ”är lika med” och ”blir”. Författarna (ibid., s. 8) ger exempel där många elever på årskurs 9 misslyckas med att avgöra värdet av *a* om de får veta att *ab=24* och *b=4*, trots att de löst problem med samma matematiska innehåll flera år tidigare genom obekanta tal uttryckt som __*4=24. Läraren kan då kontrastera mellan olika sätt att representera samma matematiska innehåll för att underlätta för elevernas förståelse.

Hur ska eleverna då förstå variabelbegreppet för att kunna *lyckas* i algebra? Ser läraren variabel bara som ett begrepp bland andra är dess många användningsområden och vad det står för i olika sammanhang som läraren då förmodligen förklarar. Variabel gör det möjligt att ge namn och referera till matematiska objekt och representera okända eller obestämda värden (Wagner, 1983, s. 475–476). Variabel kan representera värden som varierar eller är konstanta, eller stå för abstrakta symboler (Philipp, 1992, s. 560). Sådan plädering är dock alltför allmän för att förstå *varför* variabel används, hävdar Philipp (ibid., s. 557–558). Variabel möjliggör generalisering som aritmetiken från tidigare årskurs saknar. Ett obekant tal är bara obekant fram tills dess värde beräknas, medan det går att representera eller till och med besvara oändligt många frågor samtidigt med hjälp av variabel. Variabel gör det möjligt att uttrycka tal flexibelt, även bortom det annars möjliga så som att följa matematiska modellen av en händelse till tiden *innan* första observation. Att inte *behöva* eller ens *vilja* ta ställning till variabelns värde på förhand ger möjligheter som inte är uppenbara.

Utmaningar i undervisning om variabel

Variabel är algebrans allt-i-allo, samtidigt som det är just den aspekten som gör den så svår att förklara och förstå. Usiskin (1999, s. 7) ger ett exempel där fem formmässigt identiska ekvationer bestående av produkten av två tal som är lika med en tredje kan tolkas som formel, ekvation, identitet, egenskap eller funktion beroende på sammanhanget. Därmed är det inte förvånande att missförstånd om variabel är vanliga bland eleverna (Persson och Wennström, 2000, s. 59; Philipp, 1992, 558). Sagidhi (2022, s. 8–9) redogör för forskning om vanliga utmaningar för att undervisa om variabelbegreppet så som lärarnas omedvetenhet om vanliga missförstånd om begreppet, brist på klassrumsdiskussioner om dess användningsområden eller brister i strukturen hur begreppet introduceras i läroplanen. Matematiska konventioner som att två olika variabler kan ha samma värde eller att ett enda tal kan representeras av uttryck bestående av flera termer kan också vara svåra för eleverna att ta till sig, tillägger han. Å andra sidan behöver eleverna ytterst sällan förstå eller ens känna till hela omfånget av begreppet inom kontexten av en enda lektion, utan lektionen utgår från ett begränsat innehåll som en särskild metod, begrepp eller typ av kommunikation för att vara hanterbart (jfr Hattie et al., 2017, s. 67). Därmed blir det möjligt att utnyttja lektionens sammanhang som en del av förklaringen till vilka av begreppets egenskaper kan vara relevanta.

Sett från språkligt perspektiv, kan ogenomtänkta exempel i undervisningen om variabel orsaka problem för elevernas förståelse i olika grad. Pengar i form av fysiska objekt som mynt och sedlar har blivit ovanliga i elevernas vardag, vilket gör en viss mängd pengar som värde av en variabel lika abstrakt för eleverna som en siffra på kontoutdraget. Exempel kan introducera nya, svårupptäckta missförstånd om värdet av variabel i ett uttryck förklaras som mängden mjölk i ett mjölkpaket eller som antalet tändstickor i en tändsticksask då de kan lätt misstolkas som konstanta, redan kända värden. Olika användningsområden för variabel i representationen av räta linjens ekvation $y=kx+m$ är en språklig utmaning i sig då samtliga fyra variabler kan variera i värde men av helt olika anledningar, k och m förvandlas till konstanter för specifika exempel av linjer och dessutom är värdet av y oftast beroende av värdet på x, men inte alltid. Wagner (1983, s. 474) problematiserar på liknande sätt liknelser av elevernas språkliga uppfattning av bokstäver och ord till variabelbegreppets egenskaper då eleverna kan misstolka dessa kopplingar som både starkare och svagare än de är matematiskt sett. Läraren kan utforma sina egna exempel med omsorg men eleverna möter även läromedlens tolkningar. Därmed utsätts läraren för ett dilemma: skapa undervisningsmaterial själv eller lära sig parera läromedlens eventuella missöden?

Teoretiska perspektiv

I denna del diskuteras sociokulturellt perspektiv utifrån artefakternas roll i att kommunicera begrepp, den närmaste utvecklingszonen som förklaringsmodell för elevernas förkunskaper samt hur förväntningar på undervisningens utformning kan påverka möjligheter att skapa förståelse. Studiens avgränsning till faktorer som har kopplingar till dessa element diskuteras. Variationsteori, som egentligen är en lärandeteori, diskuteras utifrån dess användning som stöd för kommunikation för att åstadkomma begreppsförståelse.

Sociokulturellt perspektiv

Enligt det sociokulturella perspektivet för undervisning skapas begreppsförståelse i socialt samspel genom kommunikation, och språk är det främsta verktyget för detta. Jakobsson (2012, s. 152) tydliggör att betydelsen av sociokulturell teori inte är enhetlig eller tydligt avgränsad i forskningen och föreslår därmed benämningen sociokulturellt perspektiv. Det sociokulturella perspektivet förknippas med den ryska psykologen Lev Vygotskij (Skott et al., 2010, s. 88), även om flera andra forskare har bidragit till det. Vygotskij ansåg att lärande och undervisning bör förstås utifrån de sociala och kulturella sammanhang där dessa sker. Vygotskij utgick från att människan är en social varelse med högre kognitiva funktioner, och kunde därmed förklara människans förmåga för abstraktion och begrepp som kan konstrueras genom språket (ibid., s. 90–91). Därmed är sociokulturellt perspektiv lämplig för att analysera och förstå studiens fokusområde språk och kommunikation. Den bakomliggande konstruktivistiska tolkningen på lärande fokuserar på begreppsbildning hos individen och beaktar därmed inte den nödvändiga interaktionen som matematik med förståelse förutsätter (ibid., s. 121).

Artefakter och kommunicering av begrepp

Människan använder *artefakter,* alltså verktyg som kan vara fysiska eller språkliga, som medierande resurser i sin kommunikation, förklarar Jakobsson (2012, s. 153–154). Han definierar *mediering* som den samverkan mellan människans tänkande, handling och de kulturella artefakterna som driver människans handling framåt. Han (ibid., s. 155–156) föreslår att artefakter kan fördelas till primära, sekundära och tertiära artefakter utifrån deras abstraktionsnivå. Matematiska begrepp motsvarar tertiära artefakter som representeras i den abstrakta eller fiktiva världen, till exempel bokstäver eller siffror, som människan använder för att tänka, förstå och analysera (ibid.).

Kommunicering av begrepp kan ses som mediering med de artefakter som hör till matematikundervisningen, varav några är andra begrepp. Eleven behöver därmed behärska minst de begrepp som ingår i medieringen för att ha förutsättningar att förstå det nya begreppet. Begreppets relationer till andra närliggande begrepp utgör grunden att bygga begreppsförståelse på, och okända eller missförstådda begrepp i hierarkin kan därmed minst delvis förklara den höga andelen elever med icke-godkända betyg trots stödinsatser. Säljö (i Insulander och Selander, 2018, s. 121) hävdar utifrån Vygotskijs forskning att vetenskapliga begrepp kan endast förstås genom att konkretisera och koppla dem till elevernas vardagliga förståelse, eller *explicit mediering*. Vygotskij varnar dock för misstolkningen att läraren därmed ska förklara begreppen med vetenskaplig stringens direkt till eleverna, då det leder till utantillärning utan förståelse (Skott et al., 2010, s. 93). Elevernas varierande förkunskaper gör det dock svårt att individanpassa kommunikationen för flera elever samtidigt. Vygotskijs begrepp *Zone of Proximal Development* (ZPD), eller närmaste utvecklingszon på svenska, beskriver det som är möjligt för eleven att lära i interaktion med någon kunnig i ämnet (Jakobsson, 2012, s. 159). Observera att den kunniga behöver inte vara läraren utan kan vara andra elever som är närmare varandra än läraren i begreppsförståelse och språkbruk. Elevernas förkunskaper i ämnet, eller deras vardagsförståelse enligt Säljö, bestämmer gränserna för deras ZPD. Eftersom elevernas förkunskaper varierar blir inte heller deras ZPD identiska, vilket gör att eleverna kan komplettera varandras förståelse, bara de får tillfälle att göra det.

Säljö (2015, s. 100–101) föreslår att läraren kan använda *scaffolding*, eller intellektuellt stöd och vägledning i stället för att ge färdiga svar till elevernas frågor, som metod för att komma åt elevernas ZPD. Diagnostiska frågor kan bidra till scaffolding från två olika håll. Dels genom att ge läraren vägledning i vilken stöd eleven behöver, dels genom att ge eleven stöd i att identifiera vad de eventuellt behöver finjustera i sin tolkning av begreppet. Att kunna översätta elevens ZPD till lärande kräver handräckning av läraren enligt Säljö (i Insulander och Selander, 2018, s. 122). Matematikundervisning kan å andra sidan beskrivas som en mer strukturerad form av vardagslärande, där eleverna ser hur andra gör och samtalar, enligt Riesbeck (2008, s. 25–26). Hon menar att flexibilitet och improvisation som kännetecknar interaktionen i klassrummet kan utnyttjas till att utforska matematiska modeller, som hon likställer med broar mellan matematikens och icke-matematikens värld. Den nödvändiga strukturen i interaktionerna formas av sociala och sociomatematiska normer som gynnar matematiskt tänkande (Wiklund, 2017, s. 17; Hattie et al., 2017, s. 170–171). Då kan läraren använda även dessa strukturer som stöd till sin scaffolding, till exempel genom att utforma sina diagnostiska frågor utifrån dessa.

Förväntningar i undervisning

Guy Brousseaus term *didaktiskt kontrakt* beskriver de gemensamt bestämda reglerna och ömsesidiga förväntningarna om hur undervisningen förväntas gå till (Wiklund, 2017, s. 20; Skott et al., s. 380). Didaktiska kontraktet för matematikundervisning på samhällets nivå reflekteras visserligen i matematikämnets syfte att utbilda matematiskt kompetenta medborgare i läroplanen, men tyngs av djupt rotad tradition och skolpolitikens nycker i hur motsättningen mellan lärandets krav och undervisningens praktiska utformning ska lösas (Skott et al., 2010, s. 426). Det finns alltför många aspekter i det spänningsfältet för att täcka alla. Denna studie ställer därmed fokuset på elevens förståelse som lyckas ta sig genom alla spänningsfältets hinder och som bekräftas av lärarens uppföljning. Det innebär att även om det finns otaliga sätt för eleverna att avsluta grundskolan utan nämnvärd förståelse, är endast fallen där eventuella brister kan härledas till undervisningens eller kommunikationens kvalitéer relevanta för studien. Till exempel, elever som inte är närvarande på lektioner har ju inte missförstått undervisningen utan missat ett undervisningstillfälle och undervisningens kvalité spelar därmed ingen roll. På samma sätt är inte psykisk ohälsa ett problem som en förfinad förklaringsmodell eller en kommunikationskurs är effektiva botemedel på (Folkhälsomyndigheten, u.å, s. 1).

Lärobokens roll kan då förstås genom att den är en av matematikundervisningens artefakter. Jakobsson (2012, s. 168) poängterar att eftersom eleverna inte varit med de århundraden som utvecklingen av matematikens artefakter tagit, kan lärare inte förvänta att de förstår dem rakt av heller. Han menar att ogenomtänkt introduktion till nya artefakter i undervisningen kan leda till ett begreppsmässigt motstånd mot att använda dem. Därmed kan lärarens förväntningar skilja sig från elevernas, vilket försvårar lärarens uppgift att vägleda elever till förståelse (Wiklund, 2017, s. 21). Till exempel, de räkneuppgifterna i läroböckerna som en gång i tiden uppkom för att skapa mängdträning, möts av kritik att vara meningslösa eller för svåra av dagens elever och skapar en oinformerad kunskapssyn hos eleverna att antalet avklarade uppgifter är det som bedöms. Det kan i sin tur leda till den paradoxala situationen att eleverna hellre arbetar med uppgifterna i boken än lyssnar på läraren som försöker stödja deras förståelse för dem.

Variationsteori

Variationsteori kan också bidra till att förstå begreppsbildning då den beskriver *kontrastering* som kan användas till att precisera kommunikation. Sädbom (2022, s. 3) definierar variationsteori som ”en teori om lärande […] som utgår ifrån att lärande sker genom differentiering och genom att en individ förmår urskilja något som något.” Hon menar att i variationsteorin används kontrast som urskiljande faktor, alltså vad något *är* kontra vad det *inte är*. Ulla Runesson Kempe (i Insulander och Selander, 2018, s. 274) förklarar att ur variationsteoretiskt perspektiv är lärande att förändra *sättet* människan uppfattar eller ser något. Till exempel, att rätta till en felaktig föreställning om ett begrepp. Sådana variationer förekommer i läroböcker, men strukturen för variationerna är ofta begränsad, ogenomtänkt eller varierar i aspekter som inte för elevernas förståelse framåt enligt Löwing (2004, s. 90). Runesson (2000, s. 20) förklarar att differentiering utifrån kontrasten mellan ”rätt” eller ”fel” är för trubbig och försvårar elevernas konstruktion av begreppsförståelse. Hon föreslår i stället olika mönster av variation: variation i talen, lösningssätt, beteckning, kontrastering eller utifrån elevernas förståelse. Det sistnämnda är särskilt användbart i att utvärdera elevernas begreppsförståelse.

