



HÖGSKOLAN  
DALARNA

## **Examensarbete (del 2) för grundlärarexamen inriktning 4–6 Avancerad nivå**

### **Att förstå bråk**

---

### **En kvalitativ studie om bråkundervisning och elevers förståelse av bråk**

Författare: Oscar Alfredsson  
Handledare: Helena Eriksson  
Examinator: Anna Teledahl  
Ämne: Pedagogiskt arbete, inriktning matematik  
Kurskod: APG247  
Poäng: 15 hp  
Examinationsdatum: 2023-06-04

Vid Högskolan Dalarna finns möjlighet att publicera examensarbetet i fulltext i DiVA. Publiceringen sker open access, vilket innebär att arbetet blir fritt tillgängligt att läsa och ladda ned på nätet. Därmed ökar spridningen och synligheten av examensarbetet.

Open access är på väg att bli norm för att sprida vetenskaplig information på nätet. Högskolan Dalarna rekommenderar såväl forskare som studenter att publicera sina arbeten open access.

Jag/vi medger publicering i fulltext (fritt tillgänglig på nätet, open access):

Ja

Nej



HÖGSKOLAN  
DALARNA

## Abstract

Bråk är något som många elever upplever är svårt. Samtidigt har bråk en central roll i taluppfattningen och är nödvändigt för att förstå andra områden i matematiken. Syftet med den här studien är att få en förståelse för hur lärare som arbetar i årskurs 4–6 beskriver elevers svårigheter och missuppfattningar kring bråkbegreppet. Det är även att förstå hur de beskriver sin undervisning gällande innehåll och didaktiska strategier för att öka elevers förståelse för bråkbegreppet. Studien är kvalitativ och bygger på semistrukturerade intervjuer med lärare som undervisar årskurs 6. Som underlag till intervjuerna har även ett elevtest tagits fram som bygger på de fem subgrupperna av bråk: *del-helhet*, *förhållande*, *operator*, *resultat av division* och *mätning*. Det insamlade materialet sammanställdes sedan i kategorier som dels handlade om elevers förståelse, dels om lärarnas undervisning. Därefter analyserades det som lärarna beskrev och kopplades samman med tidigare forskning på området. Det framkom i samtalen med lärarna att de känner väl till sina elevers styrkor och svagheter. Det framkom även att undervisningen som eleverna möter, har ett fokus på procedurer. En slutsats är att det vore gynnsamt att frånga läromedel för att elever ska få en mer begreppslig förståelse för bråkbegreppet.

## Nyckelord

Bråk, bråkbegreppet, subgrupper, undervisning, matematikdidaktik

## Innehållsförteckning

Inledning.....	1
Syfte och frågeställningar.....	2
Bakgrund.....	2
Koppling till skolans styrdokument.....	2
Centrala begrepp.....	3
Taluppfattning.....	3
Bråkbegreppet.....	4
Litteratursökning.....	5
Forskningsbakgrund.....	6
Taluppfattning och bråk.....	6
Undervisning om bråk. Procedur- och begreppsförmåga.....	6
Undervisning om bråk, del - helhetsperspektiv.....	7
Lärares kunskaper om bråk.....	7
Elevs svårigheter kring bråk.....	8
Sammanfattning.....	8
Teoretiskt perspektiv.....	9
Fem subgrupper av bråk.....	9
Metod.....	10
Val av metod.....	10
Testet.....	10
Intervjuer.....	15
Urval.....	15
Genomförande.....	16
Bearbetning av data och analysmetod.....	17
Validitet och reliabilitet.....	17
Etiska överväganden.....	18
Resultat och analys.....	19
Resultat.....	19
Lärare beskriver elevs förståelse av bråkbegreppet.....	19
Lärare beskriver bråkundervisning.....	21
Analys.....	24
Lärare beskriver elevs förståelse för bråkbegreppet.....	24

Lärare beskriver bråkundervisning.....	25
Diskussion .....	27
Metoddiskussion.....	27
Resultatdiskussion.....	30
Vidare forskning.....	32
Referenslista .....	32
Bilaga A.....	35
Bilaga B.....	39
Bilaga C.....	40
Bilaga D.....	42

## Inledning

Den här studien ämnar undersöka bråkundervisningen i matematik i årskurserna 4–6. Utifrån den egna undervisningen i matematik och samtal med kollegor upplever jag att bråk i matematiken är något som elever upplever svårigheter kring. Det är även ett återkommande tema under ämnesdagar med matematikdidaktiska diskussioner. I kursplanen för matematik står i det inledande syftet att ”genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet” (Skolverket, 2022a). Ett av dessa grundläggande begrepp är bråk. Det har en central roll då förståelsen av bråk är nödvändig för att förstå även andra delar av matematiken som division, decimaltal och procent. Det är även nödvändigt för att kunna hantera algebra (Löwing, 2016, s. 82).

Löwing (2016) har i sin avhandling gjort en analys av resultatet från det nationella bedömningsinstrumentet Diamant. Hon beskriver att bland de elever som läser matematik 1a på gymnasiet så var det så många som 77% som hade för låga kunskaper kring bråk. Hon menar vidare att det troligen beror på bristande förkunskaper längre tillbaka i deras skolgång (Löwing, 2016, s. 201). Även i internationella kartläggningar som Timss (2020) så är svenska elevers förståelse för bråk mindre bra (Timss 2020). Detta har varit fallet under en längre tid. I mätningar som Timss, Pisa och även nationella prov i matematik så är resultaten summativa och säger inget om orsakssammanhangen kring de låga resultaten (Kilborn, 2014, s. 6). Kilborn (2014) menar dock att det skett en nedtoning av undervisningen kring bråk, då den traditionellt varit mycket formell och styrd av matematiska regler. Denna nedtoning har skett framför allt i yngre åldrar (Kilborn, 2014, s. 3). I en av modulerna för matematiklyftet för årskurs 1–3 beskrivs att bråkundervisning traditionellt har handlat för lite om att utveckla bråkbegreppet för att snabbare börja räkna med bråk. Eleverna räknar då utan att egentligen ha en förståelse för vad de gör (Skolverket, 2021, s. 2). Nationella och internationella mätningar pekar på samma sak.

Bråk har en central roll i taluppfattningen och en förståelse är nödvändig för att kunna förstå andra delar av matematiken (Kilborn, 2014, s. 4–5). Därför kan en djupare förståelse för bråk även ge positiva effekter på elevers kunskaper inom andra områden, som taluppfattning, djupare förståelse av rationella tal och grundläggande strukturer i matematiken. Det är även en viktig del i att utveckla ett algebraiskt tankesätt. Sveider (2021, s. 27) beskriver att mycket av den tidigare forskningen om bråk har fokuserat på elevers lösningsstrategier, medan få studier fokuserat på lärares undervisningsstrategier.

Problemet är alltså att svenska elever har för låga kunskaper om bråk och en otillräcklig förståelse av bråkbegreppet, detta även ur ett internationellt perspektiv. Undervisning om bråk beskrivs som komplex samtidigt som den utgör en viktig del av taluppfattningen och är nödvändig för elevers vidare matematiska utveckling. Den behöver utvecklas för att ge elever en djupare förståelse av bråkbegreppet. Precis som Sveider (2021) beskriver så har fokus hos forskningen legat på elevers lösningsstrategier och inte lika mycket på undervisningsstrategier hos lärare. Därför vill jag i den här studien undersöka hur lärare i årskurserna 4–6 utformar sin

undervisning om bråk. Detta inbegriper vilka svårigheter de ser hos eleverna och vilka didaktiska strategier de har för att öka förståelsen.

## **Syfte och frågeställningar**

Syftet med studien är att bidra med en större förståelse för hur lärare i årskurs 4–6 resonerar kring bråkbegreppet och vilka svårigheter och missuppfattningar som de menar är vanliga bland elever. Syftet är också att se vilka didaktiska strategier och metoder som dessa lärare använder i sin undervisning.

1. Hur uppfattar lärare elevers förståelse av bråkbegreppet?
2. Hur utformar lärare i årskurs 4–6 sin undervisning för att främja elevers förståelse för bråk?

## **Bakgrund**

I det här avsnittet presenteras kopplingar till de delar av läroplanen som berör bråkbegreppet i läroplanen, framför allt gällande årskurserna 4–6. Under rubriken Centrala begrepp kommer taluppfattning och bråkbegreppet beskrivas och förklaras. Under tidigare forskning hänvisas till studier som berör undervisning om bråk och elevers svårigheter kring det.

### **Koppling till skolans styrdokument**

I den inledande syftestexten för kursplanen står det att elever ska ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp. (Skolverket, 2022a, s. 54). Begreppsförmågan är central för elevernas förståelse och deras fortsatta matematiska utveckling. Begreppsförståelsen är även nödvändig för att eleverna ska kunna utveckla sin förmåga att kommunicera om matematik (Skolverket, 2022b, s. 6). Ett av dessa begrepp är bråkbegreppet.

I syftet står det även att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med metoder och deras användbarhet. Ytterligare står det att elever ska ges möjlighet att utveckla sin förmåga att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter (Skolverket, 2022a, s. 54). Med ökad säkerhet i att använda metoder får eleverna förutsättningar att använda matematik i fler och mer komplexa sammanhang. Eleverna behöver få tillfällen till att öva grundläggande metoder i fler sammanhang, för att på så vis kunna identifiera vilken metod som lämpar sig bäst i ett sammanhang och sedan använda den (Skolverket, 2022b, s. 6).

I det centrala innehållet för årskurserna 4–6 finns bråk med i flera punkter och under avsnittet om *taluppfattning och tals användning* står följande punkter:

- Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform.
- Hur tal i bråk- och decimalform kan användas i vardagliga situationer.
- Metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning och skriftlig beräkning. (Skolverket 2022a, s. 56–57).

I avsnittet om *samband och förändring* står följande punkt:

- Proportionalitet samt hur proportionella samband uttrycks i bråk-, decimal- och procentform. (Skolverket, 2022a, s. 58).

I kommentarmaterialet till läroplanen beskrivs att undervisningen ska behandla egenskaper hos rationella tal i bråkform, så som täljarens och nämnarens innebörd. Eleverna ska även möta tal och beräkningar i utvidgade talområden med nya talmängder och få erfara samband mellan andel, del och helhet (Skolverket, 2022b, s. 11–13).

## Centrala begrepp

### *Taluppfattning*

En förutsättning för all kunskap i matematik är en god uppfattning av talen, deras storlek och inbördes relationer (Unenge, 1994, s. 112). Taluppfattning är en persons förståelse för tal och operationer tillsammans med färdigheter, förmåga och lust att använda den förståelsen för att ta beslut och för att utveckla strategier för att använda dessa tal och operationer. Vid god taluppfattning finns ofta en uppfattning av att tal är meningsfulla helheter, där hanterandet av tal och resultat i sin tur har en mening och betydelse. Personer med god taluppfattning använder sig av egna kontroller för att kontrollera ett resultats rimlighet (Reys et al., 1995, s. 23). Författarna beskriver sex olika aspekter av taluppfattning. Dessa är:

- Förståelse av tals betydelse och storlek
- Förståelse och användning av ekvivalenta uttryck och representationer av tal
- Förståelse av operationers innebörd och funktion
- Förståelse och användning av ekvivalenta uttryck
- Strategier för beräkning och antalsbestämning
- Referenspunkter vid mätning (Reys et al., 1995, s. 24–25).

Löwing (2016) beskriver vad som är centralt för matematisk kunskap. Hon listar även färdigheter vilka i stort överensstämmer med det som Reys et al. (1995) beskriver. Hon understryker även vikten av god förståelse av tal i bråkform, då det är nödvändigt för att på djupet förstå proportionalitet, förhållande och procent (Löwing, 2016, s. 22–23). Jag kommer att ta hänsyn till de olika aspekterna som beskrivs av taluppfattning, då dessa är centrala gällande elevers förståelse för bråkbegreppet.

## Bråkbegreppet

Ordet bråk kommer från tyskans *brok* som betyder brott eller brytning. Det i sin tur kommer från latinets *fractio*, där även engelskans *fraction* har sitt ursprung (Billstein, 2015, s. 258). Bråk är ett rationellt tal som uttrycks på formen  $\frac{a}{b}$ , där  $a$  benämns täljare och  $b$  nämnare. Strecket kallas för bråkstreck. Nämnaren får aldrig vara 0 och i beräkningar med heltal kan alla additioner, subtraktioner och multiplikationer genomföras. Divisioner kan utföras i den mån täljaren är delbar med nämnaren (Nationalencyklopedin, 2022).

I läroplanen används ordet bråkform, vilket sätts i relation till procent- eller decimalform. McIntosh (2010) menar att ordet bråk används på olika sätt i olika läromedel. I vissa fall så är det ett slags tal som avses och ibland är det ett sätt att beteckna ett tal. För att förtydliga beskrivs att exempelvis  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{3}{6}$  är två olika bråk, samtidigt som de betecknar samma tal. För tydlighetens skull används i stället ofta bråkform och bråkuttryck, där  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{3}{6}$  är rationella tal i bråkform med samma värde, men samtidigt representerar de två olika bråkuttryck. (McIntosh, 2010, s. 27). Jag kommer att utgå från denna distinktion.

Bråk som har täljaren 1 kallas för stambråk, vilka kan vara exempelvis  $\frac{1}{2}$  eller  $\frac{1}{4}$  (Anderberg, 1992, s. 49). McIntosh (2010) beskriver fyra grundläggande aspekter av bråk som elever behöver förstå. Den första är att alla delar måste vara lika stora för att de ska vara bråkdelar. Den andra och tredje aspekten är att nämnaren visar hur många delar en hel har delats i och täljaren visar hur många av dessa delar vi har. Den fjärde aspekten är att ju större nämnaren är i relation till täljaren, desto mindre del av helheten representerar bråket (McIntosh, 2010, s. 29).

Bråkbegreppets uppdelning beskrivs med vissa variationer av olika forskare. En modell är den där det finns fem subgrupper av hur tal i bråkform kan uppfattas. Dessa är del-helhet, förhållande, operator, resultat av en division och mätning (Sveider, 2021, s. 27; Reeder & Utley, 2017, s. 308). Nedan följer definitioner av de fem subgrupperna beskrivna av (Sveider, 2021, s. 19–27; Reeder & Utley, 2017, s. 308) med egna exempel:

### *Del - helhet*

Bråk som del av helhet innefattar dels att kunna dela upp en *kontinuerlig* mängd, så som längd-, area- och volymmodeller som i exemplet att markera  $\frac{1}{3}$  av en pizza. Det innefattar även att kunna dela upp en *diskret* mängd, vilket också kan beskrivas som del av antal. Ett exempel på detta kan vara att bestämma hur mycket  $\frac{1}{4}$  av 12 bollar är.