För att kunna undervisa om något måste läraren först bestämma vad eleverna förväntas kunna lära. Kullberg, Runesson Kempe och Marton (2017, s. 560) definierar undervisningens *lärandeobjekt* som svar på vilket innehåll, vilka lärandemål och vilka kritiska aspekterna av innehållet som eleverna förväntas få till sig. Sädbom (2022, s. 17) förklarar att kritiska aspekter är det som eleverna behöver kunna urskilja för att förstå något men som de inte kan ännu. Jämfört med ZPD som beskriver vilka möjligheter till lärande eleven har, anger kritiska aspekter vilka mål eleven behöver nå för att uppnå förståelse. Dessa två begrepp bildar varandras motpoler och därmed en användbar dimension för kontrastering för att skapa diagnostiska frågor. Kullberg et al. (2017, s. 566) menar att undervisningens möjligheter att bidra till elevernas förståelse utgår från samstämmigheten mellan undervisningens avsikt, det som blev möjligt att lära, och det som eleverna lärde av det. I stället för att bara undersöka vad eleverna har lärt sig, kan analys på vad de har haft möjligheten att lära sig förklara utfallet bättre.

Variationsteorin har inspirerat mig att använda delar av den för att analysera hur läraren kan förstå kommunikation i undervisningen. Även andra har använt variationsteorin som grund till teoretiska analysverktyg för matematisk kommunikation, till exempel i MPM-modellen (*Mediating Primary Mathematics*) av Venkat och Askew (2017, s. 75). Till exempel, en bra förklaring för ett begrepp innehåller endast väsentliga aspekter enligt Jamisons (2000, s. 48) beskrivning och blir enklare att konstruera utifrån kontrasten mellan elevernas vardagsförståelse och begreppets vetenskapliga betydelse. Att kontrastera mot något som eleverna känner till är mindre kognitivt krävande än att vägleda dem genom vetenskapens okända marker. För att följa upp begreppsförståelse kan diagnostiska frågor ställas mot någon av begreppets aspekter, mot innehållet i tidigare lektioner, mot lektionens förståelsemål eller mot någon av de vanliga missförstånden som eleverna kan ha, på ett mer strukturerat sätt. I denna studie används kontrastering även som vägledning för intervjupersoner att reflektera över sina förutsättningar.

Metod

I denna del beskrivs metoderna och överväganden för datainsamling och analys av de semistrukturerade, kvalitativa intervjuerna som utgör grunden till studiens empiriska del. Intervjufrågorna skapas utifrån kategorier av faktorer som kan medverka till lärarnas förutsättningar att skapa förståelse. Teman som besvarar studiens forskningsfrågor skapas med hjälp av tematisk analys på intervjusvaren. Etiska överväganden för studien diskuteras.

Kvalitativa intervjuer

Studien använder en kvalitativ ansats då fokus ligger på lärarnas tolkningar av sin sociala verklighet, som vore svår att kvantifiera till några entydiga parametrar (Bryman, 2018, s. 61). Avsikten är inte att pröva teorier utan skapa en närbild av lärarnas uppfattning av sina förutsättningar för sitt arbete och en kvalitativ studie är ett lämpligt val för det, anser Bryman (ibid., 487). För att undersöka lärarnas uppfattningar om deras förutsättningar att undervisa begreppet variabel med förståelse utför jag kvalitativa, semistrukturerade intervjuer (ibid., s. 561–562) med fem matematiklärare. Kvalitativa intervjuer kan ses som motparten till kvantitativa intervjuer, som fokuserar på att hålla kontexten samma mellan många intervjuer så att svaren blir jämförbara och generaliserbara till större populationer (ibid., s. 257). Denna studie undersöker lärarnas förutsättningar, vilka kan förväntas variera och som intervjun måste vara tillräckligt flexibel för att kunna fånga in. Deltagande observationer kan också ge inblick i situationen genom andras ögon och observera det som tas för givet (ibid., s. 594) men då jag deltagit i skolans verksamhet under VFU har jag redan viss, om än begränsad insyn i dessa aspekter. En semistrukturerad intervju utformas utifrån de specifika faktorerna som jag vill beröra (ibid., 563), och styrs därmed av en intervjuguide som påminner mig om dessa faktorer. Matematikundervisningen på studiens skola uppvisar tydliga drag av det traditionella, som beskrivs som i viss mån problematisk i denna studie, samtidigt som lärarna kan anses vara i beroendeställning till dessa förutsättningar. Kvalitativa intervjuer ger bästa möjligheten att utforska sådana etiskt känsliga förutsättningar enligt Bryman (ibid., s. 596). Intervjuerna spelas in med en röstinspelnings-app på en mobiltelefon och de för studien relevanta delarna transkriberas (ibid., s. 582; även kallad *purposeful sampling*) inför analys.

Studien använder en fallstudiedesign med en viss skola i fokus enligt Brymans (2018, s. 96) modell. Han förklarar att fallstudier lägger tyngden på det specifika som sker i en viss miljö eller situation. Analysen utgår från det specifika inom skolans verksamhet för att kunna sätta lärarnas uppfattningar om sin situation i ett sammanhang. Det ger möjligheten att skapa djupare förståelse för vilka faktorer kan ha samverkat till deras uppfattning av situationen. En fallstudiedesign kännetecknas av att kunna synliggöra sådana förutsättningar på djupet och att det är fallet i sig som är intressant att belysa, menar Bryman (ibid., s. 97). Djupet i studien utgör å andra sidan en utmaning då lärarna kan förväntas ta sin vardagliga kontext nästan för givet och därmed ha svårt att reflektera över sina förutsättningar, samtidigt som intervjuerna behöver täcka många områden. I det hänseendet liknar min roll gentemot lärarna den som de har gentemot sina elever. Därmed tar jag inspiration av variationsteorins kontrastering för att hjälpa lärarna besvara forskningsfrågorna och för att kunna få en bättre bild av deras uppfattningar. Sociokulturellt perspektiv och dess fokus på språk och interaktion fyller alltså dubbla syften i denna studie.

För att få ytterligare vägledning i studiens frågeställningar, utvärderade jag några elevers begreppsförståelse för räta linjens ekvation med några diagnostiska frågor i enkätform efter en grundlig genomgång om begreppet innan intervjuerna påbörjades. Utvärderingen tydde bland annat på att missförstånd för begrepp är vanliga trots en sådan genomgång. (Enkätsfrågorna samt deras tolkningsmall finns som Bilaga 1).

Urval

Studiens skola, en stor kommunal skola i en mindre stad i Mellansverige, väljs som grund till urvalet av intervjupersoner. Samtliga åtta av skolans matematiklärare inbjuds till intervju för att få en täckande bild av lärarnas bild av deras förutsättningar att kunna göra ett bra jobb. Fem lärare tackade ja till en intervju. För att skydda identiteten av både lärarna och deras arbetsplats ersätts eventuella utpekande detaljer i intervjucitat med mer allmänna syftningar och anges då i <vinkelparentes>. Lärarna benämns med pseudonymerna L1 till L5 och deras bakgrund och erfarenheter kan karaktäriseras med följande allmänna ordalag. L1 har jobbat mer än 10 år som matematiklärare och ser undervisningen och den glädjen hos eleverna när de till slut förstår något som sina främsta drivkrafter i sitt arbete. L2 har mer än 20 års erfarenhet av matematikundervisning och anger matematiken som sådan samt kontakten med eleverna som glädjeämnen i sitt arbete. L3 har undervisat mer än 40 år, och tycker om matematikens kreativa och verklighetsnära sidor. L4 har mer än 10 års erfarenhet och trivs med samvaron och interaktionen med eleverna. L5 har mer än 10 års erfarenhet och ser matematiken och sin roll som förmedlare av den till yngre generation som kärnan i sitt arbete.

Intervjufrågor och kategorier

Intervjufrågorna utgår från forskningsfrågorna och syftet med studien. Studiens empiriska del består av två huvudkategorier: dels hur lärarna uppfattar vad det innebär att undervisa matematik med förståelse, dels vilka möjligheter och utmaningar lärarna kopplar till att undervisa om variabelbegreppet för att åstadkomma begreppsförståelse. För den första huvudkategorin är lärares uppfattning om vad det innebär att förstå matematik, hur läraren uppfattar sin roll att skapa förståelse samt yttre förutsättningar som skolans verksamhet och läroboken erbjuder centrala kategorier. För den andra huvudkategorin består kategorierna av lärarnas uppfattning om variabelbegreppet, hur det kan förklaras, elevernas förutsättningar för att förstå det samt hur läraren kan följa upp begreppsförståelse. Därmed utformas intervjufrågorna utifrån dessa kategorier i respektive huvudkategori. (Intervjuguide med frågorna finns som Bilaga 2).

Eftersom intervjufrågorna utgår från kategorier, kan de även tolkas som ledande, till exempel att variabel förutsätts vara viktig enligt läraren i frågan om på vilka sätt läraren anser att den är viktig. Bryman (2018, s. 569) menar att det viktiga är att undvika styrning, och att variabelbegreppet är viktigt inom algebra torde inte vara ett kontroversiellt påstående för en praktiserande matematiklärare. Några frågor kräver viss självreflektion för att besvara, så som frågan om hur läraren ser sin egen roll i att skapa förståelse, och kan därmed upplevas som svåra. I dessa fall erbjuds läraren exempel att göra liknelser med eller kontrastera mot, inspirerad av variationsteorins principer för att kunna förenkla frågan. På det sättet blir inte frågan för lång (ibid., s. 323) samtidigt som den erbjuder tillräckligt med kontext för intervjupersonen att reflektera kring.

Tematisk analys

Lärarnas intervjuer analyseras genom tematisk analys (Bryman, 2018, s. 702) för att bilda teman utifrån kategorier av faktorer som påverkar lärarens arbete. För att kunna triangulera (ibid., s. 468) lärarnas egen uppfattning om variabelbegreppet tar jag inspiration av sociokulturella perspektivets syn på begreppsbildning och utgår från både hur de beskriver begreppet (vetenskaplig tolkning) samt vilka exempel de väljer att förklara det med (tolkningen till naturliga språk). Bryman (ibid., s. 705), som citerar Ryan och Bernard, rekommenderar att analys av teman kan utgå från repetitioner, likheter, skillnader och språkliga kopplingar som intervjupersonerna ger uttryck för.

Enligt Braun och Clarke (2006, s. 79) är tematisk analys en metod för att identifiera, organisera, analysera och beskriva olika teman i data detaljrikt. Tematisk analys kan bidra med detaljrika belägg för att belysa aspekter av lärarens arbete utifrån ett relativt begränsat intervjumaterial, utan att behöva beskriva allt som sägs under intervjuerna (ibid., s. 83). Studien utgår från ett antal kategorier av faktorer för att rama in förutsättningarna, samtidigt som lärarnas *uppfattning* av faktorernas påverkan utgör källan för att bilda teman som belyser dessa från olika håll. Analysen kommer att utföras enligt stegen i Braun och Clarke (2006, s. 87): 1) studera rådata 2) skapa ursprungliga koder 3) leta teman 4) förfina teman 5) definiera och namnge teman samt 6) skriva rapport.

Analysförfarande

För att transkribera intervjuerna, använde jag *purposeful sampling* för att hoppa över intervjuernas delar som hade låg informationsvärde så som fåordiga tankeprocess som inte tillförde något nytt i lärarnas resonemang. Därefter sållade jag bort meningar ur transkriberade intervjusvar som saknade tydliga språkliga samband med någon av intervjufrågorna, utifrån sociokulturella perspektivets betoning på kommunikation. Därefter sammanställde och sorterade jag svaren under respektive intervjufråga för att lättare kunna identifiera likheter och motsättningar för att precisera kodifiering av svaren. Koderna skapades utifrån intervjufrågornas kategorier som att vad lärarna ser som kännetecken för förståelse, vad enligt dem *inte* är förståelse samt hur förståelse förhåller sig till betyg. Koder för att beskriva deras uppfattning om hur skolans verksamhet påverkar deras förutsättningar skapades utifrån om de upplever att de stöds eller hindras av det i sin strävan att skapa förståelse. Till exempel, följande intervjucitat bildar koden <u>tillämpa </u>som lärarna ser som en aspekt av vad förståelse är för något:

> ”5.45 L2: Förståelse är dels att man utökar sin erfarenhetsbas och terminologin och allting, och så tillämpa den kunskap man har. Praktisk färdighet.”
>
> ”9.08 L3: Jag kan ju då höra att eleven ger ett eget exempel på någonting.”
>
> ”3.25 L5: Men en som förstår matte, för mig, då handlar det om att du faktiskt kan omsätta din kunskap i någonting eget. Kan vrida och vända på saker o ting.”

Följande intervjucitat om bidragande faktorer i skolans verksamhet bildar koden <u>ledning och organisation</u>:

”14.02 L1: Jag har ju ändå en ledning som man känner att man blir uppbackad om det skulle vara någonting.”
”11.37 L4: Sen handlar det ju om rektorerna, att få dom vara lyhörda för vad vi behöver.”
”12.05 L5: Sen är det också hur [mattelagsmöten] ligger rent schemamässigt […] Man skulle kunna göra lite mer organisatoriskt också för att förbättra det.”