### *Förhållande*

Bråk som anger förhållande är en jämförelse mellan två olika mängder. Ett exempel kan vara; ett glas saft som ska blandas med proportionerna 1:4, där varje del utgör  $\frac{1}{5}$ .

### *Operator*



Bråk som operator kan användas för att beteckna en räkneoperation med någon av de fyra räknesätten, som exempelvis  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ .

### *Resultat av division*

Bråk som anger resultatet (kvoten) av en division. Bråkuttrycket  $\frac{1}{4}$  kan då tolkas som divisionen av 1 med 4, alltså resultatet av 1 dividerat med 4.

### *Mätning*

Ett bråkuttryck kan förstås som ett tal som går att placera på tallinjen på en given punkt från 0. När bråket placeras på tallinjen associeras det till hur stort det är. Ett exempel är att  $\frac{1}{4}$  kan ses som 0,25. Bråk som mätning kan också ses som mätning av ett intervall. Då kan exempelvis  $\frac{3}{4}$  representera mätningen av intervallet mellan  $\frac{1}{4}$  och 1.

Jag utgår från dessa fem definitioner av bråkbegreppet, men använder även ordet bråk för att beskriva alla de olika delarna som ryms i begreppet gällande undervisningen. Jag kommer att skilja på del av helhet och del- helhet, där den sistnämnda är den definition Sveider (2021, s. 19–27); Reeder och Utley (2017, s. 308) beskriver. Till skillnad från del av helhet, inbegriper den även del av antal.

## **Litteratursökning**

Då grundidén var att min studie skulle behandla bråkundervisning i skolan och elevers svårigheter så började jag min sökning där. Jag började med att söka med hjälp av svenska ord som bråk, bråkundervisning, matematikdidaktik, taluppfattning, del av helhet. Sökorden användes i olika kombinationer. Dessa sökningar gav vissa resultat vilka var användbara, men jag sökte sedan även på engelska motsvarigheter som fractions, teaching, didactics, part whole, elementary och number sense. Dessa sökningar gav fler användbara träffar.

De databaser jag använt i störst utsträckning för att söka efter tidigare forskning är Summon, DiVa och ERIC. Utöver dessa så har jag även använt Google Scholar. Det finns mycket forskning som handlar om bråkundervisning. Det har gjort att jag blivit tvungen att välja bort en stor del av de träffar jag fått som inte berör det som jag vill undersöka, vilket är bråkundervisning på mellanstadiet och svårigheter som elever i det åldersspannet besitter. Databaserna jag använt mig av har varit enkla att hitta i, både med olika sökord och med manuella sökningar på hela titlar.

Förutom sökning i databaserna på specifika sökord har jag även hittat en del forskning och litteratur i referenslistor i artiklar, avhandlingar och böcker som jag anser vara intressant för min studie.

## Forskningsbakgrund

Nedan presenteras tidigare forskning som är relevant för studiens syfte och frågeställningar. Forskningen berör undervisning av bråkbegreppet och kända svårigheter kring förståelsen hos elever. Den berör även vikten av lärarnas förståelse av begreppet. Forskningen är delat i fem avsnitt, där det första handlar om taluppfattning och bråk. Det andra berör undervisning om bråk utifrån begrepps- och procedurförmåga. Det tredje avsnittet berör vilka delar av bråkbegreppet man i huvudsak fokuserar på i undervisningen. Det fjärde avsnittet handlar om lärares egen förståelse för bråk. Det femte och sista avsnittet berör elevers svårigheter och vanliga missuppfattningar gällande bråk.

### *Taluppfattning och bråk*

Teoh et al. (2020) menar att generell taluppfattning och förståelse för bråk utgör integrerade delar av varandra. För att utveckla en förståelse för bråkbegreppet är taluppfattningen nödvändig och förståelsen för bråk utgör i sig en del av taluppfattningen. Precis som många andra internationella forskare så använder de termen *fraction sense* för att beskriva kunskaper om bråk. En kunskap som då utgörs av både begreppslig förståelse för bråk och av taluppfattningen. (Teoh et al., 2020, s. 28). Wilkins et al. (2021) undersökte i sin studie bland annat hur taluppfattningen i tidig ålder påverkade den senare förståelsen för bråk som tal. Elever i årskurs två kartlades huruvida de hade en prenumerisk, grundläggande inre tallinje eller en vidare taluppfattning. När eleverna sedan kartlades i årskurs fyra, kunde forskarna se att skillnaden mellan grupperna var signifikant. I den första prenumeriska gruppen visade då 5,12 % en förståelse för bråk som tal. I den andra gruppen var siffran 21,08 %. I den tredje gruppen med en vidare taluppfattning var siffran 33,4 %. De menar att även om förståelsen för naturliga tal kan bidra till missuppfattningar gällande rationella tal så är en tidig taluppfattning viktig för att senare förstå bråk som tal (Wilkins et al., 2021, s. 515–532).

### *Undervisning om bråk. Procedur- och begreppsförmåga*

Liu et al. (2012) menar att undervisning om bråk ska baseras på elevernas begreppsliga förståelse och inte byggas på i huvudsak procedurer. Detta för att den begreppsliga förståelsen är nödvändig för att procedurerna ska få en mening. Gabriel et al. (2012, s. 144–145) genomförde en studie där en kontrollgrupp fick traditionell undervisning om bråk som fokuserade på procedurförmåga. Den andra experimentella gruppen fick spela fem olika kortspel som fokuserade på begreppsförmåga. Den experimentella gruppen visade en mer generell utveckling av både procedur- och begreppsförmågan. Gruppen som fått traditionell undervisning visade en tydligare utveckling av procedurförmågan, men ingen av begreppsförmågan. Rittle-Johnson och Alibali (1999, s. 188) gjorde en studie där man tittade på relationen mellan utveckling av procedur- och begreppsförmågan inom problemlösning i årskurserna fyra och fem. Utifrån resultatet drog de slutsatsen att förmågorna utvecklas parallellt, då mer undervisning i procedurförmågan utvecklade begreppsförmågan och vice versa. Dock menar de att förmågornas påverkan på varandra inte nödvändigtvis är likvärdiga.

## *Undervisning om bråk, del - helhetsperspektiv*

Nagy (2017) menar att forskning om bråkundervisning pekar på att undervisningen behöver utgå från barns informella kunskaper då de lär sig bråk genom att omorganisera tidigare kunskaper. Det här leder till att barn använder egna strategier och algoritmer för att göra beräkningar med bråk, vilka ibland kan vara ineffektiva. Därför behöver eleverna få en grundläggande begreppslig förståelse (Nagy, 2017, s. 51). Löwing (2016) menar att olika begrepp presenteras med olika djup, beroende på i vilken årskurs de presenteras. Det kan leda till svårigheter för läraren att få överblick över vilken förståelse som behövs för att förstå de relevanta aspekterna av ett begrepp (Löwing, 2016, s. 234).

Charalambous och Pitta-Pantazi (2007, s. 306–309) uttrycker att uppfattningen av bråk som del- helhet är överrepresenterat i undervisningen i jämförelse med de andra subgrupperna och framför allt i de tidiga åldrarna. Liu et al. (2012, s. 59) delar den uppfattningen och menar även att de andra subgrupperna blir förbisedda. De anser att det är rimligt att utgå från del - helhet när man introducerar bråkbegreppet, men att det är nödvändigt att utveckla elevers begreppsliga förståelse genom att arbeta med de andra subgrupperna (Liu et al. 2012, s. 59). Även Sveider (2021) beskriver att elever ofta har lättare att lösa uppgifter som handlar om del- helhet än andra former av bråkuppgifter. Hon menar att förutom att undervisningen kretsar mer kring det, så kan elever helt enkelt ha svårare att skapa en förståelse för de andra subgrupperna (Sveider, 2021, s. 19).

## *Lärares kunskaper om bråk*

I lärarens matematikdidaktiska kunnande, utgör de egna matematikkunskaperna själva kärnan. Dessa egna matematikkunskaper tillsammans med didaktiska kunskaper, är nödvändiga för att läraren ska urskilja vilka begrepp som är viktiga och vilka elevuppfattningar som är utvecklingsbara och acceptabla (Löwing, 2016, s. 26). Reeder och Utley (2017) understryker vikten av goda ämneskunskaper och förståelse för bråkbegreppet hos lärare i alla årskurser. Det finns annars en risk att lärares ytliga förståelse och missuppfattningar förmedlas vidare till deras framtida elever. I sin studie beskriver Reeder och Utley (2017) hur blivande lärare i årskurserna 4–8 har allt för ytliga kunskaper om bråk. Studenterna som medverkar går sista året i sin utbildning. När studenterna ombads definiera vad bråk är så var svaren övervägande utifrån bråk som del- helhet. Studenternas resonemang kring bråk beskrivs även som baserade på många egna missuppfattningar. Trots ämneskurser och även en didaktisk kurs, sågs ingen betydande progression av förståelse av bråkbegreppet hos studenterna (Reeder & Utley, 2017, s. 314–315).

## *Elevers svårigheter kring bråk*

Löwing (2016) menar att elever behöver behärska ett antal grundläggande begrepp innan de börjar operera med bråk. Det första begreppet handlar om nämnarens innebörd, att då nämnaren visar i hur många delar något delas. Det andra begreppet är täljarens innebörd, som är hur många delar av helheten som avses. Det tredje är att varje tal i bråkform kan skrivas på oändligt många sätt. (Löwing, 2016, s. 83). Flera studier visar att det finns brister i elevers förståelse för täljare och nämnare (Nagy, 2017, s. 112; Löwing, 2016, s. 86–87; Liu et al., 2012, s. 49). Två vanliga missuppfattningar kopplat till detta är dels att elever tror att bråkets värde ökar om täljare eller nämnare ökar. Likaså tror de att bråkets värde minskar om täljare eller nämnare gör det (Liu et al., 2012, s. 49).

Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) genomförde en studie på Cypern i årskurserna 5–6 där de bland annat tittade på vilka delar av bråkbegreppet eleverna visade störst förståelse för. De utgick då från de fem olika subgrupperna av bråk som tidigare nämnts. Eleverna visade högst respektive lägst förståelse i den skrivna ordningen; del - helhet, förhållande, operator, resultat av division och mätning. Vidare menar de att inga egentliga slutsatser kring komplexiteten i de olika subgrupperna kan dras. Elevernas förståelse speglas i läromedlet som används och i kursplanen, där fokus ligger på framför allt del - helhet.

Van Hoof et al. (2015) beskriver något som benämns *natural number bias*, alltså en bias kring naturliga tal. Innan rationella tal introduceras för elever, har eleverna redan format en intuitiv bild av vad ett tal är, en bild som då är baserad på naturliga tal. Då elever möter naturliga tal i sin vardag i en mycket större omfattning, förstärks bilden av att tal är naturliga tal. Det gör att när rationella tal introduceras och i situationer där naturliga tal inte är applicerbara, gör eleverna systematiska fel. En vanlig missuppfattning är att värdet på ett bråktal ökar när täljare, nämnare eller båda ökar (Van Hoof et al., 2015, s. 40, 50). Liu et al. (2012) beskriver ett liknande fenomen, men benämner det *whole number bias*. Lärande som kräver omorganisering av tidigare kunskaper är svårare än lärande som är av en berikande natur. Risken är stor att barn skapar vissa missuppfattningar när de tvingas omorganisera tidigare tankekoncept (Liu et al., 2012, s. 46–47, 57).

## *Sammanfattning*

Utvecklingen av elevers begrepps- och procedurförmåga är tätt sammanflätade. I studier där man delat upp dessa förmågor i undervisningen går det att se att begreppsförmågan kan vara nyttig för att utveckla procedurförmågan, men procedurförmågan ger inga positiva effekter på begreppsförmågan (Gabriel et al., 2012, s. 144–145). Mycket av undervisningen handlar om del av helhetsaspekten. Detta sker även efter det att eleverna förväntas ha en grundläggande förståelse för bråkbegreppet. Det gör att eleverna visar en markant tydligare förståelse för bråk som del av helhet, än de andra aspekterna (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 306–309; Liu et al., 2012, s. 59; Sveider, 2021, s. 19). Goda ämneskunskaper och god förståelse för bråkbegreppet är viktigt hos lärare när de ska undervisa elever, då det är en komplex del av

matematikens innehåll. Många lärare och blivande lärare har allt för ytliga kunskaper och bristfällig begreppslig förståelse (Reeder & Utley, 2017, s. 314–315). Många elever har bristande förståelse för täljare och nämnare som begrepp, vilket kan anses problematiskt då dessa är grundläggande för att förstå bråkbegreppet (Nagy, 2017, s. 112; Löwing, 2016, s. 86–87; Liu et al., 2012, s. 49). Innan elever möter bråkbegreppet har de en taluppfattning som är baserad på naturliga tal. Detta gör att de försöker applicera egenskaper hos naturliga tal i bråktal, uppstår det missförstånd (Van Hoof et al., 2015, s. 40, 50).

## Teoretiskt perspektiv

I det här avsnittet presenteras en sammanfattning av de fem subgrupperna av bråk som beskrivits av Sveider (2021) och Reeder och Utley, (2017). Sedan följer en motivering till varför subgrupperna är relevanta som ramverk i relation till studiens syfte och frågeställningar.

## Fem subgrupper av bråk

**Tabell 1**

*De fem subgrupperna av bråk.*

Subgrupp:	Beskrivning	Exempel
Del- helhet	Innefattar att kunna dela upp en kontinuerlig eller diskret mängd. Rymmer det som ofta benämns del av helhet och del av antal.	$\frac{1}{4}$ av en pizza.  Bestämma $\frac{1}{3}$ av 9.
Förhållande	Anger förhållande mellan två olika mängder.	Saft ska blandas med förhållandet 1:7. Varje del utgör då $\frac{1}{7}$ .
Operator	För att beteckna en räkneoperation med någon av de fyra räknesätten.	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$
Resultat av division	Anger resultatet av en division.	Bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ kan tolkas som resultatet av 1 dividerat med 2.
Mätning	Bråk som tal.	Bråket $\frac{3}{4}$ kan ses som 0,75.  På en tallinje är bråket $\frac{1}{2}$ i mitten mellan 0 och 1.

*Tabell med en sammanfattning av de fem subgrupperna av bråk (Sveider, 2021, s. 19–27; Reeder & Utley, 2017, s. 308). I tabellen visas även egna exempel från varje subgrupp.*

Jag kommer att använda dessa subgrupper av bråk som ett ramverk för min studie. Med utgångspunkt i tidigare forskning blir det relevant för att beröra alla delar av bråkbegreppet. Detta då det finns en dominans i undervisningen av fokus på del- helhet (Charalambous och

Pitta-Pantazi, 2007, s. 306–309) (Liu et al., 2012, s. 59). Ramverket används för utformningen av elevtestet som jag tagit fram. Testet är underlag för en stor del av intervjuerna och då studiens frågeställningar handlar om lärares uppfattning av elevers förståelse för bråkbegreppet och undervisningen, är ramverket nödvändigt för att alla aspekter av bråkbegreppet ska vara representerade. Ramverket används inte för själva analysen av intervjuerna, utan verkar då bara som en del av den tidigare forskningen.

## Metod

I följande avsnitt beskrivs val av metod för insamling av data och dess utformning argumenteras för. I avsnittet presenteras även urvalet som studien förhåller sig till. Därefter redovisas också studiens genomförande och hur insamlade data analyserats. Sedan beskrivs begreppen validitet, reliabilitet, objektivitet och generaliserbarhet i relation till studien. Slutligen förklaras även de etiska överväganden som tagits hänsyn till i studiens metod.

### Val av metod

De metoder för datainsamling jag valde för att kunna svara på mina frågeställningar är dels ett test med uppgifter huvudsakligen från Diamantdiagnoserna. Jag genomförde även intervjuer med lärare där elevernas resultat på testerna fick verka som underlag för en del av intervjun.

### Testet

Det test som jag använde utgörs av uppgifter från olika diagnoser inom rationella tal från Diamantdiagnoserna (Skolverket, 2013). Jag valde att använda enstaka uppgifter från olika diagnoser som mäter kunskaper i de olika aspekter av bråk som jag beskriver under begrepp och teoretiskt perspektiv (Sveider, 2021, s. 19–27; Reeder & Utley, 2017, s. 308). Ambitionen från början var att endast använda uppgifter från diagnoserna, men jag upptäckte att det inte fanns uppgifter som testade alla de fem aspekter av bråk som är min utgångspunkt. Testet förväntades ta ungefär 30–40 minuter för eleverna att genomföra. Syftet med testerna var inte att göra någon omfattande kartläggning av elevernas i årskurserna 4–6 kunskaper om bråkbegreppet, då sådana kartläggningar redan gjorts med stora mängder data. Syftet med testerna var att ge underlag för en del av intervjun med lärarna där elevernas kunskaper diskuteras.

Testet bestod av 11 frågor som berörde de olika aspekterna av bråk. Tanken var att varje aspekt av bråkbegreppet skulle bestå av tre frågor vardera. Fråga 1–3 behandlar *del – helhet*. Fråga 4–6 består av frågor som testar kunskaper om *förhållande*. Fråga 7–8 är frågor som behandlar bråk som *operator* och fråga 9 bråk som *resultat av division*. Slutligen så behandlar fråga 10–11 subgruppen *mätning*. Nedan listar jag uppgifterna från elevtestet med en beskrivning. Testet i sin helhet finns även som bilaga A.

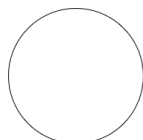
Uppgift 1 prövar bråk som del av helhet och eleverna ska skugga a, b och c korrekt för att uppgiften ska anses vara rätt (Skolverket, 2013, s. 11).

1. Skugga en fjärdedel av dessa figurer.

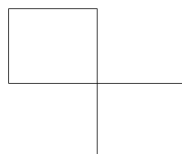
a)



b)



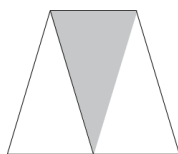
c)



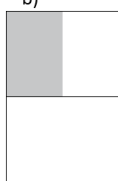
Uppgift 2 prövar också bråk som del av helhet och eleverna ska ringa in a och c för att anses svara rätt. Eleverna måste förstå att alla delar måste vara lika stora och att  $\frac{2}{6}$  är lika mycket som  $\frac{1}{3}$  (Skolverket, 2013, s. 11).

2. Ringa in alla figurer där  $\frac{1}{3}$  är skuggad?

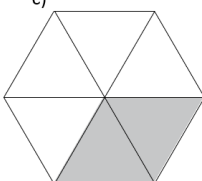
a)



b)



c)



Uppgift 3 prövar bråk som del av antal och eleverna måste svara korrekt på a, b, c och d för att det ska anses vara rätt (Skolverket, 2013, s. 17).

3. Hur mycket är

d) hälften av 12? \_\_\_\_\_

b) en tredjedel av 6? \_\_\_\_\_

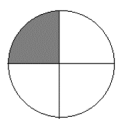
c) en femtedel av 10? \_\_\_\_\_

d) en fjärdedel av 8? \_\_\_\_\_

Uppgift 4 prövar bråk som förhållande och eleverna måste svara korrekt på a och b för att anses ha rätt. Den här uppgiften kommer inte från *Diamantdiagnoserna*, utan är en egen uppgift skapad utifrån Sveiders (2016, s 22–23) beskrivning av förhållande.

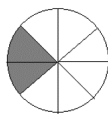
4. a) Beskriv cirkel A och B som bråk.

A



\_\_\_\_\_

B



\_\_\_\_\_

b) Vilket av bråken är störst? \_\_\_\_\_

Uppgift 5 prövar också bråk som förhållande och på den uppgiften har eleverna endast fått rätt om de kommit fram till rätt svar med hjälp av en beräkning. De har alltså inte fått rätt när de ritat och valt korrekt alternativ. Då det endast skiljer  $\frac{1}{40}$  mellan bråken, kan deras illustrationer inte visa vilket som är störst (om de inte ritat väldigt exakt). De har endast fått rätt om de förlängt bråken till minsta gemensamma nämnare, eller eventuellt omvandlat till procent. Den här uppgiften kommer inte heller från *Diamantdiagnoserna*, utan är skapad utifrån Sveiders (2016, s. 23) beskrivning av förhållande.

5. Vilket av bråken  $\frac{2}{5}$  och  $\frac{3}{8}$  är störst? (Beskriv eller rita gärna hur du tänker).

Uppgift 6 prövar bråk som förhållande och är uppdelad i 6a och 6b. Eleverna har alltså kunnat få rätt på båda eller en av uppgifterna (Skolverket, 2013, s. 56).

6. När man blandar saft ska man ta 4 dl vatten till 1 dl koncentrerad saft.

a) Hur mycket koncentrerad saft ska man ta till 8 dl vatten?

b) Hur mycket vatten ska man ta om man vill ha 2 liter färdigblandad saft?

Uppgift 7 prövar bråk som operator och består av fem separata uppgifter med addition och subtraktion, både med samma och olika nämnare (Skolverket, 2013, s. 24, 27).



7. Beräkna

a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} =$

b)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$

c)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

d)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$

e)  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

Uppgift 8 prövar också bråk som operator och består även den av fem uppgifter, där förutom en uppgift med subtraktion även innefattar uppgifter med multiplikation och division (Skolverket, 2013, s. 27, 30). Uppgift b och e kan även ses pröva mätning enligt Sveiders (2016, s. 26) definition.

8. Beräkna

a)  $1 - \frac{3}{4} =$

b)  $6 \cdot \frac{1}{2} =$

c)  $3 \cdot \frac{3}{5} =$

d)  $\frac{6}{5} / 3 =$

e)  $2 / \frac{1}{3} =$

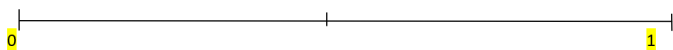
Uppgift 9 prövar bråk som resultat av division och är uppdelad i 9a och 9b. Eleverna har kunnat få rätt på båda eller en av uppgifterna. Uppgift 9 är inte från *Diamantdiagnoserna*, utan är en egen uppgift skapad utifrån Sveiders (2016, s. 25) definition av bråk som resultat av division.

9 a) Anna, Olle och Egon ska dela lika på en kanna med saft. Hur mycket får varje person?

9 b) Anna, Olle och Egon ska även dela lika på två pizzor. Hur mycket får varje person? (Visa med flera lösningar. 1 poäng för varje lösning)

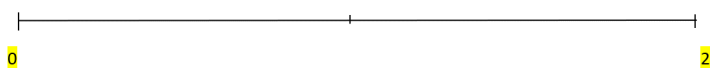
Uppgift 10 prövar mätning och eleverna har fått rätt om de placerat ut båda bråken på korrekt plats (Skolverket, 2013, s. 21).

10. Placera ut bråken  $\frac{1}{3}$  och  $\frac{3}{4}$  på tallinjen.



Uppgift 11 prövar också mätning och eleverna har även här fått rätt om de placerat ut båda bråken på korrekt plats med hänsyn till att tallinjen nu går från 0–2. Uppgiften är utifrån Skolverket (2013, s. 21) men är något modifierad.

11. Placera ut bråken  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{4}{5}$  på tallinjen. (Titta noga på värdena på tallinjen)



När elevgrupperna sedan genomfört testen så gjorde jag en initial analys och sammanställning av deras resultat. Resultaten för respektive lärares grupp sammanställdes i en tabell med antingen rätt eller fel, så som är vanligt i diagnoser. Jag sammanställde sedan hur många elever i gruppen som svarat rätt på varje fråga, för att ha den informationen tillgänglig under intervjun. Sammanställningen handlar om att kartlägga vilka aspekter av bråkbegreppet eleverna visar högre respektive lägre förståelse. Jag valde även ut vissa elevexempel vilka kunde vara av värde för diskussionen under intervjun. Nedan presenteras en sammanställning av svaren hos eleverna i alla fyra grupper.

**Tabell 2**

*Resultat från elevtestet*

Uppgift	Antal som svarat rätt i %	Uppgift	Antal som svarat rätt i %	Uppgift	Antal som svarat rätt i %
1	98	7a	78	8c	29
2	60	7b	67	8d	33
3	67	7c	2	8e	4
4	56	7d	67	9a	62
5	0	7e	24	9b	60
6a	91	8a	62	10	33
6b	38	8b	40	11	20

*Sammanställning av resultat på elevtestet. Tabellen visar procentuellt hur många elever som svarat rätt på respektive fråga av 46 elever.*

## *Intervjuer*

Jag valde att genomföra semistrukturerade intervjuer med lärare på olika skolor. Bryman (2011) beskriver att i semistrukturerade intervjuer har forskaren en lista eller intervjuguide med förhållandevis specifika teman som ska beröras i intervjun. Personen som blir intervjuad har dock en stor frihet i att utforma svaren på sitt eget sätt (Bryman, 2011, s. 415). I en semistrukturerad intervju är ordningsföljden på frågor oftast flexibel, även om intervjufrågor eller teman är färdigformulerade. En annan aspekt i en semistrukturerad intervju är att följdfrågor ställs när det finns ett behov (Larsen, 2018, s. 139). Formen för semistrukturerad intervju var passande, då de olika lärarna kunde svara mer uttömmande på frågorna när ordningen var flexibel och det fanns utrymme för följdfrågor. Samtidigt som flexibiliteten är nödvändig så bör det även finnas en viss struktur. Bryman (2011) skriver att om en undersökning rymmer flera fall, så bör det finnas en struktur för att kunna jämföra de olika fallen med varandra (Bryman, 2011, s. 416). När jag började att utforma min intervjuguide (se bilaga B), utgick jag från mina två frågeställningar. Fråga 1–2 berörde den första frågeställningen som handlar om hur lärare uppfattar elevers förståelse för bråkbegreppet. Fråga 3–7 berörde i stället den andra frågeställningen som handlar om hur lärare utformar sin undervisning. Efter de första tre frågorna så utgick vi från elevtestet, där jag ställde frågor om huruvida de trodde eleverna hade lätt eller svårt att svara på dem och vad det i så fall var i uppgiften som gjorde det. Fler frågor i intervjuguiden berörde undervisningen då mycket kring elevtesterna handlade om elevernas förståelse. Tanken med utformningen av intervjun var även att det fanns möjlighet att ställa de tidigare frågorna ytterligare en gång, om det eventuellt hade uppkommit någon ny tanke efter att vi gått igenom hela testet.

## **Urval**

Vid kvalitativa forskningsmetoder är en statistisk generalisering av resultatet inte målet. Därför går det att använda sig av ett icke-sannolikhetsurval (Larsen, 2018, s. 124). Kihlström (2007) beskriver att i kvalitativa intervjuer handlar det om att intervju någon som har erfarenhet av området som behandlas. Om respondenten beskriver en egen tidigare erfarenhet kan det anses mer tillförlitligt (Kihlström, 2007, s. 49). Vid val av informanter för intervjuerna i den här studien gjorde jag ett icke-sannolikhetsurval. Jag sökte informanter i en liten kommun i mellan-Sverige då intervjuerna ägde rum på plats. Tidsaspekten gjorde att det blev lättare att genomföra på det viset och kan klassas som ett bekvämlighetsurval. Jag valde ut 3 informanter som undervisar i matematik i årkurserna 4–6. Då jag visste att många lärare som är behöriga i att undervisa i matematik inte har gjort det under perioder, försökte jag hitta lärare med lång arbetslivserfarenhet. Då det visade sig vara svårt att hitta lärare som ville medverka i studien, så slutade det med att två av de medverkande lärarna har lång erfarenhet av matematikundervisning och en av dem har några års erfarenhet. Vid val av grupper som skulle genomföra testerna bestämde jag att det blev elever i årskurs 6, vilka de medverkande lärarna undervisade i matematik. Detta då vårdnadshavares medgivande är nödvändigt för elevernas deltagande och gensvaret med sannolikhet blir större om en lärare från den egna skolan är involverad. Det kan ses som ett bekvämlighetsurval, men utgör samtidigt ett något

representativt underlag. Jag hade ingen tidigare bild av elevernas kunskaper på de olika skolorna. Larsen (2018) beskriver att det är viktigt med ett överföringsvärde även i kvalitativa undersökningar.

## Genomförande

Innan jag började formulera frågor till kommande intervjuer, började jag att försöka utforma testet. Den inledande tanken var att kunna hitta uppgifter i *Diamantdiagnoserna* men jag upptäckte att det inte var möjligt att tydligt kunna särskilja de subgrupper som jag utgått från. Därför fick jag skapa några uppgifter själv utifrån hur Sveider (2021, s. 22–26) beskriver dem. När jag upplevde att jag utformat ett elevtest som rymde de fem subgrupperna av bråk och var av lagom omfattning, så gick jag igenom testet med min handledare på högskolan för att se om hon hade några invändningar eller förbättringsförslag. Jag gjorde sedan en pilotstudie där en årskurs 6 fick genomföra testet, som jag sedan sammanställde. Efter detta gjorde jag även vissa korrigeringar på uppgift 10 och 11. För att eleverna inte skulle misslyckas på uppgifterna på grund av att de inte varit noggranna, gjorde jag vissa förtydliganden. Jag gulmarkerade värdena på tallinjen på båda uppgifter och skrev till att de skulle titta noga på värdena på uppgift 11. Därefter började jag att sätta samman intervjufrågor till lärarna som skulle ge dem så mycket utrymme som möjligt att beskriva det som är mina frågeställningar i det här arbetet. Efter att även visat dessa för min handledare så bokade jag in den första intervjun som då var en pilot. Tanken var redan innan att om intervjun kändes relevant så skulle den bli en del av resultatet. Detta då den lärare som jag genomförde pilotintervjun med har lång erfarenhet, även om hen i år inte undervisar i årskurs 6. Jag genomförde intervjun med läraren på plats på skolan där läraren arbetar. Intervjun tog ungefär 60 minuter att genomföra med introduktionen inräknad. Jag inledde med att förklara för läraren att jag kommer att börja med några öppna frågor kring undervisning och elevers förståelse, för att sedan titta på alla uppgifter och eventuella elevexempel. Jag förklarade också att jag sedan kommer att ställa några avslutande frågor. Innan intervjun fick läraren även titta igenom kortare definitioner av de fem subgrupperna av bråk som jag utgår från. Detta för att få en större förståelse för hur testet är utformat.