Initiala teman skapades utifrån intervjufrågornas kategorier, för att sedan kombinera koderna till olika sammanhängande delar utifrån vilka aspekter av studiens forskningsfrågor de belyser. Koderna fördelades mellan faktorer som utgår från läraren själv och faktorer som påverkar läraren utifrån, i stället för vilket diskussionsämne det hör till. Till exempel, variabelbegreppet är inte förståelse i sig, utan anger kontexten för vilka specifika typer av begreppsförståelse läraren syftar till. Därmed spreds intervjubeläggen som har med variabel *att göra* till teman som är mer specifika om på vilket *sätt* variabel diskuteras. För att precisera bilden av lärarnas uppfattning om variabelbegreppet, har jag även analyserat exempel de använt för att förklara begreppets olika aspekter utifrån språkets roll för begreppsbildning inom det sociokulturella perspektivet. Syftet med detta är inte att leta språkliga fel i exemplen utan belysa påföljderna av naturliga språkets brist på precision genom oreflekterat språkbruk för elevernas begreppsförståelse. Lärarna fick ingen förberedelsetid för frågorna och därmed bör deras exempel tolkas som i olika grad oreflekterade. Språklig analys görs endast inom temat uttrycksformer där lärarna ger längre exempel och där språkbruket i sig är en betydande del av svaret.

Förfining av teman gick ut på att se till att tematiskt närliggande faktorer inte skulle hamna i olika teman utan hållas ihop, samt att se till att teman inte överlappar varandra. Därmed fördelades koderna till olika *typer* av förståelse samt till olika *sammanhang* inom skolans verksamhet. Till exempel, lärarens uppfattning om sin egen roll att skapa förståelse var länge ett eget tema som verkade vara utanför allt annat, tills jag insåg att den bildar en bro mellan forskningsfrågorna och behövde därmed fördelas mellan dom. Till exempel, lärarens strävan efter att leta sammanhang som eleverna kan relatera till är inte förståelse i sig utan något som läraren *gör* för att visualisera begrepp i kontext och kan därmed snarare ses som en uttrycksform för variabelbegreppet som läraren kan använda för att skapa förståelse. Slutgiltiga teman och deras definitioner redovisas i resultatdelen då de används för att besvara studiens forskningsfrågor.

Forskningsetiska principer

Vetenskapsrådets forskningsetiska principer tillförlitlighet, ärlighet, respekt och ansvarighet motsvarande Mertons CUDOS-krav (Vetenskapsrådet, 2017, s. 13) togs hänsyn till genom att låta publicera studien i DiVA, genom att skydda informanternas identitet via anonymisering, genom att respektera den vetenskapliga metoden samt genom att säkerställa att resultat och slutsatser går att hänvisa till studiens empiriska underlag samt bakgrund. Triangulering utifrån ett flertal sammanhang har använts för att säkerställa att eventuella enskilda missförstånd och syftningsfel mellan intervjuerna och min tolkning av dessa inte har alltför stor påverkan på resultaten.

Inga personuppgifter behandlades i studien då lärarintervjuerna var anonymiserade. Lärarna i studien kontaktades via e-post innehållande ett informationsbrev med förklaring av syftet för studien och att deltagandet var frivilligt (informationsbrevet finns som Bilaga 3). Lärarna blev informerade innan intervjuerna att de kunde när som helst avbryta intervjun utan förklaring. Lärarnas beroendeställning till sin arbetsgivare, vars förehavanden var en del av de förutsättningar som analyserades, beaktades genom att alla detaljer som skulle undanröja vilken skola det handlar om avlägsnades under analysen, för att skydda lärarnas identitet.

Resultat

I denna del redovisas teman som belyser lärarnas uppfattningar om sina förutsättningar från olika perspektiv. Analyserade teman utgör tillsammans svaret på studiens forskningsfrågor. Teman utgår dels från lärarnas uppfattning om vilka olika typer av förståelse ingår i termen matematik med förståelse, dels vilka implikationer skolans verksamhet har för lärarnas förutsättningar att skapa förståelse. Koderna som ingår i teman anges understrukna för att särskilja från användning av termerna i andra sammanhang.

Matematik med förståelse

Lärarnas uppfattningar på vad matematik med förståelse innebär varierar och är delvis motstridiga. Denna tolkning stöds även av mina observationer under VFU då jag upplevde att lärarna verkade ofta prata om lite olika saker när vi, till exempel, diskuterade om vilken sorts förståelse en provuppgift syftade till att framhäva. Uppfattningarna redovisas genom tre teman: Prestation, abstraktion samt uttrycksformer.

Prestation

Temat prestation beskriver de olika sätt lärarna ser förståelse som prestation. Temat är därmed nära sammankopplat till lärares praktiska bedömningsarbete där uppföljning av kunskaper och betyg ingår. Temat speglar även samarbetet med kollegor (eller bristen av detsamma) i frågor om hur lärarnas olika tolkningar av förståelse styr deras val av innehåll.

Alla förutom L3 ger uttryck för att förståelse är att se helheter, eller som L4 summerar det: ”Att man ser en helhet, förståelse. Det är förståelse för mig.” L5 kopplar det direkt till begreppsförståelse: ”Du har en bra förståelse för ett antal begrepp, du förstår hur dom hänger ihop”. L2 tillägger att eleverna även glömmer bort tidigare undervisning om det inte sett hur helheten hänger ihop, vilket gör att ”man får uppfinna hjulet på nytt varje gång”. L4 ger exempel på att förståelse av ett tal innebär inte bara att se talets värde utan även hur olika siffror och matematiska operationer kan kombineras för att få talet som svar. L1 erbjuder ett motexempel genom att likställa matematik utan förståelse till ”ett lapptäcke, som… hänger ihop på nåt sätt. Man har inte sytt ihop dom.”

L2, L3 och L5 förknippar matematik med förståelse med att kunna tillämpa sina kunskaper, vilket L5 sammanfattar med ”att du faktiskt kan omsätta din kunskap i någonting eget, kan vrida och vända på saker o ting.” L2 ger exempel som att eleverna då ”utökar sin erfarenhetsbas och terminologin” och visar ”praktisk färdighet”. L3 menar att när ”eleven ger ett eget exempel på någonting” är det förståelse. Vad lärarna sen faktiskt *syftar* till med det varierar när de diskuterar variabelbegreppet. L2 ”vill se utvidgningen i begreppet och själva förmågan att använda sina kunskaper i hur man gör det konkret.”, alltså liknande begreppsförmåga. L3 använder i stället ett mer indirekt samband och pejlar begreppsförståelse utifrån hur eleven klarar av att hantera balansmetoden i ekvationslösning och ”lösa ut variabeln […] så att uttrycket blir sant”, alltså genom metodförmågan. L4 vill se att eleven kan skapa uttryck utifrån att *läraren* fastställer betydelsen av variabeln i en given kontext och verkar syfta till metoden att bilda uttryck:

> ”Vad x är och det är du. Utgå ifrån dig själv. För då ser jag om nån förstår vad x är. Och då kan de bygga på x. 4 gånger x och 2 gånger x plus 3 och x dividerat på vad det nu kan va.”

L5 kopplar även tillämpning till begreppsförståelse och ger specifika exempel på vilka av begreppets aspekter eleven behöver känna till:

> ”Jag vill ju att dom ska förstå dom här olika aspekterna. Att det faktiskt handlar om ett tal. Sen vill jag att det kan representera olika tal. Gärna kanske kunna använda den i någon form av situation också då. Ungefär när kan man använda, när passar det använda, när passar det inte använda. Någon form av kontext till det hela är ju bra.”

Alla förutom L4 karakteriserar matematik utan förståelse som att det är väldigt <u>mekaniskt</u>. L3 sammanfattar det som att ”det är bara att mekaniskt plocka omkring med siffror, man har lärt sig mekaniskt ett sätt, men man reflekterar inte över dom och om svaret är rimligt eller om det är korrekt.” Uttrycken för detta varierar brett. L1 kallar det som memorering för stunden, L2 att man sysslar med något som ser ut som matematik och L5 att lära utantill. L5 jämför det med att kunna genomföra en metod utan att förstå varför det fungerar, eller till att använda tabellfakta för att lösa en uppgift. L2 och L3 ger dock även motsatt uttryck för att mekaniskt nötande kan behövas för att skapa förutsättningar för förståelse. L2 föreslår att ”även om man är totalt ointresserad av matematik så behöver man ju ha räknefärdigheterna utan att förstå, vissa saker behöver man ju bara kunna räkna ut, i ett vidare perspektiv.” L3 ser sambandet från andra hållet och menar att ”vissa elever, när dom har en svår förståelse, så måste dom lära sig på ett mekaniskt sätt, så här gör man.”

I fråga om lärarna anser att <u>betyg är ett bra mått på förståelse</u> går uppfattningarna helt isär. L2 och L3 menar att betyg inte mäter förståelse, utan ”[betyget] måste kopplas till vad som ligger bakom den här bokstaven” (L2) eller att ”man skulle behöva ha ett praktiskt prov på något sätt att kunna visa sin förståelse” (L3). L4 och L5 har i stället en motsatt uppfattning. L4 beskriver det som att ”du måste ju ha förståelse för att uppnå högre kunskaper […], dom har en stark koppling till varandra.” L5 förstärker kopplingen till begreppsförståelse även här: ”Eftersom vi tittar på begrepp, att man kan använda och hantera, så det är ju klart att det innefattar också förståelse för att kunna hantera dom på ett korrekt sätt.” L5 uttrycker sig dock lite mer nyanserad och medger att lägre betyg motsvarar så låg grad av förståelse att det redan leder till systematiska fel. L1 tydliggör detta med att ”ett E, tycker jag kan nog vara så att du kommer undan förståelsen, du har memorerat in en stor del för att klara det.”

Läraren måste även kunna ta reda på om eleverna har förstått för att synliggöra prestation. L1 utgår från sin <u>erfarenhet</u> och de mönster och frågor som ständigt återkommer, men syftar då till tidigare elever:

> ”Dels erfarenhetsbenet, som man har byggt upp under tid, där man har utvärderat, egentligen när man har haft tidigare elever som skrivit prov. Vad är det jag alltid, vad är det för mönster jag ser som jag måste ta till mig. Det är ett ben, att det här måste jag repetera för det här brukar många ha svårt med. Sen har vi benet 'vad är det för frågor'. Det är oftast samma frågor jag ska svara på hos många. Det är ett annat ben att stå på.”

L1 nämner avslutande uppgifter, läxor och exit-tickets som exempel på <u>testuppgifter</u>. L2 kan tänka sig skapa en förtest, men reflekterar även över risken för överdrivet välvilliga tolkningar av vad eleverna uppvisar i och med att ”om dom inte ens kan förklara vad dom *inte* förstår, hur ska dom kunna förklara vad dom har förstått.” L3 föreslår två olika uppgifter som dock går ut på att lösa en nummerkombination eller en fysikuppgift med kända värden snarare än att uppskatta begreppsförståelse:

> ”Jag har skrivit en lista med till exempel olika saker man kan köpa i en kiosk. Det kan vara tre glassar, två cola eller bullar eller vad det nu än är. Jag betalar så här mycket. Hur många har jag kunnat köpt av varje? Att dom kan se nånting som dom själva skulle kunna ha gjort. Jag måste relatera till nånting som dom kan känna igen. Eller ja, hur lång tid tar det att åka till <grannbyn> med sin EPA den här sträckan, tiden och…”

L4 beskriver en uppgift där eleven förväntas skapa uttryck för elevens familjemedlemmars ålder, uttryckt genom elevens egen ålder som x. L5 föreslår avslutande uppgift först men beskriver även en direkt metod genom observation av och diskussioner med eleverna:

> ”Annars så kan jag ju avsluta en lektion med att ha nån form av uppgift som dom kanske lämnar in till mig då. Och på det viset kan man ju se. Ibland hittar jag på uppgifter som vi jobbar med, till exempel en uppgift som är väldigt bra för att se just dom aspekterna då. Så kan jag gå runt och titta på alla och få dom att berätta om den uppgiften, enskilt. Då får jag ju deras bild av hur dom uppfattar det.”

Abstraktion

Temat abstraktion beskriver de olika sätt lärarna kopplar matematik med förståelse till variabelbegreppets bidrag till abstraktion i matematiken samt vilka områden av högstadiets matematik de förknippar med användning av begreppet.

Lärarna anser enhälligt att variabelbegreppet är en viktig del av algebra då den möjliggör generalisering. L5 sammanfattar begreppets bidrag:

> ”Tidigare har man ju jobbat med siffror som faktiskt är fixa värden. Här är ju nånting nytt, att plötsligt kunna säga att nån form av tecken faktiskt kan symbolisera många olika saker. Det är ju en ny dimension. Det tillför ju då möjligheten att faktiskt beskriva flera situationer på en enda gång.”

L1 uttrycker samma idé med ett exempel om vad det kan innebära i praktiken:

> ”Du behöver kanske inte lära dig alla formler utantill utan kan du en grupp formler så kan du alltid – om vi pratar geometri – du kan använda variabel för det du söker. Till exempel en höjd i cylinder. Då behöver du ingen specifik formel för den utan utgår från samma grund hela tiden. Och ersätter med variabel.”

Både L1 och L2 uttrycker att variablernas roll i algebras symbolspråk blir mer uttalad ju längre eleverna kommer med sina matematikstudier. L5 ger ett exempel och menar att ”för att kunna beskriva mönster, så när man har börjat förstå att man kan använda sig av variabler och bygga upp formler, så får man ju in den även [i det matematiska språket].” L3 problematiserar dock underutnyttjandet av konceptet *okänt tal* som eleverna är bekanta med sedan tidigare:

> ”Och skrivsättet, när man tittar på lägre åldrar så har det varit tomma rutor eller en blomma eller någonting som har ersatt den här variabeln. Och då har det fungerat bra för eleverna men så fort dom ser bokstaven x och y tillsammans med siffror, då har man helt kopplat bort dom här blommorna. Det är något helt nytt.”

Variabelns bidrag till att styrka matematikens kopplingar till verklighet genom matematisk modellering sammanfattar L1 med att variabel ger ”en helt ny värld att använda variablerna till.” L3 upplever att många elever har svårt att komma så långt i sin begreppsförståelse att de faktiskt ser dessa kopplingar, och ger förslag på att dessa kopplingar behöver då lyftas:

> ”Jag brukar använda variabler när jag ska visa, om man säger nivåer. Om vi skulle visa delbarhet med tre, till exempel. Då eleverna skriver upp en massa tal med siffersumman för att visa att det är delbart med tre. Och ibland så visar jag, så sätter jag in en variabel, tre på varandra följande tal, hur dom kan vara delbara med tre. Och då talar det om att kan använda en variabel i det här så är det på högre nivå än om jag skulle bara ha en massa siffror. Jag vet inte om dom riktigt fått den förståelsen att dom ser det. […] Allt sånt här handlar ju också om färdighetsträning, att man tränar ofta på det. Variabler och algebra får inte komma ner som en bomb. Utan man kanske ska använda det ofta.”

L1 menar att variabler underlättar problemlösning genom att de erbjuder ett ”effektivt sätt att ta till när man har problem […] i samband med matematik”. Trots detta anser L1 även att ”själva variabel i sig är ju så liten del, men när du väl börjar förstå vad du kan använda den till så öppnar den ju en helt ny värld i matematiken.” L3 erbjuder en förklaring till denna motsägelse då eleverna sällan reflekterar över det de gör utan ”att man kan använda variabler själv utan att tänka på att det här handlar om variabler.” L5 kopplar variabler till att förstå mönster i problemlösningen, vilket L4 tydliggör ytterligare med att algebraisk lösning utnyttjar variabler till att knyta till problemets kontext:

> ”I förlängningen så handlar det ju om att vi ska kunna lösa sådana svårare uppgifter, alltså… lite mer kontexta uppgifter där du ska lösa med, du kan hitta vilket sätt som helst att lösa den och då kan du göra en algebraisk lösning.”

Lärarna ser variabel som centralt flera olika sammanhang inom högstadiematematiken. L1 nämner att det är ”i samband med <u>funktioner</u> som vi använder variabler, och där blir det ju mer konkret, till exempel för räta linjens ekvation, där använder vi variabler.” L3 ser <u>funktioner</u> även som ett möjligt sätt att relatera till aspekten *det okända* med variabler:

> ”Den största utmaningen är att försöka förklara hur ska man kunna se det okända. När man kommer in på funktioner och det finns bilder på funktionsmaskiner och det finns lådor som man kan använda sig av. Man stoppar in nånting och det kommer ut nånting annat och vad är det som har hänt här i maskinen.”

L1 lyfter <u>ekvationslösning</u> som ett annat exempel: ”Men när man väl har lärt [begreppet], vi säger i ekvationslösning, då vill jag få in det i alla moment.” L3 ser ”enkla ekvationer” som grunden till algebra. L4 kopplar ihop variabel till ekvationslösning och hur det underlättar att skapa sammanhang för att förstå begreppet uttryck.

Uttrycksformer

Temat uttrycksformer beskriver olika former av kommunikation lärarna uppfattar som lämpliga och inspirerande för att skapa begreppsförståelse. Lärarnas exempelförklaringar citeras i sin helhet för att synliggöra de språkliga knepen de väljer att använda.

Lärarna är tydliga med att de behöver <u>leta sammanhang</u> som eleverna kan relatera till och ha nytta av för att bygga förståelse. L1 summerar det med att ”försöka koppla det till vardagliga sammanhang för att skapa en förståelse, var kan jag haka i dina kunskaper?” L3 jämför det med hållbar utveckling där man ”kanske måste ha en förklaring till varför kastar jag mjukplasten där” eller med sjukvården där man ”kanske inte kan prata i medicinska termer hela tiden utan att man förklarar saker så att patienten förstår vad det handlar om.” L4 konkretiserar det genom att hävda att läraren ska ”väva in [Pythagoras sats] och hur det används dagligen för att kunna bygga ett hus, att sätta in ett fönster. Interagera med arbetslivet, kan man väl säga.”

Med att <u>lyfta innehållet</u> menar lärarna saker som att inspirera (L2 och L4), att lyfta och berika förklaringsmodeller (L1 och L5). L3 menar att eleverna ska ”kunna klara sitt vardagsliv, och inte bli lurade”, som ett mer ”kreativt, hands-on” sätt att se på matematiken underlättar för att minska avståndet till vardagslivet. L1 ger exempel om berikning som att låta eleverna vara kreativa eller genom att variera förklaringsmetoderna så som att variabel kan visualiseras med någon bildlig eller muntlig beskrivning. L3 berättar om sina erfarenheter att eleverna kan inspireras av att bara *se* varandras matematik:

> ”Jag hade en egen lektionssal, för där fanns det något man kallar för en workshop. […] Och då hade jag en kurs på varje tavla som kunde stå kvar, och det gjorde att andra elever också lärde sig mer av det faktiskt.”

Lärarna anser att en situation, som motsvarar ungefär vad begreppet uttryck representerar i matematiken, kan användas för att uttrycka variabelbegreppet i ett lämpligt sammanhang. L1 kallar det att skapa en händelse. L2 försöker även få med hur variabel påverkar hela värdet av ett uttryck med sin förklaring att ”det här är en variabel, som kan då anta olika uttrycksstorheter och det påverkar vårt resultat i det hela.”. L3 förklarar i stället variabelbegreppet genom hur den *används*, till exempel som koordinater eller som en del av balansmetoden i ekvationslösning:

> ”Variabel kan vara en bokstav, vilken som helst egentligen, men vanligast är ju x, y och z. Och då är det nån elev som säger, ja det blir x, y, och z. Det är tre dimensioner. Så har det ju varit. Det är också i förståelsen att jag löser ut min variabel så att den blir ensam. Och det måste finnas något på andra sidan som väger upp lika mycket på andra sidan. Men jag vet inte om dom skulle kunna ta till sig det. […] Jag kanske till och med skulle kunna använda mig av en våg och jag ställer på klossar. Hur många klossar ska jag ha här på den sidan så att det ska väga jämnt.”

L4 lyfter särskilt variabelns egenskap att den alltid står för samma värde i en viss kontext, men kan stå för annat i en annan kontext, vilket läraren upplever som problematiskt för eleverna att förstå. L4 ger även ett förslag hur aspekten *det okända* kan förklaras i kontext:

> ”Du byter ut siffror mot bokstäver. Och att det är fortfarande så att om du säger att x är 14 så är det 14 genom hela den uppgiften. Du kan inte byta mitt i. Däremot kan nästa uppgift vara att x är 13 eller 7 eller vad som helst. Så det beror på utifrån det. Jag skulle också säga till eleverna att vi börjar nu att gå från siffror till bokstäver. Men bokstaven är nu en siffra. För det blir väldigt abstrakt för dom i första läget och det är därför jag brukar börja med till exempel något dom känner igen. Åldern. Eller kan också vara kronor men mest bäst är det här för det är oftast något dom tar till sig. Eftersom dom oftast vet hur gamla sina föräldrar är, eller sina syskon är eller farmor, mormor, inte vet jag. Utifrån det. Använda något känt för att förstå okänt.”

L5 kombinerar flera sätt att förstå situationen, kontrasterar mellan varierande och konstant del i kontext, konkretiserar det som *inte* går att lösa utan variabel och erbjuder till slut variabel som en lösning till dilemmat som skapats i kontext:

> ”Jag tar väl nån form av situation när vi då ser nånting som kan faktiskt… som inte är statiskt. Man kanske kan jämföra med nånting som är statiskt också. För att kontrastera då. Vi har nånting här som alltid är så här. Men sen har vi nåt annat som faktiskt inte alltid är samma. Vi vill kunna beskriva både och. Jag vill beskriva en 8 m lång bräda, men jag vill kunna beskriva nåt annat som inte alltid är 8 meter. Och då måste jag på något sätt ha något sätt att göra det också. Hur beskriver jag då om jag inte vet hur lång det är? Men jag vill ändå beskriva det på nåt sätt. Vad ska jag göra? Jag kan ju inte använda ettan, tvåan, trean, fyran. Ingenting. Jag kan inte använda en kombination av siffror heller. Jag måste införa något nytt. *Då* kommer variabeln.”

För att konkretisera vad lärarna menar med en situation ytterligare, gav de exempel på vad uttrycket *2x+3* skulle kunna *betyda* i en valfri kontext. L1 väljer att förklara uttrycket genom okänd och känd del, ger två olika exempel på kontext, ett förslag på hur det skulle kunna visualiseras på tavlan som okänd och känd sträcka samt förklarar även aspekten att x alltid betyder samma inom kontext:

> ”Det kan ju vara allt ifrån en linje, där vi inte vet, alltså det kan vara 3 cm och så har vi en okänd sträcka i två delar, så skulle jag kunnat ritat upp det. Jag skulle nog rita upp en linje, och dela den i 3 cm, och två sträckor som är okända. Det skulle kunna vara någon okänd låda, och tre mynt på sidan. Jag skulle nog kanske tydligt med en tavellinjal, visa… alltså en cm för litet men vi säger tre dm. Det här vet vi är 3 dm. Sen den här vet vi inte, den här är okänd. Att det okända står för en variabel. Och sen 2x, det skulle jag nog dela upp det så att ”här har vi ett x och här har vi ett x”. Vet du då att dessa två x är samma? Men varifrån kommer det där 2, jo, slår vi ihop dom.”

L4 använder också okänd och känd del, men råkar placera *det okända* på ett oväntat ställe:

> ”Vi tar väl ålder då. Du är… Jag är två år… två gånger äldre än vad du är plus tre år till. Det skulle jag kunna säga där.”

Även L5 utgår från okänd och känd del, men fångar in även aspekter så som vad hela uttryckets värde står för i kontext:

> ”Jag skulle säga att det skulle kunna vara… två stycken… stavar, av okänd längd. Sen har vi en ytterligare stav som vi vet att den är 3 längdenheter lång. Och det uttrycket beskriver ju då längden om vi skulle lägga alla på raken.”

L2 börjar i stället med fast och rörlig del, men kommer direkt på insikten att det valda sammanhanget inte vore optimal för eleverna och problematiserar vidare på det. L2 ger till slut även några förslag på lämpliga sammanhang att gynna elevernas förståelse:

> ”Man hamnar ju oftast i fast o rörlig kostnad… Vilket är också rätt fascinerande att man tar dom eftersom eleverna väldigt sällan betalar själva. Väldigt få elever har åkt taxiresa själv, eller ringt rörmokare. Det kanske är ett problem att vi bygger in det, för vi måste ju hitta ett problem som dom förstår i den kontexten dom faktiskt är. Så att dom förstår att det finns saker även i elevernas värld som…Där det är liksom variabla och inte fasta.
> Jobbar man på individnivå så handlar det ju mycket om att lära känna. Jag har sport-killar, jag skulle kunna försöka hitta en sport-parallell till det hela. Jag har ridtjejer, jag skulle kunna dra det till foder, till saker som dom gör.”

L3 ger endast ett kortare exempel.

> ”Får jag handla? Trean står för den här lilla papperspåsen jag ska köpa och jag köper två stycken, nej… det x:et som är antalet och det här är nånting som kostar 2 kr per styck.”

Lärarna hade svårt att förstå intervjufrågan när jag insisterade att de skulle även beskriva skillnaden mellan uttryckets variabla och konstanta del i den valda kontexten. L1 nämner i förbifarten att ”det okända står för en variabel” men ger inget att jämföra och kontrastera det med. L2 ger i stället bara två olika möjliga värden för variabeln, byter kontext helt samt ger ett cirkelresonemang att konstanter är konstanta i båda fallen:

> ”Vi säger att det är morötter. Som på det ena stället kostar 3 och på det andra 3,50 och jag ska ha två kilo. […] Och så ska jag tydligen ha en kasse som kostar 3 kr också utöver det. Och det kostar dom på båda ställen.”

L3 förklarar inte den avsedda skillnaden men ger i stället ett exempel på vad det skulle innebära i den valda kontexten om uttryckets konstanta del skulle försvinna:

> ”Ja, att trean är ju en konstant, den kan inte variera nånting. Och om jag inte skulle ha trean, då tar jag den här saken i handen utan nån påse.”

L4 tydliggör att det är kontexten som förklarar tvåan och trean i uttrycket, och ger förslag på alternativa förklaringsmodeller och symbolspråk för att få med flera elever på tåget, men förklarar inte skillnaden mellan känd och okänd del alls:

> ”Tvåan och trean går inte att ändra på. Skulle gått att ändra på nästa uppgift.
> En del har ju lättare att säga så här att vi sätter för, och så står det lika med tolv här. Vad måste det stå här då för att det ska bli tolv? Om man börjar med frågetecken. Det har dom ju i mellanstadiet. Det kan vara ett sätt att närma sig x också. Och då säger vi att i stället för frågetecken sätter vi ut x. Då vet du ju att x just här är vad det nu blir.”

L5 kom till slut fram till ett resonemang att ”det är ju hela tiden vetskapen om, och ovetskapen om som särskiljer dom åt.”

Möjligheter och utmaningar för att skapa begreppsförståelse för variabel

Lärobok

Temat lärobok beskriver vilka möjligheter och utmaningar i att skapa begreppsförståelse lärarna kopplar till läroboken och dess roll i undervisningen.

På studiens skola används två olika läroböcker i matematik, som refereras till med pseudonymerna Bok1 och Bok2. L2 sammanfattar lösningen med två böcker med:

> ”Just nu har vi hamnat i ett läge där två av årskursarbetslagen har lämnat en bok vi bestämt från början, så vi har <Bok1> och dom andra har gått över till <Bok2>. Så sjuan och nian har samma läromedel och åttan har det gamla läromedlet.”

L5 använder Bok1 med sina åttor och tillägger att ”eftersom vi är i gång med den andra serien så tänkte vi att vi fortsätter med det.”