Då jag upplevde att formen för den första intervjun fungerade väl, valde jag att ha samma upplägg på de andra två intervjuerna. När jag åkte ut på skolorna för att lämna elevtesten till lärarna, beskrev jag också för elevgrupperna som skulle genomföra testet vad det var som jag ville titta på och hur deras svar skulle komma att användas. Eleverna fick sedan muntligt höra den information som står i informationsbrevet. De fick även sedan informationsbrevet och samtyckesblanketten som förutom de själva, en vårdnadshavare behövde signera. Efter att jag avtalat med lärarna vilken dag testet skulle genomföras, bestämde vi också tider för när jag skulle hämta de genomförda testen och för genomförandet av intervjuerna. Detta för att jag skulle hinna sammanställa testresultatet och välja ut intressanta elevlösningar. De båda intervjuerna tog ungefär 50 minuter att genomföra.

## Bearbetning av data och analysmetod

Efter detta så transkriberades ljudinspelningarna från alla tre intervjuer i separata dokument. Vissa talspråksmässiga ord och ljud togs bort vid transkriberingen om de inte hade någon betydelse för sammanhanget eller betoningen hos lärarna. Intervjuerna analyserades inte utifrån något teoretiskt perspektiv, då den teoretiska utgångspunkten för den här studien bara används för att utforma testet som eleverna genomfört och som en del i den tidigare forskningen. Intervjuerna analyserades induktivt med en tematisk analys. Bryman (2011) menar att tematisk analys är ett av de vanligaste angreppssätten för att behandla kvalitativa data. Den är inte kopplat till någon särskild teori och har inga tydliga ramar. Ett sätt att använda detta är dock att använda en matris för att ordna och kategorisera data (Bryman, 2011, s. 528–529). När jag bearbetade min data och gjorde analysen, så utgick jag från en modell för tematisk analys av Braun och Clark (2006, s. 87). De presenterar en modell med sex steg, vilka utgör tematisk analys. Nedan presenteras stegen översatta till svenska.

- Bekanta sig med aktuella data
- Skapa initiala koder
- Söka efter teman
- Utvärdera teman
- Definiera och benämna
- Skapa rapport

Transkriberingarna lästes igenom direkt efter de överförts från ljudfil, för att se så att inte något av det lärarna sa förvrängts. Därefter lästes de igenom ytterligare en gång och jag förde då anteckningar under läsningen. Vissa eventuella teman kunde ses i det lärarna beskrev. Tredje gången färglades stycken i texterna där lärarna tycktes prata om liknande fenomen. I ett separat dokument gjorde jag sedan två rubriker, där en berörde elevens förståelse och en lärarnas undervisning. Under dessa två rubriker gjordes sedan underrubriker med de teman som beskrev lärarnas uttalanden. Med de färgkodade uttalandena från lärarna i det samlade dokument, var det också lätt att gå tillbaka till de enskilda lärarnas transskript och se vad de sagt före och efter det uttalandet. Efter att gällande kategorier valts ut och sammanställts, gjordes en analys av det lärarna beskriver utifrån sammanhanget och den tidigare forskningen på området.

## Validitet och reliabilitet

Validitet inom forskning handlar om huruvida studien undersöker det som var tänkt. (Fejes & Thornberg 2018 s. 275, Larsen 2018 s. 129). Larsen (2018) delar upp begreppet validitet inom kvalitativa studier i de underordnade begreppen bekräftbarhet, trovärdighet och överförbarhet. Bekräftbarheten handlar om huruvida den data som studien kan frambringa svar på frågeställningarna. Trovärdigheten handlar om huruvida tolkningarna vi gör är trovärdiga och om tolkningarna är giltiga för situationen. Överförbarheten beskriver huruvida de rön studien

mynnar ut i är överförbara på grupper utanför studien. Dessa tre begrepp kan även betraktas utifrån skillnaden mellan intern och extern validitet. Intern validitet är gällande det som rör samstämmigheten mellan de olika delarna i studien och extern validitet handlar om hurvida resultatet är relevant för andra sociala sammanhang än det studerade (Larsen, 2018, s. 129–130). Reliabilitet inom forskning har att göra med noggrannhet och pålitlighet (Larsen, 2018, s. 131). I kvantitativa undersökningar kan exempelvis flera forskare göra samma undersökning och få samma resultat. I kvalitativa undersökningar är det inte lika lätt att säkra en hög reliabilitet. I intervjuer finns många aspekter att ta hänsyn till. Informanten påverkas både av intervjuaren och situationen i sig. Inom kvalitativ forskning kopplas reliabiliteten ofta till trovärdighet, vilken är viktig även för validiteten. Det viktigaste för att reliabiliteten blir den högsta möjliga är att vara noggrann med databehandlingen. Dels att vara noggrann med transkriberingen från intervjuer, dels att vara noggrann med kodningen av text i dataanalysen (Larsen, 2018, s. 131–132).

Vid val av metod för studien är det viktigt att den svarar för en hög validitet och att reliabiliteten blir den högsta möjliga. Studiens frågeställningar kan besvaras med den valda metoden. Trovärdigheten stärks med noggrannhet vid databehandlingen och överförbarheten i den mån det går gällande didaktiska aspekter och elevers svårigheter. Jag valde även att ta med flera längre citat för att visa tydligt utifrån vilka påståenden jag gjorde mina tolkningar. Detta menar också Stukát (2011, s. 137) stärker objektiviteten. Testet som elevgrupperna genomförde såg lika ut för alla grupper och lämnar inte stora tolkningsutrymmen. Detta stärker den interna validiteten i studien och även reliabiliteten. För reliabiliteten är det noga med hur transkriberingen från intervjuerna går till och hur analysen ser ut. Det är även noga med hur frågorna utformas (Stukát, 2011, s. 133). Vid formuleringen av frågorna till intervjun och under intervjun tog jag i beaktande att inte leda in informanterna på ett förutsatt svar.

## Etiska överväganden

Vetenskapsrådet listar åtta punkter med etiska förhållningssätt till vilka alla som bedriver någon form av forskning förväntas förhålla sig;

- “1) Du ska tala sanning om din forskning.
- 2) Du ska medvetet granska och redovisa utgångspunkterna för dina studier.
- 3) Du ska öppet redovisa metoder och resultat.
- 4) Du ska öppet redovisa kommersiella intressen och andra bindningar.
- 5) Du ska inte stjäla forskningsresultat från andra.
- 6) Du ska hålla god ordning i din forskning, bland annat genom dokumentation och arkivering.
- 7) Du ska sträva efter att bedriva din forskning utan att skada människor, djur eller miljö.
- 8) Du ska vara rättvis i din bedömning av andras forskning.”

(Vetenskapsrådet, 2017, s. 8)

Utöver dessa grundläggande förhållningssätt så beskriver de även fyra begrepp som syftar till att skydda medverkande i studier. Tidigare beskrevs dessa som grundläggande krav, vilket de inte längre gör. Jag kommer att förhålla mig till dessa begrepp i den här studien. Dessa är

informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Informationskravet handlar om att deltagarna ska informeras om studiens syfte, deras uppgift och villkoren för deras deltagande. Samtyckeskravet handlar om att deltagarna har rätt att bestämma över sitt eget deltagande. Deltagarnas samtycke krävs och är deltagare under 15 år så krävs även samtycke från vårdnadshavare. De medverkande kan även avbryta sin medverkan när som helst. Konfidentialitetskravet handlar om att deltagare ska ges största möjliga konfidentialitet. Personer som går att identifiera ska anonymiseras för utomstående. Det sista av de fyra kraven är nyttjandekravet. Alla uppgifter som enskilda personer får bara användas för forskningsändamål (Vetenskapsrådet, 2017, s. 40–41).

I min studie har jag tagit hänsyn till de fyra forskningsetiska principer som beskrivs av Vetenskapsrådet (2017), då den bygger på yrkesverksamma lärare och elever. Jag skickade ut informationsbrev som beskriver studiens syfte och deras uppgift. En variant skickades till de medverkande lärarna i studien (se bilaga C) och en annan skickades till medverkande elevers vårdnadshavare (se bilaga D). Det beskriver även att deras samtycke krävs och att de kan välja att avbryta sin medverkan när som helst utan förklaring. Det brev som skickades till vårdnadshavare behövde även signeras för att elevens medverkande skulle godkännas. Informationen i brevet beskrevs även muntligt för deltagarna. Insamlade data i form av ljudinspelningar kodades och transkriberades så en informants identitet bara blir känd för forskaren och eventuellt informanten själv. Deltagare informerades även om att all data endast kommer att användas för den enskilda forskningsstudien.

## Resultat och analys

Analysen av transkripten från intervjuerna redovisas utifrån de två frågeställningarna. Båda frågeställningarna kommer att analyseras induktivt utifrån vad lärare beskriver om elevers förståelse och vad de beskriver som centralt i sin undervisning.

### Resultat

#### *Lärare beskriver elevers förståelse av bråkbegreppet*

Detta första resultatavsnitt berör min första forskningsfråga som behandlar hur lärare beskriver elevers förståelse av bråkbegreppet. Avsnittet beskriver två kategorier som presenteras under rubrikerna *missuppfattningar* och *förmågor*.

#### *Missuppfattningar*

När lärarna som blev intervjuade fick göra uppskattningar av hur många elever som klarat respektive uppgift, så stämde det övervägande väl överens med hur deras elever hade svarat. Lärare 2 beskriver att elever tycker att bråk är ett av de svåraste avsnitten inom matematiken. Hen säger:

De tycker att det är ett av de svårare områdena i maten. Det som kanske är svårast på nåt vis.. Ja men när man ska använda matte i vardagen så kanske det är svårt att sätta in bråk i det. Det är svårt att använda det i vardaglig matte, som när du går och handlar och såna saker.

Lärare 1 beskriver att elever inte brukar ha några problem när det handlar om del av helhet. Eleverna kan förstå exempelvis  $\frac{1}{8}$  eller  $\frac{1}{100}$  och sedan lära sig reglerna kring bråkräkning. Hen menar att när det däremot kommer till del av antal så tycker eleverna att det blir mycket svårare. När man ska ta "ett steg till" brukar det bli en utmaning för många elever. Hen säger:

Men däremot så är det ju svårt att använda det i den meningen att man säger att hur många är två tredjedelar av sex. Liksom, när man ska gå ett steg till, det är ju då det blir riktigt knivigt. Men det handlar väl också om att det är, de är ju inte så gamla än, de har inte stött på det så mycket.

Lärare 3 menar att det oftast finns en liten grupp av elever som tycker att det är lätt och kan se kopplingarna. Sedan finns det en ganska stor grupp elever som inte har lika lätt att förstå och se bråken bildligt. "För vissa är det helt självklart, medan det för andra blir väldigt abstrakt". Hen beskriver även som lärare 1, att del av helhet upplevs ganska enkelt, medan del av antal är något som många elever har svårt för att förstå. Det faktum att många elever har svårt att se bråken bildligt, gör att många elever tycker att alla textuppgifter blir väldigt svåra.

Något annat som alla tre lärarna beskriver som en svårighet för eleverna, är att beräkna uppgifter med olika nämnare. De beskriver alla tre att enklare operationer inte brukar vara så svårt för eleverna, så länge bråken är liknämninga. Dock kan även liknämninga bråk vara svårt för vissa elever. Lärare 3 säger så här:

Självklart så beror det ju också på att de inte har bråkbegreppet klart för sig, för visste de vad  $\frac{1}{3}$  var och  $\frac{2}{3}$  till så visste de väl egentligen att det var  $\frac{3}{3}$  eller en hel. Men om man är lite osäker på vad är  $\frac{1}{3}$  och  $\frac{2}{3}$  och så står det ett + däremellan också som förstör.

Lärarna beskriver att eleverna oftast vet hur man faktiskt ska beräkna en uppgift som exempelvis  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ , där täljare adderas med täljare och nämnaren förblir densamma. När det kommer till att jämföra storleken på bråk så beskriver lärare 1 att de måste förstå vad siffran som utgör nämnaren egentligen står för. Hen säger så här gällande nämnarens betydelse:

Men det är ju något man får påpeka, och det måste bli en aha-upplevelse. Det är inte liksom helt självklart. Man tror ju att liksom om en siffra är större så är talet större, och det är ju inte så det är i delar. Man måste ha förstått att det här är del av någonting och är det då många delar i den helheten, då blir det ju väldigt små delar. Och det är ju en förståelse som man måste komma till innan det här blir lätt.. och självklart. Så det är ju en tröskel det här, det är liksom nästa nivå.



Även lärare 3 nämner att vissa elever tror att åttondelar är större än fjärdedelar då nämnaren är högre i det förstnämnda. Lärare 3 beskriver även att eleverna har svårt för att beräkna  $1 - \frac{3}{4}$ . Hen säger ” Vad ska de ta bort  $\frac{3}{4}$  ifrån? De ser inte helheten som delarna”. De ser inte att 1 är lika mycket som  $\frac{4}{4}$ . Lärare 1 menar att eleverna nästan alltid har svårt att omvandla bråk till minsta gemensamma nämnare, då det innebär flera steg. Lärare 3 beskriver också att det är något som eleverna tycker är svårt och att de faktiskt inte arbetat med detta under årkurs 6. Hen tillägger att de antagligen inte arbetat med det under årkurs 5 heller. Även lärare 2 menar att eleverna tycker att det är svårt att göra beräkningar när det är olika nämnare utan att specificera varför.

### *Förmågor*

Lärarna beskriver att det är vanligt att eleverna vet hur man ska utföra en beräkning, men att man inte vet varför man gör på det sättet. De menar att eleverna är vana att lära sig hur man gör och att det är de som de behärskar. Lärare 1 uttrycker sig som:

Nej men jag tror att man inte riktigt liksom har klart för sig vad det är man gör. Vad är det liksom som händer när man tar en del och multiplicerar den eller om man dividerar den. Multiplicera täljaren eller multiplicera nämnaren, och de fattar ingenting. Eller ja de gör ju det, för det är ju lätt att göra det. Men vad är det som har hänt egentligen?