L1 menar att läroböcker erbjuder stöd och ”har många fördelar” som att visualisera med bilder och skisser samt erbjuda övningsuppgifter som hjälper elever att bygga grunden för att sedan kunna använda variabler i andra sammanhang. L1 menar att ”<Bok2> är bra, den lyfter upp det väsentliga [av variabelbegreppet]”. L4 menar att Bok2 ”har mera övningsmaterial på en nivå dom här eleverna som har svårt att förstå faktiskt förstår, dom måste också få en metod först, att kunna den i stället för att det är språket som är väldigt svårt att förstå vad de ska göra.”

L1 ger dock även exempel på låga krav så som att bokens material ”inte räcker för att klara godkända betyg.” L3 reflekterar i stället över antalet och djupet av uppgifter samt menar att böckernas tydliga nivåmarkeringar är ett problem i sig, jämfört med en tredje bok som läraren använt tidigare på en annan skola:

> ”<Bok2> Jag kan tycka att den ändå blir på för låg nivå. <Bok1> är ju tvärtom. Den är nästan för mycket, den går väldigt på djupet på alla nivåer. Så det är väldigt mycket uppgifter. Så det är en svår balansgång. Där jag kommer ifrån så har jag haft ett digitalt läromedel som heter <Bok3>. […] Det finns uppgifter på alla nivåer och det som var bra där var att det inte var tydligt att det var nivåer. Det var fem steg att jobba med, och då märkte jag att eleverna utmanade sig mera. Att de inte visste att det var svåra uppgifter men att dom utforskade mer än vanligt.”

L1 kritiserar bokens tydlighet med att Bok1 skulle behöva korrekturläsas och ”kanske rensas lite på uppgifter för de var ju i lite konstig ordning.” L1 menar att boken ”förklarar [variabelbegreppet] fattigt”. L3 tycker att ”<Bok2> är väl sisådär, den är lite konstigt upplagd, […] den är lite hoppig.” L4 tycker att Bok1 är rörig. L5 ger en utförligare analys om språkliga utmaningar i Bok1 och utpekar meningsbyggnaderna som utmanande både för elever och lärare:

> ”Jag skulle säga att det finns klara svagheter i <Bok1>. I hur man, i skrivelseuppgifter och så, som ställer till det för eleverna. Så är det ju. Meningsbyggnaderna. Hur man ställer frågorna. Om man har en a-b-c fråga så vill man gärna få ihop det så att man kan börja gemensamt och så kan det delas upp i tre olika frågor. Det blir ingen rak ordföljd i det riktigt, vilket då kopplat tillsammans med elevernas bristande läsförmåga, gör att dom får svårt att förstå frågan.”

L2 resonerar att båda böckerna använder både kontext och språk som inte motsvarar de som eleverna behöver för att utveckla begreppsförståelse:

> ”Dom förklarar variabelbegreppet, men det är inte alltid säkert att dom som då ska ta emot förklaringen ligger på den matematiska nivån att dom kan förstå förklaringen. […] Tittar vi bara på läroboken, som ändå är hyfsat kvalitetssäkrad i den genomgången.”

L2 och L5 ifrågasätter bokens betydelse till undervisningen. L5 uttrycker att frågan om vilken bok de ska använda har tagit för mycket tid av viktigare diskussioner. L2 förklarar det som att läroboken har fått en för stark roll pedagogiskt sett:

”I min värld så är det mitt läromedel som ska vara ett komplement till mig som undervisande pedagog, inte jag som ett komplement till lärarhandledningen i den boken eller läromedel vi har valt. Jag tycker vi jobbar alldeles för läromedelsstyrt.”

Lärarna är kritiska till att boken ger en falsk indikation om kunskap. L1 sammanfattar att boken ger ”en falsk indikation till eleverna att jag är på ett A fast jag ser att jo, du har missat ganska många delar, eller att du fixade ett E men här kommer kompletteringsuppgifter för det här och det här har du inte med dig.” L1 tydliggör att boken ger en ”snäv syn” på variabelbegreppet. L2 förklarar att ”räkna i böcker” leder inte per automatik till att eleven har ”lärt sig det man ska”, utan:

”Ungarna tror att matematik är att räkna i böcker och följa planering så att bara jag är på sidan 77 på fredag vecka 4 så då sköter jag mitt jobb. Men det finns liksom ingen koppling mellan det och sen tro att man har lärt sig det man ska. Det är ganska mekaniskt (skratt). Det blir fokus på att räkna algebra men finns ingen koppling till just det du pratar om förståelsen. Bara att jobba i algebra, t.ex. i boken så kommer man inte till dom där ’aha’ utan det ser ut som du jobbar med matematik men du sitter och räknar.”

Tid

Temat beskriver de olika sätt lärarna uppfattar att deras effektiva undervisningstid krymper. Temat ingår egentligen i flera andra teman, men eftersom lärarna refererar till tidsbristen i så många olika sammanhang, lyfts den som ett eget tema för att avlasta andra och samla tidsaspekten till ett ställe.

Lärarna ger flera exempel på både hur tidsbrist i undervisningen syns i deras arbete. L4 sammanfattar att klasstorlek ”är det som är den stora utmaningen i ett stort klassrum där vi är kanske 25–27 stycken, 30 ibland, att få alla att hänga med på tåget, framför allt i dag då vi har fått så himla stora grupper på den här skolan.” L1 analyserar förutsättningarna ur flera perspektiv och kopplar tidsbristen till stödfunktion som inte räcker till samt klasstorlek som ständigt ökar:

”Jag tänkte senast i dag att jag lägger mer tid på allt runtomkring, att få tillbaka elever, kontakta kurator, än vad jag hinner för att lägga på undervisningen just nu. […] Jag tycker dels så har vi gått till större klasstorlekar. Har man 24 kontra 28, det ser kanske ut inte så mycket på papper, men det är väldigt mycket. Vi har ganska många elever som börjar i och med att vi är en <kommun med särskild inriktning> som också ska in. Vi tycker att vi är fulla men dom ska ju in för vi är en kommunal skola. Så vi växer o växer o växer.”

L3 jämför med hur undervisningen bedrivs på NO-lektioner och föreslår halvklasser som en lösning på tidsbristen. L2 menar att lärarnas icke-undervisningsrelaterade arbetsuppgifter ökat i mängd och föreslår heltidsanställda mentorer som en lösning:

”Från att få in alla elever i klassrummet, se till att <lokalt trafikbolag> får hit dom i tid, till att gå genom hela <närvarolistan>, pricka av vilka som inte är här, konstatera att jag har tre elever som ska vara här, fast eleverna själv säger att de vet att de är sjuka men som föräldrarna glömt att sjukanmäla. Sen administrationen runt min tid också tar tid. När jag hör kollegor på andra skolor som skulle hjälpa så är det ju supermentorer eller mentorer som bara jobbar med elever och deras föräldrar. Där vi som är undervisande lärare får ägna oss att planera undervisning, genomföra undervisning och utvärdera undervisning.”

L2 påpekar även att skolan skulle behöva personal för att hinna med alla arbetsuppgifter:

”Lärare är en av dom få yrkesgrupper där man helt plötsligt måste vara kompetent på fler och fler områden, som lärare ska jag vara kompetent kurator och kamratstödjare. Jag tänker också med tillgängligheten. Jag hade ett tillfälle i höstas där jag behöver markera mot två elever och skickar ut dom. […] Det tar ändå två timmar av min arbetstid att bolla e-postmeddelanden fram och tillbaka till två pappor.”

Lärarna härleder tidsbristen även till elevernas bristande intresse för matematik och sociala problem så som psykisk ohälsa eller bristande studiemotivation. Sådana faktorer ligger dock utanför studiens fokus och därmed endast nämns här.

Skolmiljö

Temat skolmiljö beskriver vilka möjligheter och utmaningar i att skapa begreppsförståelse lärarna kopplar till skolans styrning och kunskapssynen som råder på skolan i stort.

Lärarna menar att skolmiljön kan skapa samordning som bidrar till deras förutsättningar. L1 tycker att det finns ”en ledning som man känner att man blir uppbackad om det skulle vara någonting.” L2 önskar att skapa ”verksamhet som vi vill ska vara professionell och utvecklande för både oss själva och till eleverna.” L3 ger ett motexempel och menar att ”utan det blir som att man kör sitt eget race” samt önskar ”att vi hade någon typ röd tråd, att det här ska vi ha gått genom.”

Lärarna anser nästan enhälligt att skolans ledning och organisation skulle kunna vara smidigare och mer lyhörd i att skapa samordning. L4 uttrycker att både kommunpolitiker och skolans ledning skulle behöva vara mer lyhörda för skolans och i förlängningen även lärarnas och elevernas behov genom att se till att det finns tillräckligt med plats och att schemat fungerar för alla:

> ”Det beror ju på hur väl dom sätter sig in i vad skolan behöver. Om dom faktiskt lyssnar på oss som jobbat i många år på vad vi har upplevt och vad vi vet fungerar och vad vi vet inte fungerar. Redan där är ju kommunen inte alls så bra. Sen handlar det ju om rektorerna, att få dom att vara lyhörda för vad vi behöver. Att inte bara fastnar i ekonomi. […] Det är ju en ganska stor skola på så vis att vi är många elever på en liten yta. Och då måste vi framför allt se till att det rent schematiskt, schematekniska saker, fungerar.”

L5 påpekar hur mattelagsmöten ”ligger rent schemamässigt, liksom inklämd mellan ett möte och att vi ska starta lektionerna […] så alla sitter lite nu ska jag snart gå” som ett förslag hur ledning och organisation kan förbättras. Lärarna anser också att det är svårt att påverka skolans organisation som individ. L1 menar till exempel att ”visst kan man påverka [dessa förutsättningar] men oftast är det ju ekonomin som styr.” L2 saknar även ledningens stöd i vissa vardagsbeslut:

> ”Jag är ju en <domare i lagsport>, om jag skulle varje gång jag visar ut ett barn kalla ner föräldrarna ner till <spelplanen> och förklara varför jag visar ut deras barn, det är ju ingen som tänker så. Men i skolan är det tydligen så att jag, trots att jag egentligen har samma auktoritet, så måste jag motivera varför gjorde jag si, varför gjorde jag så. Jag tycker att du är lärare, du har rätt att ta dom här besluten och jag som förälder får bara köpa det.”

Lärarnas uppfattningar beskriver den synen på matematik som råder på skolan. L1 känner sig kluven om stödinsatser som blivit vanliga i syfte att få alla elever godkända på årskurs nio, även om det leder till att ”rädda dom med tillfälligt kunskap”. L4 menar även att eleverna kan tycka att ”matte är ett isolerat ämne som bara sker här i skolan” och syftar då på ett helhetsperspektiv för själva ämnet. L3 använder själv termen ”lära ut” oreflekterat. L2 gör en utförligare analys och föreslår att begreppsförståelse, i den betydelsen och omfattningen som L2 uppfattar att *denna studie* syftar till, skulle behövas mer av:

> ”Dessa variabler dyker upp men vi jobbar aldrig med förståelse på djupet. Och har du liksom inte förstått variabel så blir det ju alltid något, ’oj nu är det ett sånt där konstigt x här igen’. Det är väl nästan uteslutande, så kommer den ju i textuppgifter i problemlösningssituationer. Hitta x:et. […]. Man är så rädd för att ta det nästa steget. Man har bestämt att det här är för svårt och komplext och gör inte så. Jag är lite allergiskt, ja visst, jättebra att kunna multiplikationstabellen men varför har vi inte en

faktoriseringstabell? 7 gånger 8 i all ära men att det är 7 gånger 2 gånger 4 också. Särskilt när vi har närheten till. Multiplikationstabellen var ju det vi hade innan vi hade tillräckligt många miniräknare att dela ut. Du behöver ingen förståelse för att lära dig eller automatisera en gånger-tabell. Men att förstå… Tycker jag vi jobbar ingenting med. Och skulle behöva göras mycket tidigare.”

Kollegor

Temat kollegor beskriver vilka möjligheter och utmaningar i att skapa begreppsförståelse lärarna kopplar till samarbete med sina kollegor för att tillsammans möta elevernas förutsättningar att *konstruera* begreppsförståelse utifrån kommunikation. Temat har även nära kopplingar till hur lärarna tolkar termen *matematik med förståelse* då det påverkar hur lärarna prioriterar innehållet i sin undervisning.

Lärarna ser kollegorna som en viktig resurs i att utveckla i arbetet och skapa förutsättningar att undervisa matematik med förståelse. L1 menar att ”det finns ju förutsättningar för ämnesträffar, där man kan utveckla […], det som gynnar mitt arbete och som gör att jag kan utvecklas.” L3 tydliggör att lärarna har under åren skapat olika undervisningsmetoder att dela och jämföra med varandra, till exempel ”har jag ju ett eget kit med skruvar och klossar som jag använder när jag håller på med räta linjens ekvation, eller som jag gjort tidigare. Den har jag erbjudit men jag vet inte någon som har använt den.” L5 efterlyser ”djuplodande diskussioner i lärning, kring hur vi ser på matematiken överhuvudtaget.”

Genom att till exempel diskutera sätt att få elever att reflektera hoppas lärarna att eleverna ska kunna känna igen sig i deras förkunskaper (L1) eller att kunna sätta ord på vad de behöver utveckla för att förstå något i stället för att bara efterfråga färdiga svar till uppgifter (L2). L5 erbjuder till reflektion ”genom att jag lyfter fram [elevernas egna förklaringsmodeller] får det ju större spridning. Det är inte alla elever som själva kan bära fram en idé och stå på sig kring den.”