Lärare 2 och lärare 3 menar att vissa elever har en förståelse för varför man gör på ett visst sätt. De elever som har en förståelse för bråkbegreppet är de elever som är generellt starka i matematik. Lärare 3 beskriver att elever som är starka i matematik inte bara har en större förståelse för bråk just för att de är starka, utan även för att de har en större erfarenhet av det. Hen säger:

Jag tror väl att såna som generellt har lättare för matte, de har tränat mer matte, de har gjort fler uppgifter, de har säkert stött på det fler gånger. Jag tror att deras begrepp av till exempel  $\frac{1}{4}$  är tydligare. Troligen för att de har gjort det fler gånger också än svagare elever.

Detta då de gjort fler uppgifter generellt, men även då de oftast har ett större intresse för matematik. Lärare 2 beskriver att vissa elever ser kopplingar och förstår sambanden på en gång. Vissa elever däremot kommer inte att nå en nivå där de förstår vad de gör. Hen säger: ”Vissa kan nog aldrig se det. Om de verkligen inte har tränat in vad det faktiskt är som gäller och vilka regler som gäller”.

### *Lärare beskriver bråkundervisning*

Detta andra resultatavsnitt berör min andra forskningsfråga som handlar om undervisningen. Avsnittet beskriver två olika kategorier som presenteras under rubrikerna *vad styr undervisning* och *att arbeta praktiskt och konkret*. De tre lärarna lyfter alla olika tankar kring undervisning

som de beskriver som viktiga för att öka elevernas förståelse. En del av dessa var mer generella och andra handlade om specifika aspekter av bråk. De beskriver även hur undervisningen ser ut och vad som påverkar utformningen av den. Jag har valt ut teman som beskriver vad lärarna berör gällande undervisningen.

### *Vad styr undervisningen*

Något som styr undervisningen mycket är det läromedel man använder på skolorna. Lärarna beskriver att läromedlet styr dels vad man tar upp när det handlar om bråk, dels hur mycket tid det får ta in anspråk. Lärare 1 och lärare 2 har samma läromedel på skolan och tycker över lag att det är bra. Dock beskriver de att läromedlet går ganska fort fram. Lärare 2 beskriver det som:

Jag kan tycka att boken över lag, går ganska fort framåt, att det liksom inte blir så mycket repetition som man kanske skulle vilja. Man vet att det kommer så mycket annat efter som man ska hinna med. Så kanske att man skulle behöva stanna upp och repetera mer.

Hen beskriver också att varje område i matematiken återkommer under en kort period i varje årskurs, vilket i fallet med bråk inte är tillräckligt. Lärare 1 beskriver att läromedlet oftast är baserat på att lära sig en metod och inte en djupare förståelse för varför man gör något. Hen upplever inte att det nödvändigtvis är ett problem och beskriver att:

Men jag tänker så här också, att allt man gör behöver man inte förstå. För det att man kan komma till en punkt lite längre fram när det liksom bara ramlar ner. ”Så här är det ju” Man behöver inte ha förstått allting från början exakt. Utan ibland så kan man lära sig hur man gör och det blir rätt och att förståelsen kommer mycket senare.

Hen förklarar att så klart är det mot förståelsen man strävar hela tiden, men att man i den här åldersgruppen når väldigt långt genom att lära sig en metod. Vid genomgångar beskriver läraren att hen ofta lägger ett stort fokus på rimlighetsbedömning för att förståelsen på så vis ska öka. Även lärare 3 beskriver att det är få i varje klass som faktiskt förstår varför man gör som man gör. Hen beskriver också att det inte är något stort problem, då det mesta inom matematiken inte bygger på en djupare förståelse för bråk. Vidare förklarar hen även att bråkavsnittet i det läromedel som de har på skolan är väldigt smalt. Efter att läraren tittat i boken för årskurs 6 kan hen konstatera att det är en sida som handlar om bråk. Från andra sidan handlar avsnittet om decimalutveckling och om bråk. Hen bygger inte undervisningen så mycket på det enskilda läromedlet, då det upplevs otillräckligt. I stället används delar från andra läromedel och material skapas även på egen hand utifrån erfarenhet, exempelvis utifrån vad som kommer på de nationella proven.

### *Att arbeta praktiskt och konkret*

Något som alla tre lärare beskriver är hur viktigt det är att även arbeta med konkret material för att alla elever ska få en förståelse för bråk. Lärare 1 beskriver att det delvis finns en del konkret material som följer med läromedlet, men även en del annat konkret material som man har på skolan används. I årskurs 4 så arbetar de mycket med praktiskt material för att åskådliggöra

bråken. För elever som tycker det är svårt är dessa högst nödvändiga även upp i årskurs 6. Hen beskriver också att de praktiska momenten är viktiga inte bara för att åskådliggöra, utan även för att göra lärandet mer taktilt. Material som pussel, bråkkuber och bråkcirklar där det finns olika stora delar i olika färger används. Det är speciellt viktigt för de elever som har verkligt svårt. Lärare 2 och lärare 3 beskriver båda att de tycker att det är viktigt att arbeta praktiskt, men att de båda saknar material på skolorna de arbetar. Lärare 3 säger att de har visst material, som magnetiska bråkcirklar att visa eleverna på tavlan med. Hen önskar dock att de hade mer material som eleverna kunde jobba med. Lärare 2 har i stället inget konkret material på skolan. Båda lärarna beskriver också att praktiska moment lättare kan hjälpa eleverna att skapa inre bilder.

Något annat som lärare 1 och lärare 3 beskriver är att man måste visa eleverna olika konkreta exempel. Lärare 3 säger ” Man måste nog jobba mer med bråk, på olika sätt tror jag. Praktiskt, visa, visa bilder på  $\frac{1}{3}$ . och inte bara pizzor jämt”. Även lärare 1 beskriver att alla exempel i läromedlen handlar om kakor och pizzor, och att man därför måste ge eleverna andra exempel att relatera till. Båda lärarna beskriver även hur de använder exempelvis klassen som helhet som exempel för att för att diskutera tillsammans med eleverna. Det kan handla om hur stor andel av klassen som är sjuka en viss dag. Det behövs helt enkelt många elevnära representationer. Lärare 3 nämner ett annat exempel gällande konkretisera uppgifter. Hen säger:

Det ju precis samma när det kommer en uppgift på NP som till exempel  $\frac{100}{0,5}$ . Och de sitter som frågetecken. Om man i stället frågar dem utifrån ett 100m rep, och du har halvmetersbitar. Hur många bitar får du då? Ja 200 svarar de då. Då är det självklart. Jag tror att man måste göra mycket på tavlan, alltså koppla det till verkliga uppgifter. Gör du det med ett rep blir det självklart för dem. Men om det bara står i boken och de inte får höra det.. Jag tror inte att de själva kommer till den kunskapen.

En annan aspekt av konkretisering av bråkbegreppet som lärarna beskriver är att rita. Dels att som lärare rita på tavlan för att visa eleverna, dels att eleverna ska rita för att på så vis kunna testa sig fram och skapa bilder av bråk. Alla tre lärare beskriver att de ritar mycket på tavlan när de undervisar om bråk. Lärare 1 beskriver hur hen försöker lära ut ritande som en metod för att se och jämföra. Lärare 2 menar också att rita är viktigt för att många behöver det. Hen säger:

Jag försöker också vara ganska noggrann med att inte bara visa bråk och delar i siffror. Jag vill att de ska veta att de kan rita upp i bilder, för då tror jag att det blir lättare för många att se. Till exempel om de ska jämföra bråk. Att rita bilder för att det blir så mycket tydligare. Så det brukar jag vara på dem mycket om att de ska göra. Och även om de ska som med textuppgifter, att de försöker tänka att de faktiskt kan redovisa sin lösning genom att rita bilder. För att jag tror att det blir så mycket tydligare för många.

## Analys

Detta andra resultatavsnitt består av en analys av det som lärarna beskriver i intervjuerna. Det som lärarna beskrivit kring elevers förståelse och sin undervisning, kommer att analyseras och tolkas med hjälp av den tidigare forskningen som jag presenterat i tidigare avsnitt. Avsnittet har samma rubriker som det första resultatavsnittet.

### *Lärare beskriver elevers förståelse för bråkbegreppet*

#### *Missuppfattningar*

Lärarna beskriver att bråk är generellt ett av de svåraste områdena i matematiken. Detta beskriver även Liu et al. (2012) som menar att bråkbegreppet är det mest abstrakta innehåll som elever möter i yngre åldrar (Liu et al., 2012, s. 45). Det som lärarna lyfter fram som en svårighet hos elever är del av antal. Detta ställs då i relation till del av helhet som upplevs lättare att förstå för eleverna. I den indelning av subgrupper ur vilket elevtestet är utformat hör del av helhet och del av antal till samma subgrupp av (Sveider, 2021, s. 19–27; Reeder & Utley, 2017, s. 308). I den indelning som lärarna är vana vid att utgå ifrån delas den subgruppen dock in i två olika aspekter. Enligt resultatet i intervjun fokuserar alla lärarna på den subgrupp som Sveider (2021) benämner del- helhet. Lärarna i intervjun beskriver att det är ett stort steg för eleverna att förstå del av antal. Utifrån uttalandet från lärare 1 skulle det kunna tolkas som att eleverna arbetat med del av helhet under så pass lång tid att de fått en förståelse för det. Del av antal däremot är något nytt och därför fortfarande något abstrakt.

Det faktum att lärarna lyfter del av antal som en vanlig svårighet kan tolkas som att lärarnas egen uppfattning om bråk till stor del bygger på den aspekten. Det skulle även kunna tolkas som att när de reflekterar över elevers svårigheter så är del av antal den första svårigheten man möter hos eleverna när man undervisar i årskurserna 4–6 (Skolverket, 2022b, s. 11). Löwing (2016) menar att förutom grundläggande proportionalitet, så är det del av helhet och del av antal som man behandlat i de tidiga åldrarna. Hon beskriver också att det inte är självklart för elever, att man kan arbeta med exempelvis  $\frac{3}{4}$  av en helhet och  $\frac{3}{4}$  av ett antal utifrån samma matematiska modell. Det är heller inte självklart att en strategi som beskrivits för del av helhet också gäller för del av antal (Löwing, 2016, s. 83). Det skulle även kunna grundas i det som Charalambous och Pitta-Pantazi (2007, s. 296–297) beskriver. Det finns missuppfattningar som elever har kring del- helhet. En av dessa missuppfattningar är att inte alla delar i en kontinuerlig mängd måste vara lika stora. Eleverna kan då exempelvis ha svårt att skugga  $\frac{1}{3}$  av en figur om inte alla delar har samma form. Det kan även visa sig när de ska räkna ut del av antal som  $\frac{4}{12}$ , då det förutsätter att de vet att varje fjärdedel måste vara lika stor.

Lärarna beskriver att elever oftast inte har så svårt för att förstå hur de ska beräkna operationer där nämnaren är densamma. Om det däremot är olika nämnare upplever dock många elever att det blir svårare. Det skulle kunna bero på att man helt enkelt inte arbetat med det så mycket, så som lärare 3 beskriver. Löwing (2016) pekar i ett exempel på att det är många elever som inte

behärskar detta även i årskurs 8–9 (Löwing, 2016, s. 230). Det skulle även kunna bero på att det innefattar fler steg i beräkningen när man behöver omvandla nämnaren till den minsta gemensamma. Lärarna beskriver dock att eleverna inte har bråkbegreppet klart för sig. Det lärarna säger om att elever har svårt när det är olika nämnare och det lärare 3 säger om att många inte förstår att  $\frac{3}{3}$  är en hel, kan tolkas som att många elever inte har en förståelse för vad vare sig täljaren eller nämnaren står för. Detta stämmer väl överens med vad som beskrivs i tidigare studier, där man menar att det finns brister i elevers förståelse för täljare och nämnare (Nagy, 2017, s. 112; Löwing, 2016, s. 86–87; Liu et al., 2012, s. 49). Lärare 3 säger att det är vissa elever som tror att åttondelar är större än fjärdedelar. Lärare 1 menar samma sak då hen beskriver att en vanlig missuppfattning är att om nämnaren är större så blir värdet på talet större. Detta skulle kunna bero på att eleverna bygger sin förståelse för nämnaren på tidigare kunskaper om naturliga tal. Det är då samma fenomen som Van Hoof et al. (2015, s. 40, 50) kallar för *natural number bias*.

### *Förmågor*

Lärarna beskriver att de flesta elever har en mer procedurell förståelse för bråk. Lärare 1 menar att det är relativt lätt för eleverna att förstå hur man ska beräkna operationer med bråk. Däremot är det väldigt svårt för dem att förstå varför man gör på ett visst sätt. Det kan tolkas som att eleverna får en generellt god procedurell förståelse, men den begreppsliga förståelsen är svåråtkomlig. Löwing (2016, s. 23) beskriver också detta och menar att även om en elev kan hantera ett innehåll och färdigheterna, så betyder det inte att förståelsen finns. Lärare 2 och lärare 3 beskriver att vissa elever utvecklar en begreppslig förståelse kring bråk. Dessa elever är de elever som är generellt starka i matematik. Lärare 2 beskriver att dessa elever förstår och ser samband på en gång och lärare 3 menar att dessa elever har en bredare erfarenhet av uppgifter vilket gör att de förstår. Båda dessa uttalanden kan tolkas som att vissa elever som är starka i matematik får en begreppslig förståelse trots att fokuset i undervisningen är i huvudsak procedurell. Det lärare 3 beskriver skulle även kunna tolkas som att det krävs en bred erfarenhet av bråk för att få en begreppslig förståelse. Ett annat sätt att se på de två lärarnas uttalanden skulle kunna vara att de elever som beskrivs som starka har en god taluppfattning. Taluppfattningen i sin tur har en stor roll i det som Teoh et al (2020) kallar för *fraction sense*. Det handlar om en djupare förståelse för bråkbegreppet, som kommer från förmågan att resonera kring och jämföra bråk. Elever utvecklar inte sin *fraction sense* genom att träna på procedurer och regler och applicera dessa på olika situationer (Liu et al., 2012, s. 27). Har dessa elever sedan haft en god taluppfattning tidigt, så stämmer det väl överens med resultatet i den studie som Wilkins et al. (2021) genomförde.