Elevernas varierande förkunskaper ser lärarna som mestadels en positiv utmaning. L1 menar att det kan vara nivån på förkunskaperna som varierar, särskilt när det kommer in elever från flera olika skolor. L4 lyfter vikten av att ta reda på elevernas förkunskaper ”för då försöker jag ju utgå från eleven […] för annars, om vi bara börjar på mitt sätt, då är det ju inte så himla intressant för dom tror jag.” L5 tillägger att det finns så klart bättre och sämre förklaringar men eleverna behöver en guide för att kunna läsa sin matematiska karta. L2 ger även en observation att eleverna sällan möter matematik som bryter invanda mönster eller erbjuder mer:

> ”Man kommer ju hela tiden tillbaka till att de är så ovana att behandla… I 80 procent av alla matteböcker och 100 procent av det man själv ser, så är det alltid 7+8=15. Det var aldrig att 15=7+8. Bryter man det mönstret och följer inte formen så då blir det ’nähä du’. Rika matematiska problem [...] ger flera angreppspunkter på det hela. Konstruera egna problem som hela tiden finns där.”

L4 gör indirekt en liknande observation i kontexten av att använda variabler till att lösa ekvationer, då om matematiska operationer som motsatser till varandra:

> ”Det är just att teckna en ekvation. Och sen hitta balansmetoden hur du ska lösa den helt enkelt. Dom kan oftast inte balansera o se. Redan där ser vi ju det här med om man har förståelse eller inte. Alltså att plus är minus motsats och tvärtom. Och gånger är motsatsen till division.”

Lärarna uppfattar att variabelbegreppet är lika viktigt som det är komplext och är därmed måna om att begreppet bör introduceras på rätt sätt till eleverna. L4 sammanfattar att ”det beror ju på hur man startar med algebra, du kan inte bara sätta i gång med och säga nu ska vi köra algebra, utan du måste föra in det på något sätt.” L1 förklarar att eleverna kan vara ”skeptiska till en början” och föreslår att läraren visar varför begreppet är användbart:

> ”Som allt från ekvationslösning till funktioner till att få in det här problemlösning. Ja men använd en variabel. Vad är det du söker hela tiden? Sätt det till ditt x.”

L5 tydliggör att eleverna behöver först förstå att det finns många steg på vägen i att till exempel beskriva ett mönster men att den vägen är värt att ta sig genom ändå. L2 ger ett förslag för att lära matematik på ett mer naturligt sätt genom undersökningar och laborationer så som på fysiklektionerna. L1 föreslår även att eleverna aktiveras genom att de skriver ner genomgången, för ”då är det som att mer fastnar än när dom bara sitter och lyssnar.”

Som ett exempel på möjligheter för kollegialt samarbete, råkar lärarna tillsammans komma fram till att eleverna skulle behöva lära sig ha <u>många koncept samtidigt</u> i huvudet fast de inte ens pratat med varandra under intervjuerna. Först hävdar L1 att eleverna behöver utvecklas i taluppfattning för att kunna förstå variabelbegreppet:

> ”Om eleverna har god taluppfattning, då kan dom nästan applicera vilka moment som helst. Men så fort taluppfattningen brister, vilket det gör på fler och fler elever, gör att stoppa i en variabel på något som är osäkert redan från start, gör ju att dom tappar det helt.”

L4 hävdar samma, fast utifrån utmaningen att förstå aritmetikens siffror och mönster. L1 ger efter lite påtryckning en förklaring att det är kombinationen av matematiska koncept så som negativa tal *i* variabler som eleverna kan ha svårt att hantera:

> ”När man liksom har fullt upp att sortera i matematiken. Grunder, om bara taluppfattningen. Negativa tal, positiva tal, och så börjar vi lägga i en variabel, och så plötsligt ska vi hålla på med negativa tal *i* variabel. Alltså, man behöver nog vara trygg i den delen, eller att en tiondel är samma sak som 0,1 eller tio procent. Så vad är tio procent av en variabel? Någon skriver 0,1x, någon skriver x/10. Det blir ju sådär, *pannkaka* (skratt).”

L4 påpekar att den ökande abstraktionen som variabel möjliggör är också en anledning till att det blir svårare för eleverna, samtidigt som det är en naturlig och oundviklig del av undervisningens progression. L5 tydliggör till slut att det är just *antalet* olika koncept på varandra som är utmaningen:

> ”När det handlar om mönster till exempel, så ska du ju vara helt klar på hur faktiskt mönstret är uppbyggt. Så det blir ju ett hinder. Sen ska dom omforma det då till något annat än vad det vi från början ser det som. Och så ska allt detta då utmynna i bara ett enda uttryck. Alla dom här tre bitarna gör ju att man kan fallera på alla olika variabler. Det kräver en massa saker samtidigt. Och allt det där ska falla på plats för att bli det.”

Lärarna ser dock sina kollegor som en <u>outnyttjad resurs</u>. L3 efterfrågar ”mera diskussioner i ämneslaget matematik” L4 lyfter vikten av att inte fastna i eventuella motsättningar:

> ”Sen är det kollegiet då. Att vi i varje ämneslag faktiskt har högt i tak, kan diskutera och komma vidare och så vidare. Sen har vi arbetslagen också, som också är viktiga att vi ger och tar, att vi inte bara tar, utan att vi hjälps åt. Så det här med samarbete, i kollegiet och med dom högre som står ovanför oss, det är jätteviktigt att det fungerar bra. Annars blir det isolerade öar som kanske inte är samarbetsvilliga.”

L5 betonar att kollegorna i skolans matematiklag är en viktig men outnyttjad resurs, som slarvas bort till att mestadels lösa praktiska saker.

Diskussion

Vad innebär matematik med förståelse och vilka uppfattningar om möjligheter och utmaningar för att skapa begreppsförståelse för variabel finns enligt lärarna? Vad innebär det för matematikundervisning? I denna del diskuteras sambanden mellan olika kunskapssyn och förståelse samt mellan lärarens och språkets roll i att skapa förståelse. Valda metodernas möjligheter att besvara forskningsfrågorna och syftet diskuteras. Resultatens implikationer för undervisningens och lärarutbildningens utformning och fortsatt forskning på området avslutar diskussionsdelen.

Resultatdiskussion

Nu när jag ser att lärarna ser matematik med förståelse som prestation, som abstraktion och som olika uttrycksformer som kan användas för att förstå begrepp, vad har det för implikationer? Eftersom lärarna anser att det finns möjligheter och utmaningar i skolans läroböcker, tid som finns för undervisning, skolmiljön och samarbetet med kollegorna, vad innebär det för förutsättningar att skapa förståelse?

Kunskapssyn och förståelse

Hur förhåller sig lärarnas uppfattning av matematik med förståelse och begreppsförståelse till traditionell och reforminriktad kunskapssyn på matematik och betyg? Teman prestation, lärobok, tid och skolmiljö beskriver dessa aspekter. Det är bara att konstatera att lärarnas uppfattningar går isär redan vid vad matematik med förståelse *är*. Lärarnas beskrivningar för förståelse diskuteras därmed för sig i syfte att synliggöra dessa individuella samband.

L1 förknippar förståelse till glädjen att klara av lärobokens uppgifter på egen hand, vilket låter som idealet i traditionell matematikundervisning och kan spara tid till att stödja elever som behöver det mest (Löwing, 2004, s. 82; Riesbeck, 2008, s. 9; Wiklund, 2017, s. 8–9; Granström i Berg, Sundh och Wede, 2020, s. 46). L1 beskriver dock bristen av förståelse som ett lapptäcke, vilket kan motsvara bristande begreppsförståelse i att se samband mellan begrepp (Skolverket, 2018, s. 1; Skolverket, 2022a, s. 55). L1 verkar dock inte koppla det till sin egen uppfattning att läroboken ger en snäv kunskapssyn och till sin kritik om stödinsatser som tillfälligt kunskap. L1 letar ”krokar att haka nya kunskaper på” hos eleverna och utgår från elevernas förkunskaper, som både Löwing (2004, s. 77) och Hattie et al. (2017, s. 65–67) föreslår. L1 förklarar även *varför* variabler är viktiga genom att förknippa begreppet till effektiv problemlösning i enlighet med Philipp (1992, s. 557–558), vilket tyder snarare på reforminriktad kunskapssyn och djupare begreppsförståelse.

L2 förknippar förståelse till att precisera sin begreppsförmåga och kommunikationsförmåga (Skolverket, 2022a, s. 54–55). L2 gör en viktig observation och menar även att förståelse är en förutsättning för att känna igen sig i och *sätta ord* på sina förkunskaper, motsvarande Riesbecks (2008, s. 39) observation om elevernas utmaningar med kommunikation. Med detta exempel knyter L2 begreppsbildning till den dubbelriktade kommunikationen som krävs för att komma åt elevens ZPD (Skott et al., 2010, s. 90–91 och s. 121; Säljö i Insulander och Selander, 2018, s. 121; Jakobsson, 2012, s. 159). Elevernas reflektionsförmåga kan även minska lärarnas arbetsbörda för uppföljning av förståelse. L2 menar att skolans läroböcker missgynnar förståelse och problematiserar därmed traditionella matematikundervisningens kunskapssyn. L2 önskar i stället mer fokus på matematik med förståelse (Skott, Jess, Hansén och Lundin, 2010, s. 56–58 och 174–175; Gärdenfors, 2010, s. 35–36; Riesbeck, 2008, s. 39–40). L2 vill inspirera så att eleverna inte bara efterfrågar färdiga svar och verkar då syfta till scaffolding (Säljö, 2015, s. 100–101).

L3 förknippar förståelse till att utveckla både begrepp- och kommunikationsförmågan som tyder på en reforminriktad kunskapssyn. L3 hänvisar dock konsekvent till metodförmåga, som är centralt i traditionell matematikundervisning. Motsatsen till förståelse, mekaniskt plockande, föreslår L3 till och med som metod att mota ”svår förståelse”, utan att inse att det troligtvis är tidsslöseri. L3 använder oreflekterat termen ”lära ut”, tvärtemot hur Sädbom (2022, s. 15–16) förtydligar lärarens uppgift. L3 betonar vikten av att leta sammanhang som eleverna kan relatera till, men erbjuder i nästa mening även whiteboards fyllda med andra kursers matematik utan kontext som ett sätt att få eleverna att lära mer. Dessa belägg ger en sammantagen bild av att denna studie och L3 använder olika *definitioner* av matematik med förståelse. L3 föreslår dock att variabelbegreppets aspekter och kopplingar som eleverna saknar behöver lyftas, motsvarande förståelsens aspekt *relationer* i Skott et al. (2010, s. 57–58). Är det möjligen lång karriär med traditionell undervisning som lyser genom?

L4 menar att förståelse är att ”se sambanden” och syftar till begreppsförmåga (Skolverket, 2022a, s. 55). L4 bekräftar även Andersson och Bolins (2008, s. 7) observation att övergången från aritmetik till algebra är utmanande för eleverna och tolkar att elevernas förkunskaper omfattar även hur de ser på ämnet i sig. L4 stödjer elevernas lärande genom att lyfta innehållet och menar att arbetslivet är en rik källa att hämta elevanpassade kontext ifrån, till exempel hur Pythagoras sats behövs för att bygga hus. L4 är även medveten om hur algebra och variabelbegreppets generalisering och andra aspekter kan orsaka huvudbry för eleverna, samtidigt som eleverna förstår deras användbarhet lättare i kontext som de kan relatera till. L4 nuddar därmed minst tre av kännetecken för matematik med förståelse; relationer, tillämpa och att få elever att reflektera (Skott et al. 2010, s. 57–58) och verkar därmed ha mestadels reforminriktad kunskapssyn.

L5 förknippar förståelse starkt till begreppsförståelsens samtliga delar, inklusive aspekter så som lämpliga användningsområden (Skolverket, 2022a, s. 55; Skolverket, 2018, s. 1). L5 observerar att metoder kan eleverna tekniskt sett kunna utan att förstå dem, vilket också tyder på den sociokulturella perspektivets syn på begreppsbildning och reforminriktad kunskapssyn (Säljö i Insulander och Selander, 2018, s. 121; Jakobsson, 2012, s. 159). L5 är medveten om att låga betyg betyder problematiska resultat, vilket stödjer forskningen om att bristande begreppsförståelse kan *orsaka* dåliga resultat (Olteanu, 2003, s. 35; Olivier, 1989, s. 6–7; Palm, 2008, s. 40; Blad Röing, 2021, s. 15–16). L5 anser att läraren agerar som *guide* för elevernas lärande på flera sätt och lyfter även elevernas förklaringsmodeller till hela gruppen, vilket motsvarar kommunikation som Riesbeck (2008, s. 9–10) efterfrågar samt stödjer studiens påstående att läraren behöver bistå till elevernas reflektioner över sitt kunnande. L5 är väl införstådd med variabelns möjligheter till generalisering och beskriver det som en ny dimension. L5 reflekterar över elevernas svårigheter med att hantera flera koncept i huvudet samtidigt och problematiserar därmed förutsättningarna att nå Britt-Mari Barths (Insulander och Selander, 2018, s. 140) önskan att eleverna skulle behöva tre olika aspekter i huvudet samtidigt för att bygga begreppsförståelse. Begreppsförståelse är alltså även en förutsättning för att skapa ny begreppsförståelse.

Lärarnas uppfattning om matematik med förståelse och dess relation till betyg är splittrad och även lärarna själva blandar traditionell och reforminriktad kunskapssyn inkonsekvent. Lärarnas mestadels negativa bild på lärobokens möjligheter att bidra till elevernas förståelse samt ledningens stöd i att möjliggöra skapandet av lärtillfällen i önskad utsträckning tyder dock på att lärarna är i alla fall medvetna om traditionella kunskapssynens utmaningar. Det kan förklara några av konsekvenserna så som behovet av stödinsatser på årskurs nio som L1 hänvisar till. Skolans ledning och organisation tampas dock inte bara med dom pedagogiska utan även ekonomiska och politiska realiteterna inom det didaktiska kontraktet på samhällets nivå (Wiklund, 2017, s. 20). Tidsbrist och bristande stödfunktioner kan vara symptom av faktorer som är bortom skolledningens kontroll så som problematik med psykisk ohälsa hos elever (Folkhälsomyndigheten, u.å, s. 1), som även lärarna ser och är oroliga för. Kullberg et al. (2017, s. 566) menar dock att elevernas resultat ger en otillräcklig bild på vad som skulle behövas i stället, så även ledningens resultatansvar i sig bidrar till dilemmat. Allt detta stödjer Wiklunds (2017, s. 14) sammanfattning om varför traditionell undervisning är så svår att ersätta, trots sina utmaningar.