### *Lärare beskriver bråkundervisning*

#### *Vad styr undervisningen*

Något som tycks styra mycket av hur undervisningen ser ut, verkar vara det läromedel man använder (Löwing, 2016, s. 228). Lärare 1 och lärare 2 som har samma läromedel tycker att det är bra och förhåller sig mycket till det. Lärare 2 beskriver att läromedlet går fort fram och

eleverna hinner inte repetera ett moment så mycket som hen skulle önska. Det är många moment som ska hinnas med så man går vidare. Det kan tolkas som att läraren önskar att det fanns mer tid till att repetera ett moment, men väljer att inte göra det då det finns en stress över att hinna arbeta med allt i boken. Lärare 2 beskriver även att det läromedel de har och läromedel generellt fokuserar framför allt på en procedurell förmåga hos eleverna. Detta speglar det som Gabriel et al. (2012) beskriver som traditionell bråkundervisning i sin studie. Traditionell undervisning fokuserar på procedurer och inte på en begreppslig förståelse. I studien kunde man se att sådan undervisning utvecklade elevernas förmåga att lära sig procedurer, men gav ingen utveckling av den begreppsliga förståelsen. Undervisning som däremot fokuserade på förståelsen utvecklade både denna och den procedurella förmågan Gabriel et al. (2012, s. 144–145). Läraren beskriver också att hen lär ut rimlighetsbedömning som metod för att eleverna ska få en ökad förståelse. En tolkning av det skulle kunna vara att det är ett sätt för läraren att kompensera för att läromedlet har ett procedurellt fokus, utan att frångå läromedlet för mycket. Detta då lärarna påvisat en medvetenhet om att det finns ett sådant fokus i läromedel och att många elevers kunskaper bygger på procedurer och inte en begreppslig förståelse. Lärare 3 följer inte läromedlet de använder på samma sätt som de andra. Hen tar in delar från andra läromedel och skapar egna uppgifter. Detta skulle kunna innebära att det inte finns samma stress att gå vidare till nästa moment, utan eleverna får en chans att repetera det som är svårt att förstå. Något som lärarna inte lyfter är vilka aspekter av bråk som läromedlen fokuserar på. Forskningen beskriver att det finns ett övervägande fokus på del- helhet (Charalambous och Pitta-Pantazi, 2007, s. 306–309; Liu et al., 2012, s. 59; Sveider, 2021, s. 19). Vidare beskrivs att de andra subgrupper ofta blir förbisedda och då framför allt subgruppen mätning. De andra subgrupperna är något som eleverna också behöver möta, för att kunna utveckla sin förståelse för bråkbegreppet (Liu et al., 2012, s. 59). En tolkning av det lärarna beskriver kan vara att lärarna gör få eller inga aktiva val att lyfta in andra aspekter av bråk utöver de läromedlen tar upp.

### *Att arbeta praktiskt och konkret*

Lärare 1 beskriver att de har en del konkret material på skolan och en del material som följer med läromedlet. Hen listar olika exempel som pussel, bråkcirklar och bråkkuber och beskriver även att det är viktigt för det taktila lärandet hos eleverna. Sveider (2021) beskriver att laborativt material ska vara visuellt, taktilt och kunna manipuleras. Det ska kunna vridas och vändas på (Sveider, 2021, s. 8). Lärarens uttalande kan tolkas som att hen vet vilket material som finns tillgängligt och det är en naturlig och nödvändig del i bråkundervisning. Läraren beskriver att man i årkurs 4 arbetar mycket med konkret material och för de som verkligen behöver det även i årkurs 6. Det kan tolkas som att man i de lägre åldrarna arbetar på ett sätt som fokuserar mer på en begreppslig förståelse. När de sedan blir lite äldre övergår undervisningen till en mer procedurell sådan. Detta trots att lärarna beskriver att det är många elever i årkurs 6 som har svårigheter kring förståelsen av exempelvis täljaren och nämnarens innebörd. Löwing (2016, s. 34) beskriver att när elever utvecklar sitt matematikkunnande så kan begrepp förfinas mer och beskrivas mer abstrakt. Lärare 3 säger att de har visst material för att visa eleverna och lärare 2 beskriver att de inte har något konkret material alls på skolan. Båda lärare önskar att de hade mer olika material att arbeta med. Det kan tolkas som att båda lärarna vet att konkret material är viktigt för elever som upplever bråk som något abstrakt och för att alla elever ska få en

begreppslig förståelse. Sveider (2021) beskriver att konkret material är utvecklande för elevernas begreppsliga förståelse. Det kan även ge eleverna en större förståelse för samband i matematiken och förståelse för hur den kan användas i vardagliga situationer. Ytterligare beskrivs att det även kan vara positivt för elevernas motivation i ämnet (Sveider, 2021, s. 8–9). Det som lärare 2 tidigare beskrev kring tidsaspekten i läromedlet skulle kunna vara en bidragande faktor till att man inte mer aktivt ser till att dylikt material införskaffas.

Lärarna lyfter också att det är viktigt att ge eleverna många representationer av bråk. Lärare 1 och lärare 3 beskriver att eleverna måste få många olika exempel och ”inte bara tårter och pizzor hela tiden”. Lärarna ser att de exempel som lyfts i läromedel utgår från samma exempel hela tiden. De menar att eleverna behöver många olika exempel som går att tillämpa på olika uppgifter eller situationer. Detta menar också Nagy (2017, s. 51) som beskriver att studier kring bråk pekar på att undervisningen måste utgå från elevers informella kunskaper. Lärare 3 lyfter även ett exempel där eleverna ska lösa operationen  $\frac{100}{0,5}$ . Få kan lösa den, men om hen i stället ger dem en visuell bild av ett 100 meter långt rep som ska delas i halvmetersbitar så kan de flesta lösa den. Lärarens exempel kan tolkas som att många elever saknar förmågan att själva applicera operationen på ett eget exempel. Därför behöver de få många exempel från läraren, som de sedan kan använda själva när de möter andra uppgifter. Lärarna beskriver också vikten av att rita. Dels rita på tavlan, dels att lära eleverna att rita som metod. Rita på tavlan kan vara ett sätt att ge eleverna en tydligare begreppslig förståelse. Det som lärare 1 beskriver kring att rita som metod, kan ses som ett sätt att få eleverna att kunna se och skapa egna visuella representationer av tal på samma sätt som i exemplet med repet. Sveider (2021, s. 200–201) menar att när lärare använder olika representationer i undervisningen, kopplas dessa samma på olika sätt. När då flera representationer kopplas samman så skapas ett representationssystem, med vilka de kan erfara ett lärandeobjekt.

## Diskussion

I detta avsnitt presenteras den här studiens diskussion i form av en metoddiskussion och en resultatdiskussion utifrån studiens syfte och frågeställningar. Därefter följer förslag på vidare forskning.

### Metoddiskussion

#### *Val av metod*

Val av metod föll på semistrukturerade intervjuer för att få lärarna att beskriva svårigheter och undervisning på ett obehindrat sätt, där de inte ger svar som förväntas av dem. Därför blev formen med semistrukturerad intervju mer som ett samtal mellan oss. Med hjälp av följdfrågor är det lätt att få informanten att beskriva mer detaljerat kring något som anses vara intressant för studien.

## *Elevtester*

För att samtalen med lärarna inte skulle hamna i att diskutera yttre faktorer som egentligen inte berör de matematikdidaktiska aspekterna valde jag att ha elevtester att utgå från under intervjuerna. Jag valde att ha de fem subgrupperna av bråk (Sveider, 2021, s. 19–27; Reeder & Utley, 2017, s. 308) som teoretisk utgångspunkt när jag utformade testen. Detta då forskningen belyser att det finns ett tydligt fokus på del-helhet, vilket gör att de andra subgrupperna ganska ofta blir förbisedda i undervisningen. Tanken var från början att jag skulle ta alla uppgifter från *Diamantdiagnoserna*, men det var inte möjligt då alla subgrupper inte var representerade i det testet. Detta då de bygger på en annan indelning av bråkbegreppet. I den indelningen kan bråk beskrivas som *ett tal, del av helhet, del av antal, andel, proportion, förhållande och skala* (Löwing, 2016, s. 83). Uppgift 4, 5 och 9 fick jag då i stället skapa själv utifrån Sveders (2016, s. 22–25) definitioner av de subgrupperna. En fråga som jag ställde mig är huruvida uppgifterna faktiskt testade den förmåga som det var tänkt. Hur ska jag veta om det är så att en elev inte behärskar en förmåga, eller om det är utformningen av uppgiften som gör att eleven inte kan lösa den? Ett exempel på detta var att efter pilottestet gjorde jag små justeringar på uppgift 10 och 11, då jag misstänkte att det var själva utformningen av uppgiften som gjorde att inte fler elever i den gruppen löste den korrekt. Justeringen jag gjorde, var att färglägga värdena på tallinjen och skriva till en uppmaning om att de skulle titta på dessa värden. Detta då jag misstänkte att många missade att det var olika värden på uppgift 10 och uppgift 11 på grund av att man inte tittade så noga. En annan fråga man kan ställa sig är om svårighetsgraden på testet var på en rimlig nivå för elever i årskurs 6. Vissa av uppgifterna kan anses vara ganska svåra för eleverna men i samtal med min handledare bestämde vi att det måste få vara så. Uppgift 5 är svår, då den förutsätter att eleverna kan förlänga bråk till minsta gemensamma nämnare. Även uppgift 8e är svår, då eleverna inte kan tillämpa procedurer som de lärt sig utifrån läromedel i årskurs 4–6. Det är inte meningen att alla elever ska klara alla uppgifter, för då fyller de ingen funktion. Löwing (2016, s. 70) beskriver att det är inte bara de svagaste elevernas kunskaper som ska mätas i en diagnos, utan även de starkaste.

Elevtesterna fick sedan fyra klasser genomföra. Den första pilotgruppen och sedan de andra två medverkande lärarnas klasser, varav den ena läraren hade två parallellklasser. Läraren fick då välja om båda klasser skulle genomföra testet. Genomförandet i fyra olika grupper gav en hel del arbete kring rättning, sammanställning och inte minst insamlandet av samtyckesformulär från elever. Jag anser dock att det finns ett stort värde i det. Huvudsyftet var att det skulle vara mer intressant för lärarna som medverkade i studien. En annan aspekt var att när lärarnas egna klasser fick genomföra testet kunde det väcka tankar hos läraren som var intressanta för mina frågeställningar. Både den frågeställning som rör elevers svårigheter och den som handlar om lärarens undervisning. Jag lade mycket tid på att skapa och genomföra testen, men det kändes ändå som att det var värt för att komma åt det didaktiska i intervjuerna. Det var viktigt att samtalet hamnade kring just eleverna och undervisningen och inte andra yttre faktorer, eller för allmänna diskussioner som må vara didaktiska, men mer allmändidaktiska inom matematik. När lärarna endast fick svara på frågor om elevers förståelse blir svaren få och något vaga. När vi däremot diskuterade kring uppgifterna i elevtestet kunde lärarna beskriva mer i detalj vad svårigheterna faktiskt var. Därför tror jag testet var helt avgörande för att få fram resultatet i studien.



## *Intervjuer*

Jag förstod innan, att det var nödvändigt att ha intervjuerna på plats. Dels blir samtalet mer naturligt än om man exempelvis skulle genomföra det över Zoom eller Teams. Då de semistrukturerade intervjuerna var utformade som samtal, så skulle det varit viss kommunikation som ansiktsuttryck och kroppsspråk som går förlorade då. Dels så skulle det även blivit svårt att diskutera kring elevtestet, när man inte sitter vid ett bord och kan peka och visa vad beskriver. Stukát (2011) menar att intervjun ska ske i en så ostörd miljö som möjligt och kännas trygg för både informanten och den som intervjuar. Därför är fätintervjuer vanligast och kan äga rum hemma hos informanten eller på arbetsplatsen (Stukát, 2011, s. 45). Jag valde även att spela in intervjuerna, då jag annars inte hade haft möjlighet att vara deltagande i samtalet med läraren. Det hade inte heller varit möjligt att titta på lärarnas uttalanden i detalj i efterhand. Utifrån tidigare forskning kunde jag misstänka att lärarna inte skulle vara vana vid indelningen av bråkbegreppet i de fem subgrupperna som Sveider (2021, s. 19–27) och Reeder & Utley (2017, s. 308) beskriver. Därför valde jag att visa lärarna definitionen av de fem aspekterna. Detta för att de skulle få en förståelse för hur testet var konstruerat, och även eventuellt kunna särskilja dem när vi diskuterade elevers svårigheter. Det är viktigt att inte använda ord och uttryck som informanten inte är förtrolig med och om det finns ett behov så ska man börja med att förklara vad det betyder (Larsen, 2018, s. 142). En sak som jag upptäckte under den första intervjun, var att de elevexempel som jag valt ut inte gav så mycket kring elevers förståelse. I diskussionen kring uppgifterna i sig, kunde läraren beskriva mer. Därför valde jag att bara använda ett eller två exempel på de andra två intervjuerna.

Inledningsvis så fanns några lärare tilltänka som deltagare i studien, men några kunde inte medverka av olika anledningar. Tanken var även att medverkande lärare alla skulle ha en längre arbetslivserfarenhet för att resultatet skulle bli så rikt som möjligt. Av de medverkande lärarna var det två med en lång erfarenhet och en med bara några års erfarenhet. Även om det fanns mycket data att gå på från alla intervjuer, så märks det att en kvalitativ studie som den här, med få informanter kräver att de medverkande har reflekterat över didaktiska frågor i sin undervisning många gånger. Om alla de medverkande lärarna hade haft en kort erfarenhet, så hade nog inte resultatet blivit desamma som i denna studie. En reflektion som jag gjorde när jag sammanställde resultaten, var att i princip inget av det lärarna sagt handlade om differentiering. Jag hade inga frågor med i intervjun som berörde det heller, men det hade vart intressant för resultatet. Då utgångspunkten var att alla intervjuer skulle äga rum på plats, gjorde att jag var delvis geografiskt begränsad. Något som tog väldigt mycket tid med min datainsamling, då det var problematiskt att få elever från lärarnas klasser att återlämna samtyckesblanketter. Jag är tacksam mot de medverkande lärarna för att de påmint och lämnat ut nya blanketter till sina elever. Utifrån vad som sagts innan och utifrån min erfarenhet som klasslärare, visste jag att det kunde bli problematiskt att få tillbaka samtyckesblanketter från elever. Ett val jag därför gjorde tidigt, var att bara en av elevens vårdnadshavare behövde signera blanketten. Detta då många elever bor hos olika förälder olika veckor. Då ingen personlig information alls om eleverna skulle vara med i rapporten, bestämde jag i samråd med min handledare att det var rimligt.