Lärarens och språkets roll i att skapa förståelse

Hur uppfattar lärarna sambanden mellan sin och språkets roll i att skapa förståelse? Teman abstraktion, uttrycksformer, tid och kollegor beskriver dessa aspekter. Sambanden mellan hur lärarna ser på förståelse ovan visar att lärarna har goda förutsättningar att dela idéer och metoder med varandra, bara de får möjligheter till det. Reflektion över sitt språkbruk gentemot eleverna på en metaspråklig nivå för att komplettera varandra som kollegor är en central men ofta förbisett del av detta (jfr Riesbeck, 2008, s. 39; Löwing, 2004, s. 70; Toropova, Johansson och Myrberg, 2019, s. 275–276). Språkliga analysen av lärarnas exempel synliggör förutsättningar att tillsammans upptäcka missförstånd redan *innan* de sker hos eleverna (Nordgren, Odenstad och Samuelsson, 2017, s. 100–101; Rosenshine, 2012, s. 17; Palm, 2008, s. 39). Att endast L5 ens kommer på tanken att föreslå klassrumsdiskussioner som ett sätt att följa upp förståelse är därmed oroande ur studiens synvinkel i trippelbemärkelse då missförstånd tar tid och planering att både upptäcka och åtgärda och förvärrar därmed tidsbristen. Det blev även en överraskning när sista intervjufrågan, om att beskriva skillnaden mellan uttryckets delar, förblev obesvarad för så många. Tyckte lärarna att de redan besvarat frågan, räckte inte *common sense* till i en intervjusituation (Säljö, 2011, s. 79) eller är det en detalj som läraren bara aldrig reflekterat över och därmed saknar en tydlig bild av (Löwing, 2004, s. 77)? Lärarens metaspråkliga uppdrag underlättas av diagnostiska frågor (Lundahl, 2014, s. 110–115) som en form av scaffolding (Säljö, 2015, s. 100–101) då det underlättar kommunikationens båda riktningar när läraren kan bidra med information om hur eleven kan *besvara* en fråga på ett strukturerat sätt.

Lärares exempel tydliggör det naturliga språkets brist på precision när det används *oreflekterat*, så som utan förberedelsetid (jfr Löwing, 2004, s. 70). L1 försöker visualisera en okänd sträcka genom att rita den på tavlan, utan att inse att sträckan får då en fast längd som går att mäta (jfr Wagner, 1983, s. 475–476). L2 försöker ge ”konkreta exempel” på variabel utan att inse att det inte är möjligt med abstrakta begrepp (Vygotskij, 1986, s. 106–107, citerad i Skott et al., 2010, s. 91). L3 förklarar variabel genom hur den används och blandar då ihop begreppets tolkning som objekt och process och kan skapa en felaktig föreställning enligt Lundahls definition (Skolverket, 2018, s. 1; Lundahl, 2014, s. 113). L4 vänder om aspekten *det okända* och ger eleverna en färdig kontext och definition inom kontexten (elevens egen ålder som x) för att sedan skapa uttryck utifrån det för att beskriva andras ålder, vilket ju då beskriver en metod hur uttryck konstrueras snarare än begreppet i sig. L5 beskriver flera av begreppets aspekter, men fångar även en aspekt som hör till begreppet uttryck vilket går emot Jamisons (2000, s. 48) råd att förklaringen bör innehålla väsentliga aspekter och endast dem. Aspekter som dessa behöver inte vara svåra att åtgärda, men är desto svårare att upptäcka under en matematiklektion och kräver därmed grundlig kännedom av begreppets aspekter för att undvika eller förklara, på en konceptuell nivå som inte ens erfarna lärare kan ta för givet. I detta enkla tankeexperiment hade ju alla elever riskerat att missförstå *något* om variabel, och det är dessutom *vanligt* att det blir så, som även min egen förstudie tyder på (Persson och Wennström, 2000, s. 59; Philipp, 1992, 558).

Metoddiskussion

Studien är en fallstudie, vilket gör resultaten är inte generaliserbara i traditionell mening (Bryman, 2018, s. 101). Däremot är bilden av skolans verksamhet liknande i många svenska skolor och passar därmed i svensk kontext. Mitt eget intresse för språkets nyanser generellt och kontrasteringens möjligheter att skapa förståelse i synnerhet syns genom studiens fokus på språkbruk och sättet att använda variationsteorin, samtidigt som just språkets betydelse för begreppsförståelse har starkt stöd i forskning (Planas, 2021, s. 277; Riesbeck, 2008, s. 12; Säljö, 2011, s. 68; Toropova, Johansson och Myrberg, 2019, s. 275–276). Studiens validitet ökar av att lärarnas uppfattningar tolkas från flera olika perspektiv genom kontrastering samt språklig analys av deras exempel. Tematisk analys kan göras olika men jag anser att metodvalen har bidragit till en trovärdig och täckande bild av lärarnas uppfattningar.

Att få till intervjuerna blev den enskilt största utmaningen i att genomföra studien. Lärarna hade fullt upp med både nationella prov och betygsättning samt var sjuka i olika omgångar. Det visade sig även att flera av lärarna hade misstolkat studiens syfte utifrån informationsbrevet. Jag fick bland annat frågor om intervjuerna skulle motsvara en arbetsmiljöenkät eller om det var en förutsättning att lärarna undervisar i området algebra just när intervjuerna skulle hållas. En lärare avböjde tidigt från medverkan med en specifik hänvisning till att intervjufrågor förmodligen skulle vara för svåra att besvara, vilket fick mig att tvivla om jag hade förutsättningar att samla tillräckligt med data att analysera. Det blev tydligt att intervjua är krävande, precis som Bryman (2018, s. 567) hävdar. Av hans tips för intervjuns vanliga utmaningar (ibid., s. 568) blev alltså oväntat beteende den mest kännbara, då jag inte hade kunnat föreställa mig att lärare med minst tio års erfarenhet vardera skulle anse diskussioner om algebra och variabelbegreppet vara för *svåra*.

Implikationer för undervisning och lärande

På vilka sätt kan skolans verksamhet eller lärarutbildning behöva göras om för att kunna stödja lärarens arbete bättre? En del av utmaningen är att denna studie sammanlänkar matematik och språk, som traditionellt ses som fundamental annorlunda ämnen och hör till och med olika sidor av akademiska världens uppdelning till naturvetenskap och humaniora. Jag anser att denna uppdelning är inte bara olycklig, utan den gör att matematiklärare inte får ett lika naturligt förhållande till språkets möjligheter som till exempel språklärare gör. Till exempel, om betyg inte representerar förståelse som ett par av lärarna hävdar, varför krävs det då att eleverna ska bedömas i sin begreppsförmåga med huvudsakligen *skriftliga* prov (Nordgren, Odenstad och Samuelsson, 2017, s. 76–77)? Det innebär också att de fåtal poäng som eleven skrapar ihop på skriftliga provens ofta lättare metodfrågor innebär att eleverna troligtvis saknar de övriga förmågorna trots att betyget E redan bör omfatta dem alla (Skolverket, 2022a, s. 62). Studiens intervjufrågor, som var skapade med hjälp av variationsteorins principer för kontrastering på liknande sätt som diagnostiska frågor, visade sig vara till hjälp för lärarna att besvara dem. Det tolkar jag som en bekräftelse att Lundahl (2014, s. 110–115) är på rätt spår. Det ökar även validiteten av studiens grundläggande antaganden om språkets praktiska användbarhet som instrument i matematikundervisning (Bryman, 2018, s. 98; Planas, 2021, s. 277). Lärarnas spontana kommentarer att intervjuerna fick dem att reflektera över sin undervisning styrker denna tolkning ytterligare.

Fortsatt forskning

Studien bortser från faktorer som har med elevernas bristande intresse för matematik att göra. Däremot är det väl känt att intresse och förmåga hör ihop, och det vore därmed intressant att veta om diagnostiska frågor kan även möta bristande intresse. Eleven kan få bättre förutsättningar att se sina egna förkunskaper när de inte är döljs bakom klassiska ”har ni förstått”-frågan som lärarna oreflekterat kan använda, utan att inse att den vore extremt svår att besvara meningsfullt även för lärarna själva. Även lärobokens roll i undervisningen har forskats om hel del men det kan även vara värt att undersöka om idén att skapa variation genom *mängdträning* är det grundläggande problemet då det inte verkar bidra till elevernas begreppsförståelse utan skapar bara en hel del andra utmaningar.

Slutsatser

Skolans bristande resultat i att skapa matematiskt kompetenta medborgare kan tolkas på flera sätt. Min tolkning är att matematik *utan* förståelse är knappast värt att spendera skolans begränsade resurser på, även om det skulle då innebära att vissa elever lär väldigt lite matematik i grundskolan. Det är lätt att efterlysa individanpassad kommunikation som denna studie gör men praktiska, politiska och ekonomiska realiteter gör det i praktiken svårt. Därmed ser jag inga snabba lösningar för att förbättra elevernas resultat. Däremot kan jag bara hålla med L1 som menar att nuvarande taktik inte är optimal då vissa elever får ett lapptäcke av matematiska kunskaper som inte är praktiskt användbart i vardagslivet. *Borde* individanpassningen kanske snarare gå ut på att låta eleverna hinna skapa förståelsen som krävs för att ha nytta av fortsatta studier, även om det skulle då betyda att de endast hunnit fram till centrala innehållet för lägre årskurs vid slutet av deras nionde skolår? Språket som ett instrument att koppla matematiska begrepp till något som eleverna kan relatera till, inte bara i betydelsen förstå orden utan till vad som *menas* med dem, ser ut att ha möjligheter att underlätta lärarens arbete, och diagnostiska frågor kan vara en användbar metod att åstadkomma detta.

Referenser

Andersson, U., Bolin, A. (2008) *Att planera och undervisa i matematik med fokus på algebra.* Hämtad 2022-11-25 från: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1311187/FULLTEXT01.pdf

Berg, G., Sundh, F., Wede, C. (2020) *Lärare som ledare – i och utanför klassrummet*. Lund: Studentlitteratur.

Blad Röing, S. (2021) *Begreppsförståelse inom matematik*. Högskolan för lärande och kommunikation, Jönköping university. Hämtad 2022-11-07 från: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1574753/FULLTEXT01.pdf

Braun, V., Clarke, V. (2006) *Using thematic analysis in psychology*. Qualitative Research in Psychology 2006; 3: 77-101 https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2018) *Samhällsvetenskapliga metoder*. (3:e Uppl.). Stockholm: Liber.

Diaz, P. (2019) *Digitala verktyg för språkutvecklande undervisning*. Lund: Studentlitteratur.

Folkhälsomyndigheten (u.å) *Skolprestationer, skolstress och psykisk ohälsa bland tonåringar.* Hämtad 2022-12-25 från: https://www.folkhalsomyndigheten.se/contentassets/8169d0d0a5a846d29cf4b6a7cfd1dffb/skolprestationer-skolstress-psykisk-ohalsa-tonaringar-16003-webb.pdf

Gärdenfors, P. (2010) *Lusten att förstå – om lärande på människans villkor.* Stockholm: Natur & Kultur.

Hansén, S.E., Forsman, L. (red) (2017) *Allmändidaktik – vetenskap för lärare* (2 uppl.). Lund: Studentlitteratur.
Hattie, J., Fisher, D. och Frey, N. (2017) *Framgångsrik undervisning i matematik – en praktisk handbok.* Stockholm: Natur & Kultur.
Insulander, E., Selander, S. (red) (2018) *Att bli lärare*. Stockholm: Liber.
Jakobsson, A. (2012) *Sociokulturella perspektiv på lärande och utveckling: Lärande som begreppsmässig precisering och koordinering.* Pedagogisk Forskning, 17(2-4), 152-170. Faculty of Education and Society, Malmö University, & Natural Science, Mathematics and Society (NMS).
Jamison, R. E. (2000). *Learning the language of mathematics.* Language and Learning Across the Disciplines, 4(1), 45-54. https://doi.org/10.37514/LLD-J.2000.4.1.06
Kullberg, A., Runesson Kempe, U., Marton, F. (2017). *What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?* Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies, Göteborgs universitet, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Gothenburg University, Faculty of Education, & Institutionen för didaktik och pedagogisk profession. Zdm, 49(4), 559-569. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4
Lundahl, C. (2014) *Bedömning för lärande*. (2 uppl.) Lund: Studentlitteratur.
Löwing, M. (2004). *The concrete formation of mathematics teaching. A study of communication between teachers and pupils and the educational framework of mathematical classrooms* (Doctoral thesis, Göteborg studies in educational sciences, 208). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
Hämtad 2022-11-07 från:
https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/16143/3/gupea_2077_16143_3.pdf
Nordgren, K., Odenstad, C, Samuelsson, J (red.) (2017) *Betyg i teori och praktik*. Malmö: Gleerups
Olivier, A. (1989). *Handling pupil's misconceptions.* Department of Didactics, University of Stellenbosch. Hämtad 2022-11-19 från:
http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/Files/Misconceptions.pdf
Olteanu, C. (2003). *Algebra–viktigt men svårt*. Nämnaren, (3), 35-39. Hämtad 2022-11-17 från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3539_03_3.pdf
Palm, A. (2008). *Missuppfattningar i algebra: problem för läraren eller eleven?* Nämnaren Nr. 3, 38-42. Hämtad 2022-11-17 från:
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3842_08_3.pdf
Persson, P., Wennström, T. (2000). *Algebraisk förmåga och förståelse*. Nämnaren 27(2), 55-61. Hämtad 2022-11-23 från:
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5561_00_2.pdf
Philipp, R. A. (1992). *The Many Uses of Algebraic Variables*. The Mathematics Teacher, Vol.85, Nr.7, (557-561) Hämtad 2022-11-14 från:
https://doi.org/10.5951/MT.85.7.0557
Planas, N. (2021). *How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts?* Zdm, 53(2), 277-288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6
Riesbeck, E. (2008) *På tal om matematik: Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen*. Linköpings universitet, Institutionen för beteendevetenskap och lärande, Avdelningen för didaktik och forskning om pedagogiskt arbete (DIPA), & Utbildningsvetenskap.
Rodríguez-Vásquez, F.M., Ariza-Hernandez, F.J. (2021) *Bayesian Assessment of Undergraduate Students about the Real Function Mathematical Concept.*

EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, v17 n3 Article em1949 2021. 13 pp.
Rosenshine, B. (2012). *Principles of Instruction: Research-Based Strategies That All Teachers Should Know.* American Educator. Hämtad 2022-11-09 från: https://www.aft.org/sites/default/files/Rosenshine.pdf
Runesson, U. (2000). *Variation för lärande*. Nämnaren, 27 (2), 19-25. Hämtad 2022-11-17 från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1925_00_2.pdf
Ryve, A. (2006). *Vad är kunskap i matematik?* Nämnaren 2(2006). Hämtad från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/0709_06_2.pdf
Sagidhi, A. (2022) *Lärares uppfattningar om elevers förståelse för begreppet variabel*. Högskolan Dalarna, Institutionen för lärarutbildning. Hämtad 2022-11-14 från: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1641776/FULLTEXT01.pdf
Skolverket. (2016) *TIMSS 2015: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Hämtad 2022-11-17 från: https://www.iea.nl/sites/default/files/2019-04/TIMSS%202015%20-%20Sweden.pdf
Skolverket. (2018) Lärportalen: *Matematikdidaktik och specialpedagogik för grundskola åk 1–3, Del 2. Begrepp och representationer*. Hämtad från: https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Grundskola/419_matematikdidaktik_specialpedagogik%20%C3%A5k1-3/del_02/2.%20Begrepp%20och%20representationer.pdf
Skolverket. (2022a) *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm. Hämtad från: https://www.skolverket.se/getFile?file=9718
Skolverket. (2022b) *Andel som uppnått kunskapskraven per ämne årskurs 9, senaste tio åren.* Hämtad 2022-11-14 från: https://siris.skolverket.se/siris/f?p=SIRIS:34:0::NO:::&ar=2022&amne=Matematik&bet=EUM&kon=S&diag=com&lan=0&kommun=0&skola=0&jmf=i&jlan=&jkommun=&jkgrupp=C8
Skolverket (u.å.) *Betyg och betygskriterier: F-varning eller betygsvarning*. Hämtad 2022-11-15 från: https://www.skolverket.se/for-dig-som-.../elev-eller-foralder/betyg-och-nationella-prov/betyg-och-betygskriterier#h-Fvarningellerbetygsvarning
Skott, J. Jess, K., Hansén, H.C., Lundin, S. (2010) *Matematik för lärare*. Delta Didaktik. Malmö: Gleerups.
Sädbom, R. F. (2022). *Det är inte enbart att gå in i ett klassrum och lära ut något! Ämneslärarstudenters beskrivningar om utvecklandet av samhällskunskapsdidaktiskt kunnande på variationsteoretisk grund*. Högre Utbildning, 12(2), 15–29. https://doi.org/10.23865/hu.v12.3519
Säljö, R. (2011). *Kontext och mänskliga samspel - ett sociokulturellt perspektiv på lärande.* Utbildning Och Demokrati, 20(3), 67–82. https://doi.org/10.48059/uod.v20i3.958
Säljö, R. (2015) *Lärande – en introduktion till perspektiv och metaforer.* Malmö: Gleerups.
Toropova, A., Johansson, S., Myrberg, E. (2019). *The role of teacher characteristics for student achievement in mathematics and student perceptions of instructional quality.* Education Inquiry, 10(4), 275-299. Göteborgs universitet, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Gothenburg University, Faculty of Education, Department of Education and Special Education, & Institutionen för pedagogik och specialpedagogik. https://doi.org/10.1080/20004508.2019.1591844

Usiskin, Z. (1999). *Conceptions of school algebra and uses of variables*. I Barbara Moses (red.), Algebraic thinking, Grades K-12, (7-13). Hämtad 2022-11-15 från: https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/nwo/documents/camp/Aug11-2016/conceptionofschoolalgebra_Usiskin.pdf

Venkat, H., Askew, M. (2018). *Mediating primary mathematics: Theory, concepts, and a framework for studying practice*. Educational Studies in Mathematics, 97(1), 71-92. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9776-1

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Hämtad från: https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063

Vygotskij, L.S. (1986) *Thought and language.* Cambridge, Massachusetts & London, UK: MIT Press

Watson, A., Mason, J. (2006). *Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making*. Mathematical Thinking and Learning, 8(2), 91-111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1

Wagner, S. (1983) *What Are These Things Called Variables?* The Mathematics Teacher, Vol.76, Nr.7, 474-479. Hämtad 2022-11-14 från: https://www.jstor.org/stable/27963648

Wiklund, A. (2017). *Matematikundervisning utifrån ett lärarperspektiv: En undersökning av lärares uppfattningar om god undervisning i matematik.* Högskolan Dalarna, Pedagogiskt arbete.

Bilaga 1 – Diagnostiska frågor i förstudie

Svara följande frågor enligt hur du förstår begreppet *räta linjens ekvation*. Markera det alternativet som du anser vara bästa svaret genom att kryssa eller ringa in bokstaven a, b, c eller d framför respektive svarsalternativ.

1) Vad **betyder** räta linjens ekvation?
   a. Att linjen är rak och att det finns många punkter på linjen. *(Missförstånd, missvisande)*
   b. Med ekvationen kan jag kontrollera om punkterna är på linjen och beräkna linjens lutning. *(Lärarens definition)*
   c. Ekvationen beskriver en mängd punkter som ligger på en linje. *(Bokens definition)*
   d. Det kan vara till exempel y=2x+1 eller y=-2x+3. *(Missförstånd, ej definition)*

2) Vilka **andra begrepp** ingår i begreppet räta linjens ekvation?
   a. Formel, koordinater och ekvation *(Missförstånd, fel sammanhang)*
   b. Variabel, konstantterm och riktningskoefficient *(Matematiskt korrekt)*
   c. Riktningskoefficient, ökning och skärningspunkt *(Lärarens exempel)*
   d. Riktningskoefficient, linje och ekvation *(Korrekt men inte typiska exempel)*

3) Vad kan jag **göra med** räta linjens ekvation?
   a. Lösa ekvationen eller kontrollera om vänsterled är lika med högerled *(Missförstånd, fel sammanhang)*
   b. Beräkna värdet på x om jag vet värdet på y eller avgöra om linjen pekar uppåt eller nedåt *(Korrekt men inte typiska exempel)*

   c. Kontrollera om en punkt ligger på linjen eller beräkna linjens lutning *(Bokens exempel)*
   d. Kontrollera om linjen går genom origo eller rita linjen. *(Lärarens exempel)*

4) **Vilka typer av uppgifter** löser du lämpligast med hjälp av räta linjens ekvation?
   a. Kostnaden på varor och tjänster eller använda recept i matlagning *(Lärarens exempel)*
   b. Arean på en triangel eller volymen i en kub *(Missförstånd, ej linjära)*
   c. Hur långt du kan kasta en boll eller hur länge en bilfärd tar *(Delvis korrekt, ej linjär)*
   d. Beräkna värdet för en funktion eller skärningspunkten mellan två linjer *(Matematikens exempel)*

5) Vilka av följande **är exempel på** räta linjens ekvationer?
   a. x=ky-m, x=6+3y och y=0 *(Korrekt men inte typiska exempel)*
   b. y=kx+m, y=2x+1 och y-3x-6=0 *(Matematiskt korrekt)*
   c. k=yx+m, y=yx+6 och x-y+xy=0 *(Missförstånd, fel tolkning av k-värde)*
   d. $y=kx^2+m$, y=2x+z och y=6/x *(Missförstånd, ej linjära)*

Bilaga 2 – Intervjuguide och intervjufrågor

Inledande frågor

- Hur länge har du arbetat som matematiklärare?
- Hur ser du på ditt arbete?
  - Vad trivs du med?
  - Vad tycker du är utmanande?

Förutsättningar att undervisa matematik med förståelse

- Vad tänker du på när du hör att någon *förstår* matematik?
  - Vad är förståelse för matematik för dig?
  - Hur uppfattar du matematiska kunskaper *utan* förståelse?
    - **Vid behov precisera:** Hur skulle det kunna visa sig?
  - Anser du att betyg representerar förståelse?
    - **Om inte:** Vad tycker du är skillnaden? Vad är det som inte är med?
- Hur uppfattar du lärarens roll i att skapa förståelse?
  - Vad är läraren där *för,* utöver att bara ge eleverna en mattebok?
  - Vilka yrkesroller tycker du *liknar* lärarens i att skapa förståelse för andra?
    - **Om inte framkommer:** På vilket sätt liknar det?
- Anser du att skolans verksamhet här stödjer dig med att skapa förståelse?
  - Vad anser du bidrar till dina förutsättningar?
    - **Vid behov ge exempel:** Kollegor, läromedel, utbildning…
  - Vilka hinder ser du i skolans verksamhet för att skapa förståelse?
    - **Vid behov ge exempel:** Läromedel, ledning, politik, utbildning…
  - Upplever du att du kan påverka dessa hinder?
- Vad använder ni för matematikbok?
  - Vad tycker du om den?
  - Anser du att den beskriver algebra bra?
  - Ser du några utmaningar i hur boken beskriver algebra?
- Finns det andra hinder till dina förutsättningar att skapa förståelse?

Möjligheter och utmaningar att skapa förståelse för variabel

- Vad tänker du på när du hör begreppet variabel?
  - Känner du dig trygg med variabel?
  - Beskriv hur du uppfattar variabel.
  - I vilka sammanhang skulle du säga variabel *används* i högstadiealgebra?
  - På vilka sätt anser du att variabel är *viktig* för att förstå algebra?
- Hur uppfattar du *elevernas* förutsättningar att förstå begreppet variabel?
  - Vad har eleverna lätt för med variabel?
  - Vad har eleverna svårt för med variabel?
  - Varför tycker du det är så?
- *Scenario: Du vill försäkra dig om eleverna har förstått begreppet variabel inför nästa lektion, där du planerar en extra genomgång om det.*
  - Hur *vet* du om eleverna förstått?
  - Hur *gör* du för att ta reda på om eleverna förstått?
- Hur uppfattar du språkets roll i att *kommunicera* innebörden av variabel?
  - Hur skulle du förklara begreppet för mig, om jag vore din elev?
    - **Vid behov ge exempel:** Liknelser, relationer, egenskaper osv.
  - Anser du att läroboken förklarar variabel väl?
  - Vilka utmaningar ser du i att kommunicera begreppet?
- *Scenario: Du vill förklara för dina elever vad variabel x står för i uttrycket 2x+3. Bestäm det matematiska sammanhanget själv och utgå från det.*
  - Vilka exempel skulle du använda för att förklara vad *x* står för?
  - (utifrån exemplet) Hur skiljer det sig från vad *+3* står för?

Bilaga 3 – Informationsbrev

Information om undersökning om att undervisa om variabel

Du som matematiklärare på <Studiens skola> har nu möjligheten att delta i en undersökning om ramarna som finns till ditt arbete att undervisa begreppet variabel i algebra. **Du tillfrågas härmed om deltagande i denna undersökning.**

Syfte

Undersökningens syfte är att beskriva och öka kunskapen om lärarnas förutsättningar för att undervisa begreppet variabel i algebra, sett från lärarnas perspektiv. Begreppsförståelse är en av förmågorna som eleverna bedöms i matematikämnet. Algebras begrepp lägger grunden till att förstå matematik som bygger vidare på dem. Läraren har därmed en viktig roll i elevernas lärande och fortsatta studier. Lärarnas arbete ramas dock in av ibland motstridiga förväntningar och förutsättningar som kan underlätta eller försvåra uppdraget. Variabel är dessutom ett utmanande begrepp för eleverna att förstå. Undersökningen belyser och försöker hitta lösningar till dessa utmaningar.

Information om undersökningen

I undersökningen svarar du frågor om din uppfattning om hur skolans verksamhet bidrar till ditt arbete att skapa förståelse. <Studiens skola> agerar som ett exempel för hur verksamheten kan se ut. Du svarar även frågor om din uppfattning om vilka möjligheter och utmaningar finns i att undervisa begreppet variabel.

- Frågorna svaras i en intervju som spelas in.
- Intervjun beräknas ta ca 20–30 minuter.

- Ditt deltagande i undersökningen är helt frivilligt. Du kan när som helst avbryta ditt deltagande utan närmare motivering.
- Alla svaren hanteras anonymt och skolan kommer att avidentifieras.
- Inspelningarna hanteras konfidentiellt av mig och min handledare.
- Undersökningen kommer att presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna.

Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga.

Jukka Mikkonen (student vid Högskolan Dalarna) h19jukmi@du.se
Abdel Seidouvy (handledare vid Stockholm University) Abdel.Seidouvy@su.se

Insjön 2022-11-29

Jukka Mikkonen