När intervjuerna transkriberades, rensades vissa småord bort. Dock försökte jag att behålla så mycket som möjligt, för att inte förändra tonen lärarna beskriver något med. Då intervjuerna blev 50–60 minuter långa och fördes som samtal, blev det långa transkriberingar. Då jag letade efter teman i det som lärarna beskrivit, betydde det många läsningar av transkripten. Genom att färgkoda och sedan samla alla uttalanden på ett tema under samma rubrik, var det lätt att sedan gå tillbaka till transkripten om de gett motsägande uttalanden under intervjun. I en av intervjuerna fanns ett sådant uttalande där det inte gick att se var läraren stod och då fick jag komplettera det svaret via telefon. Något som jag märkte under analysen var att även om intervjuerna var ganska uttömmande sett till de frågor jag hade i min intervjuguide, var att ännu fler följdfrågor skulle förtydliga vissa påståenden. Detta hade dock gjort att intervjuerna skulle blivit väldigt långa. En begränsning i en studie som den här, är att tidsbegränsningen gör att underlaget är svårt att beskriva som generaliserbart. Därav säger exempelvis elevernas resultat på elevtestet inte så mycket om hur det ser ut på en nationell nivå. Jämför man med den studie som Löwing (2016) genomförde, så blir den långt mer omfattande.

## Resultatdiskussion

Mycket av det som framkommer i studiens resultat beskrivs också i den tidigare forskningen. I det här avsnittet kommer resultatet diskuteras i relation till den tidigare forskningen och studien frågeställningar.

Lärarna beskriver olika svårigheter som de upplever är vanliga bland elever. När jag frågade vad de såg att eleverna hade för svårigheter, utan att vi tittade på någon uppgift så svarade två av dem del av antal. När vi sedan utgick från testen som eleverna genomfört, beskrev de i stället att de trodde att de flesta eleverna löst uppgifterna som berörde del av antal. Jag tror att lärarnas utgångspunkt handlar om att just del- helhet som subgrupp är överrepresenterad i undervisningen, så som den tidigare forskningen beskriver (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 306–309; Liu et al., 2012, s. 59; Sveider, 2021, s. 19). Löwing (2016, s. 83) beskriver att elever behöver behärska grundläggande begrepp som täljare och nämnare. Många studier pekar på att brister i förståelsen för dessa begrepp är vanliga (Nagy, 2017, s. 112; Löwing, 2016, s. 86–87; Liu et al., 2012, s. 49). Resultatet i studien pekar på samma sak som den tidigare forskningen, och speciellt på brister i förståelsen för nämnarens betydelse. Det som då lärarna beskriver är viktigt, är att diskutera bråk i helklass och i mindre grupper och även att få arbeta laborativt. Rita för och med eleverna är också en viktig aspekt. Diskutera, prova och rita är viktigt för att eleverna ska få möta många olika representationer för att på så vis få en begreppslig förståelse.

Utifrån resultatet går det att se att en stor del av undervisningen bygger på det läromedel man använder, vilket i sin tur fokuserar på att utveckla elevernas procedurförmåga. Nagy (2017, s. 51) menar att läromedel har en press på sig, att utformas så att eleverna kan arbeta självständigt utan lärarens stöd. Eleverna löser uppgifter genom att titta på bokens exempel och kopiera det. Liu et al. (2012) menar att undervisningen inte ska byggas på i huvudsak procedurer. I de studier som Gabriel et al. (2012) och Rittle-Johnson och Alibali (1999) genomförde, kunde de även se

att det inte är lika gynnsamt för eleverna att fokusera på procedurer som att fokusera på deras begreppsliga förståelse. I centrala innehållet för matematik, årskurs 4–6 beskrivs heller inte att eleverna ska få utveckla en begreppslig förståelse för bråkbegreppet utöver att de ska kunna använda bråk i vardagliga situationer (Skolverket 2022a, s. 56–57). I kommentarmaterialet beskrivs bara att undervisningen ska behandla egenskaper hos rationella tal i bråkform, så som täljarens och nämnarens betydelse (Skolverket, 2022b, s. 11–13). Därmed behöver man frångå läromedlet mer i undervisningen för att eleverna ska få utveckla en begreppslig förståelse. Resultatet i den här studien visar att detta görs till viss del, men att man samtidigt upplever en stress över att innehållet i läromedlet är något man bör hinna med. Nagy (2017) menar att forskningen pekar på att undervisningen behöver utgå från elevers informella kunskaper då de lär sig bråk genom att omorganisera tidigare kunskaper. Det leder till att barn använder egna strategier och algoritmer för att göra beräkningar med bråk, vilka ibland kan vara ineffektiva. Därför behöver eleverna få en grundläggande begreppslig förståelse (Nagy, 2017, s. 51). Om då undervisningen har ett fokus på procedurer i stället för begreppslig förståelse, som resultatet i den här studien visar, så skulle det kunna leda till att dessa missförstånd följer med eleverna längre upp i åldrarna. I den studie Reeder och Utley (2017, s. 314–315) genomförde, kunde de se att även lärarstudenter på sitt sista år visade på egna missuppfattningar när de ombads resonera om bråk. Det finns alltså en risk med att eleverna endast lär sig en metod, även om man som lärare upplever att eleverna fann den enkel att memorera och möjlig att tillämpa på liknande uppgifter.

Del- helhet är överrepresenterad i undervisningen och det speglas även i läromedel och i kursplanerna för matematikämnet Charalambous & Pitta-Pantazi (2007, 314). Det visar även resultatet i den här studien. Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) och Liu et al. (2012, s. 59) menar att om elevernas förståelse för bråkbegreppet ska utvecklas, så måste undervisningen även fokusera på de andra subgrupperna av bråk och inte bara på del- helhet. En förståelse för bråkbegreppet är även viktigt för elevernas taluppfattning. Teoh et al. (2020) beskriver att taluppfattning och kunskaper om bråk är integrerade delar av varandra. För utveckling av förståelse för bråkbegreppet är taluppfattningen nödvändig och förståelse för bråkbegreppet är i sig en del av taluppfattningen. Just det att förståelsen för bråkbegreppet vidgar taluppfattningen hos elever, gör att undervisning som har ett tydligt fokus på förståelsen blir gynnsam. Lärarna i min studie beskriver även olika former av konkretiserande aktiviteter och material, men utifrån resultatet är det svårt att se i vilken omfattning det används och tillämpas. De beskriver även hur viktigt det är att hjälpa elever med att skapa inre bilder, genom att rita och lyfta många elevnära exempel. Jag tror att mycket av det som lärarna gör, är sådant som de gör utan att reflektera så mycket över det. Detta gäller särskilt lärare med lång erfarenhet, som vet att när de arbetar med något som eleverna brukar ha svårt för så måste de konkretisera för att eleverna ska få en begreppslig förståelse. När lärarna beskriver att de jobbar praktiskt och konkret, så speglas det av ett tydligt fokus på subgruppen del- helhet. Man arbetar praktiskt med den subgrupp som man beskriver att eleverna visar störst förståelse i. Detta trots att en stor del av intervjuerna var baserade på elevtestet som berörde de fem subgrupperna av bråk. Precis som Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) och Liu et al. (2012, s. 59) menar, så tror jag att detta fokus på del- helhet bidrar till att elevernas begreppsliga förståelse inte utvecklas på samma sätt som om man arbetat konkretiserande med mer innehåll från de andra subgrupperna.

Även erfarna lärare som undervisat under en längre tid och haft bättre och sämre läromedel blir lätt bundna till läromedlet, vilket i sin tur fokuserar på att lära ut procedurer. Då blir det extra viktigt att kanske tänka att läromedel kan bistå med en del till undervisning om bråk, men behöver tydligt kompletteras med undervisning som syftar att utveckla den begreppsliga förståelsen. Jag tror att det är viktigt att analysera sin undervisning. Man kanske måste vara extra aktiv i upplägget för bråk som delområde i matematikundervisningen. Helt enkelt välja att stanna upp mer, och då kanske även välja bort vissa delar som inte är lika relevant utifrån det centrala innehållet, eller när man vet vad eleverna redan kan då välja att inte lägga mer tid på sådant. Utifrån att lärarna beskriver att det går fort fram och att det är mycket som man ska hinna med i kursen, så tror jag att det är just tidsaspekten som styr mycket. Nagy (2017, s. 51) beskriver att för att stärka elevernas begreppsliga förståelse bör man arbeta med kognitivt utmanande problemlösningssuppgifter, där det centrala är kvaliteten på helklassdiskussionerna kring elevernas lösningar. Detta står då i relation till att hinna med alla avsnitt i boken. Värdet i den här studien ligger i att den belyser en viss kontradiktion mellan hur lärare beskriver elevers förståelse för bråkbegreppet och hur man beskriver sin undervisning. Det finns en medvetenhet om vad elever har svårt för och anledningen till det. Man beskriver att elever saknar förståelse för bråkbegreppet, men samtidigt bygger en stor del av undervisningen på att utveckla en procedurförmåga och fokuserar framför allt på subgruppen del- helhet.

## Vidare forskning

Den här studien har fokuserat på elevers förståelse för bråkbegreppet och hur lärare beskriver sin undervisning. Mycket av det som lärarna beskriver både kring elevernas förståelse och undervisningen stämmer väl överens med vad tidigare forskning pekar på. Då det saknas mycket forskning gällande lärares undervisningsstrategier så tror jag att det vore intressant för vidare forskning. Min studie hade bara tre medverkande lärare och jag märkte att det är svårt för dem att beskriva undervisning som verkligen gynnar eleverna. En studie med fler lärare och ett tydligt fokus på just undervisningsstrategier, där resultatet blir som en bank av goda idéer vore därför väldigt intressant att ta del av.

## Referenslista

Anderberg, B. (1992). *Matematikmetodik i grundskolan*. Stockholm: Bengt Anderberg läromedel.

Billstein, R., Libeskind, S., W.Lott, J. (2015) *A problemsolving approach to mathematics*. Boston: Pearson

Braun & Clarke (2006) Using thematic analysis in psychology, *Qualitative Research in Psychology*, 3:2, 77–101

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Stockholm: Liber

Charalambous, Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316.

Fejes, A. & Thornberg, R. (red.) (2019). *Handbok i kvalitativ analys*. Stockholm: Liber AB

Gabriel, F. C., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2012). Developing children's understanding of fractions: An intervention study. *Mind, Brain, and Education*, 6(3), 137–146.

Kihlström, S. (2007). Intervju som redskap. I J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket – vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik*. (1 uppl., s. 47–69). Liber.

Kilborn, W. (2014). *Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd*. Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM: Göteborgs Universitet.

Larsen, A. K. (2018). *Metod helt enkelt. En introduktion till samhällsvetenskaplig metod*. (2 uppl.). Gleerups.

Liu, C., Xin, Z., & Li, X. (2012). The development of Chinese students' understanding of the concept of fractions from fifth to eighth grade. *Journal of Mathematics Education*, 5(1), 45–62.

Löwing, M. (2016). *Diamant – diagnoser i matematik. Ett kartläggningmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys*. Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2010). *Förstå och använda tal – en handbok*. Nationellt Centrum för matematikutbildning, NCM: Göteborgs Universitet.

Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisningen. En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression*. Diss, Göteborgs universitet.

Nationalencyklopedin (u.å). Bråk. Hämtad 29 november 2022 från <http://www-ne-se.www.bibproxy.du.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/bråk>

Reeder, S., & Utley, J. (2017). What Is a Fraction? Developing Fraction Understanding in Prospective Elementary Teachers. *School Science and Mathematics*, 307–316.

Reys, R., Reys, B., m.fl. (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnamn nr 2*. Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM: Göteborgs Universitet.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 175–189.

Skolverket, (2013). *Diamant – Nationella diagnoser i matematik, Rationella tal. R.* Stockholm: Skolverket Hämtad 2022-11-07:

Skolverket, (2021). *Taluppfattning och tals användning.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket, (2022a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2022.* Stockholm: Skolverket

Skolverket, (2022b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.* Stockholm: Skolverket.

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* (2 uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform. En studie om matematikundervisning på mellanstadiet.* Diss, Linköpings universitet.

Teoh, S. H., Mohamed, S. S. E., Parmjit, S., & Kor, L. K. (2020). In search of strategies used by primary school pupils for developing fraction sense. *Malaysian Journal of Learning and Instruction, 17*(2), 25–61.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties. *Educational Studies in Mathematics, 39*–56.

Unenge, J., Sandahl, A., Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wilkins Jesse L M; Woodward, David; Anderson, Norton. *Mathematics Education Research Journal; Dordrecht Vol. 33, Iss. 3, (Sep 2021): 513–540.*

# Bilaga A

## Bråktest

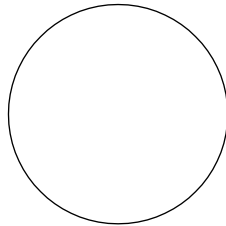
Namn: \_\_\_\_\_

1. Skugga en fjärdedel av dessa figurer.

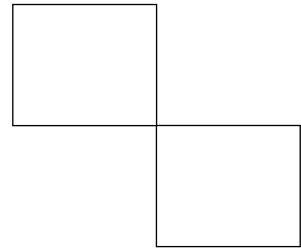
a)



b)

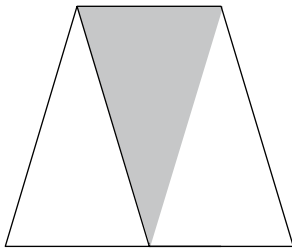


c)

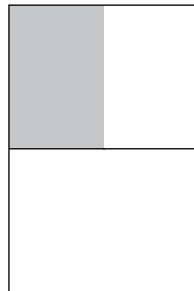


2. Ringa in alla figurer där  $\frac{1}{3}$  är skuggad?

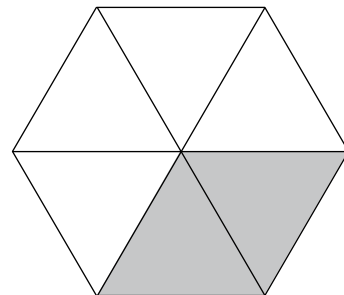
a)



b)



c)



3. Hur mycket är

d) hälften av 12? \_\_\_\_\_

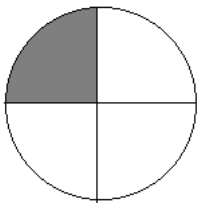
b) en tredjedel av 6? \_\_\_\_\_

c) en femtedel av 10? \_\_\_\_\_

d) en fjärdedel av 8? \_\_\_\_\_

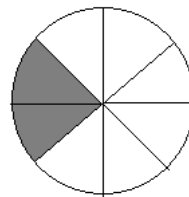
4. a) Beskriv cirkel A och B som bråk.

A



\_\_\_\_\_

B



\_\_\_\_\_

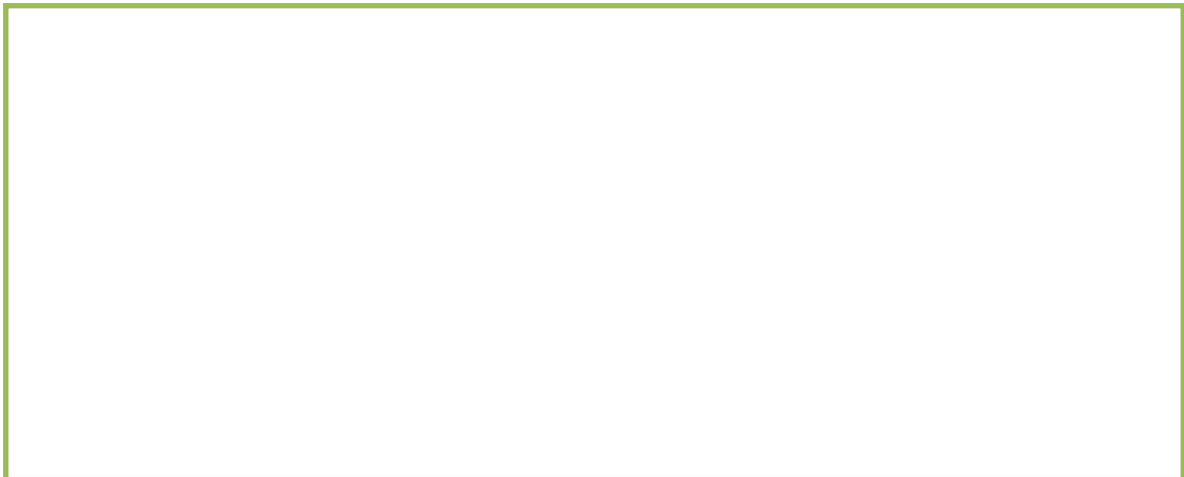
b) Vilket av bråken är störst? \_\_\_\_\_

5. Vilket av bråken  $\frac{2}{5}$  och  $\frac{3}{8}$  är störst? (Beskriv eller rita gärna hur du tänker).

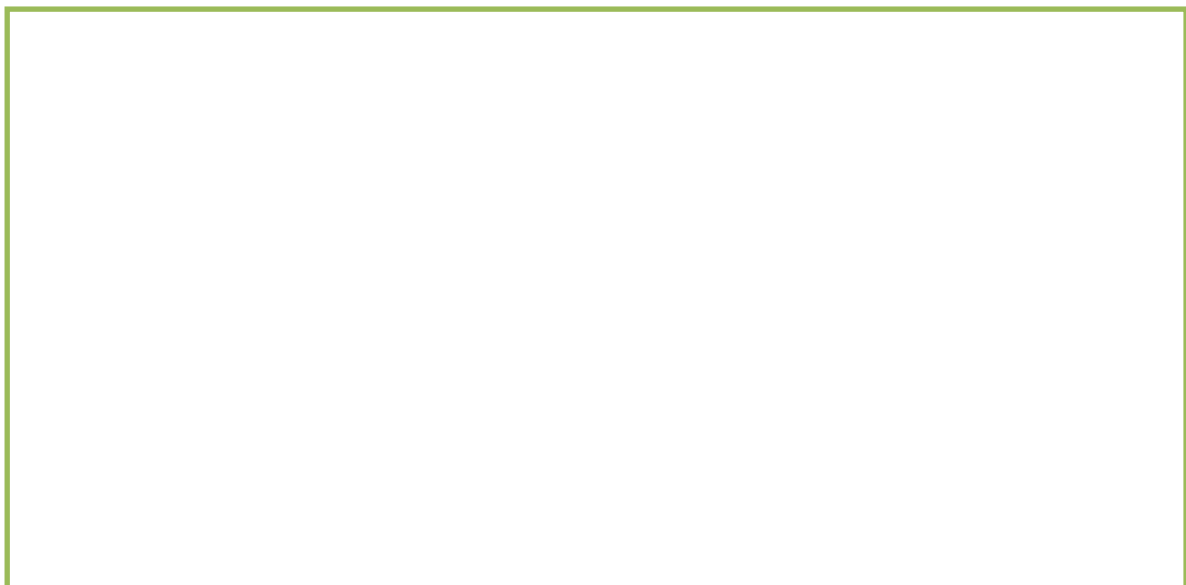


6. När man blandar saft ska man ta 4 dl vatten till 1 dl koncentrerad saft.

a) Hur mycket koncentrerad saft ska man ta till 8 dl vatten?



b) Hur mycket vatten ska man ta om man vill ha 2 liter färdigblandad saft?





7. Beräkna

a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} =$

b)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$

c)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

d)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$

e)  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

8. Beräkna

a)  $1 - \frac{3}{4} =$

b)  $6 \cdot \frac{1}{2} =$

c)  $3 \cdot \frac{3}{5} =$

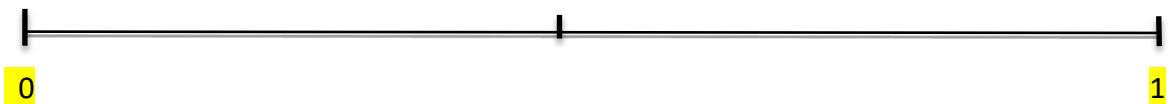
d)  $\frac{6}{5} / 3 =$

e)  $2 / \frac{1}{3} =$

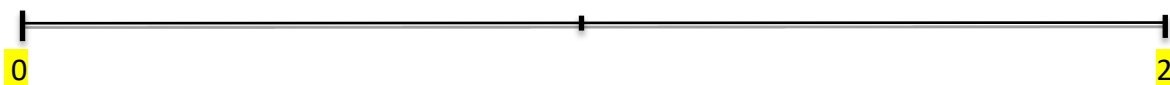
9 a) Anna, Olle och Egon ska dela lika på en kanna med saft. Hur mycket får varje person?

9 b) Anna, Olle och Egon ska även dela lika på två pizzor. Hur mycket får varje person? (Visa med flera lösningar. 1 poäng för varje lösning)

10. Placera ut bråken  $\frac{1}{3}$  och  $\frac{3}{4}$  på tallinjen.



11. Placera ut bråken  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{4}{5}$  på tallinjen. (Titta noga på värdena på tallinjen)



## Bilaga B

### Intervjuguide

Introfrågor:

*Hur länge har du undervisat i matematik?*

*Vilka årskurser undervisar du i matematik?*

*Vilket läromedel använder ni?*

*Vad tycker du om avsnittet som behandlar bråk jämfört med andra läromedel?*

Frågor:

1. Hur skulle du beskriva elevers generella kunskaper om bråk? (Löwing, 2016)

2. Är det någon aspekt av bråk som du upplever att eleverna har lättare eller svårare att förstå? (Wilkins et al. 2021)

-Vad tror du detta beror på?

3. Hur arbetar du med bråk i årskurserna 4-6? (Nagy, 2017)

-Skiljer undervisningen sig åt i åk 4 jämför med åk 6?

4. När ska man börja undervisa om bråk? Ålder? (Nagy, 2017)

-Börjar man för sent?

**Gå igenom de olika frågorna på testen och diskutera vad läraren upplever är svårt respektive lättare för eleverna. Exempel på elevsvar.**

-Vad är lätt respektive svårt? (För alla/några) (Sveider, 2021)

-Vad beror det på?

-Hur bygger man undervisningen för att främja lärande?

5. Vad upplever du som svårast med att undervisa om bråk? Vad är svårast att göra begripligt för eleverna? (Löwing, 2016)

6. Hur tänker du kring begrepp inom bråkundervisning? (Nagy, 2017)

7. Hur stor roll spelar det om elever är generellt starka i matte för bråkförståelsen? (Wilkins et al. 2021)

-Är det lika avgörande i de olika aspekterna av bråk?

-Vilken uppgift tycker du testar detta?

(De frågor som inte är numrerade är förslag på eventuella följdfrågor)

Tanken är att efter introfrågor, ställa några frågor för att läraren ska börja fundera och resonera kring vad som är svårt/lätt för elever och hur man bygger sin undervisning (fråga 1–4). Sedan gå in på elevtesterna där de får gå in djupare på elevernas förståelse och eventuellt komma med fler exempel på hur undervisningen kan se ut. Efter detta några avslutande frågor (5–7). Skulle de pratat mycket om en fråga under delen med testet kan den frågan strykas då den blir umbärlig.



HÖGSKOLAN  
DALARNA

## Bilaga C

### Information angående en studie som undersöker elevers förståelse av bråkbegreppet.

Härmed tillfrågas du om deltagande i denna undersökning.

Studien genomförs i form av ett examensarbete där syftet är att undersöka hur undervisning kring bråk ser ut och elevers förståelse av bråkbegreppet. Tidigare forskning på området belyser hur förståelsen för bråk hos elever är generellt låg och det beskrivs som komplext att undervisa om. Därför är det intressant att studera hur elevers förståelse för bråkbegreppet ser ut i årskurserna 4–6, och även vilka svårigheter och möjligheter som lärare beskriver gällande undervisningen. Materialet för studien kommer att utgöras av ett test som en elevgrupp genomför och av intervjuer med lärare som bygger delvis på utvalda elevlösningar.

Testet som elevgruppen genomför kommer då att genomföras i god tid innan intervjuerna och administreras av berörd lärare. Testerna kommer att bygga på uppgifter från det material som kallas *diamantdiagnoser*, vilket är ett material som Skolverket ger ut. Förväntad tidsåtgång till testerna bör vara ungefär 30–40 minuter. Testerna kan då genomföras inom ramen för ordinarie matematikundervisning. Intervjuer kommer sedan att genomföras vid tillfällena som jag och läraren kommit överens om. Tidsåtgången för intervjuerna förväntas vara ungefär 45 min. Ljudinspelning kommer att ske under intervjun.

Allt material som samlas in från tester med elever och från intervjuer med lärare kommer att anonymiseras. Inga namn på lärare, elever eller skolor kommer att nämnas i studien. Ett fåtal personer kommer att ha tillgång till materialet under arbetets gång, vilka förutom jag är min handledare och examinator från högskolan Dalarna.

Ditt deltagande i undersökningen är helt frivilligt. Du kan när som helst avbryta ditt deltagande utan närmare motivering.

Undersökningen kommer att presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna.

Högskolan Dalarna är ansvarig för behandlingen av personuppgifter i samband med examensarbetet. Som deltagare i undersökningen har du enligt Dataskyddsförordningen (GDPR) rätt att få information om hur dina personuppgifter kommer behandlas. Du har också rätt att ansöka om ett så kallat registerutdrag, samt att få eventuella fel rättade. Vid frågor om behandlingen av personuppgifter kan du vända dig till Högskolans dataskyddsombud.

Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga.

Ort och datum: Gagnef 2023-02-28

*Student*

Oscar Alfredsson

[h18oscal@du.se](mailto:h18oscal@du.se)

*Handledare*

Helena Eriksson

[hei@du.se](mailto:hei@du.se)

## Samtyckesformulär

Samtycke till att delta i studien

Jag har fått muntlig och skriftlig informationen om studien och har haft möjlighet att ställa frågor. Jag får behålla den skriftliga informationen.

- Jag samtycker till att:
- delta i studien om “Att förstå bråk – En kvalitativ studie om bråkundervisning och elevers förståelse av bråk”
  - att uppgifter om mig behandlas på det sätt som beskrivs i informationsbrevet
  - inga personuppgifter samlas in förutom ditt namn på testet som du genomför
  - de insamlade uppgifterna kommer att bevaras till dess att uppsatsen är examinerad och godkänd, dock högst tre år räknat från att datainsamlingen påbörjats

Ort och datum	Underskrift

### Ansvarig för studien

Ort och datum: \_\_\_\_\_

Namnteckning: \_\_\_\_\_

*Oscar Alfredsson*



HÖGSKOLAN  
DALARNA

## Bilaga D

### **Information angående en studie som undersöker elevers förståelse av bråkbegreppet.**

#### **Härmed tillfrågas du om deltagande i denna undersökning.**

Studien genomförs i form av ett examensarbete där syftet är att undersöka hur undervisning kring bråk ser ut och elevers förståelse av bråkbegreppet. Tidigare forskning på området belyser hur bråk är ett svårt område inom matematiken och hur det beskrivs som svårt att undervisa om. Därför är det intressant att studera hur elevers förståelse för bråkbegreppet ser ut i årskurserna 4–6, och även vilka svårigheter och möjligheter som lärare beskriver gällande undervisningen. Materialet för studien kommer att utgöras av ett test som en elevgrupp genomför och av intervjuer med lärare som bygger delvis på utvalda elevlösningar.

Testerna kommer att bygga på uppgifter från det material som kallas *diamantdiagnoser*, vilket är ett material som Skolverket ger ut. De kommer att genomföras på en matematiklektion och förväntas ta ca 30–40 minuter. Testerna kommer sedan att användas som material i en intervju med din lärare.

Allt material som samlas in från tester med elever och från intervjuer med lärare kommer att anonymiseras. Inga namn på lärare, elever eller skolor kommer att nämnas i studien. Ett fåtal personer kommer att ha tillgång till materialet under arbetets gång, vilka förutom jag är min handledare och examinator från högskolan Dalarna.

Ditt deltagande i undersökningen är helt frivilligt. Du kan när som helst avbryta ditt deltagande utan närmare motivering.

Undersökningen kommer att presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna.

Högskolan Dalarna är ansvarig för behandlingen av personuppgifter i samband med examensarbetet. Som deltagare i undersökningen har du enligt Dataskyddsförordningen (GDPR) rätt att få information om hur dina personuppgifter kommer behandlas. Du har också rätt att ansöka om ett så kallat registerutdrag, samt att få eventuella fel rättade. Vid frågor om behandlingen av personuppgifter kan du vända dig till Högskolans dataskyddsombud.

Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga.

Ort och datum: Gagnef 2023-02-28

*Student*

Oscar Alfredsson

[h18oscal@du.se](mailto:h18oscal@du.se)

*Handledare*

Helena Eriksson

[hei@du.se](mailto:hei@du.se)

## Samtyckesformulär

Samtycke till att delta i studien

Jag har fått muntlig och skriftlig informationen om studien och har haft möjlighet att ställa frågor. Jag får behålla den skriftliga informationen.

- Jag samtycker till att:
- delta i studien om “Att förstå bråk – En kvalitativ studie om bråkundervisning och elevers förståelse av bråk”
  - att uppgifter om mig behandlas på det sätt som beskrivs i informationsbrevet
  - inga personuppgifter samlas in förutom ditt namn på testet du genomför
  - de insamlade uppgifterna kommer att bevaras till dess att uppsatsen är examinerad och godkänd, dock högst tre år räknat från att datainsamlingen påbörjats

Ort och datum	Underskrift vårdnadshavare

Ort och datum	Underskrift elev

### Ansvarig för studien

Ort och datum: \_\_\_\_\_

Namnteckning: \_\_\_\_\_

*Oscar Alfredsson*