HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete (del 2)
för grundlärarexamen inriktning F–3

Avancerad nivå

Undervisning om likhetstecknet för att gynna algebraisk förståelse

En kvalitativ studie om lärares perspektiv på undervisningen om likhetstecknet för att bidra till algebraisk förståelse

Författare: Lina Hägg
Handledare: Helén Sterner
Examinator: Jan Olsson
Ämne: Pedagogiskt arbete, inriktning matematik
Kurskod: APG246
Poäng: 15 hp
Examinationsdatum: 2023-11-05

Abstract:

Enligt tidigare forskning är förståelsen av likhetstecknet ett kritiskt studieobjekt. Det finns två typer av förståelse av likhetstecknet där den relationella förståelsen i tidig ålder är av stor vikt för att senare utveckla ett algebraiskt tänkande. Undervisningen om likhetstecknet anses även den problematisk och innefattar många olika aspekter. Syftet med denna studie är därför att få ökad kunskap om hur lärare i lågstadiet beskriver sin undervisning om likhetstecknet. Därigenom synliggöra huruvida den bidrar till elevers relationella förståelse och algebraiskt tänkande i högre årskurser. För att besvara syftet har kvalitativ insamlingsmetod i form av sex individuella intervjuer med verksamma lärare i lågstadiet använts. Det insamlade materialet har transkriberats och analyserats deduktivt med hjälp av utvalda delar ut ett teoretiskt ramverk om algebrans stora idéer, utvecklat av Blanton med flera (2015). Resultatet har främst visat på svårigheter gällande icke formella räkneuppgifter och överföringen av relationell förståelse från praktiskt till abstrakt arbete samt lärarnas meningsskiljaktigheter kring vissa arbetsområdens existens i arbetet med likhetstecknet. Resultatet har sedan diskuterats i relation till studiens tidigare forskning och det teoretiska ramverket. Studien har utmynnat i slutsatser att flera lärare i stor utsträckning använder sig av de undervisningsmetoder och innehåll som stärks av den tidigare forskningen och det teoretiska ramverket. Trots detta upplever lärarna att svårigheter ändå finns kopplat till elevers förmåga att anamma en relationell förståelse av likhetstecknet och att utveckla en algebraisk förståelse.

Nyckelord:

Likhetstecknet, relationell förståelse, algebraisk förståelse, algebra, lågstadiet

Innehållsförteckning

Inledning

Under min verksamhetsförlagda utbildning har jag sett att elever i lågstadiet har god förståelse för räkneuppgifter som har två tal på vänster sida av likhetstecknet som de sedan ska räkna ut och skriva svaret på höger sida (exempelvis 2 + 3 = ?). Det jag också lagt märke till är att många elever har svårt att förstå innebörden av likhetstecknet när räkneuppgifter utformas annorlunda. En sådan uppgift kan till exempel vara om en uträkning ska göras på höger sida och svaret ska stå på vänster sida (exempelvis ? = 3 – 2). Jag har även sett att elever har svårigheter när uppgifterna endast innehåller en term samt summa eller differens och elevens uppgift är att fylla i den andra termen (exempelvis 3 + ? = 5).

Tidigare forskning visar att elevers förståelse av likhetstecknet ofta innefattar en del missförstånd (Milinković, Maričić & Đokić, 2022, s. 27; Kusuma, Ubanti & Usodo, 2018, s. 6). Milinković m.fl. (2022, s. 27) beskriver att elever ofta använder likhetstecknet för att endast räkna ut och slutföra matematiska uträkningar med ett svar i höger led, vilket innebär att en elev har en operationell förståelse av likhetstecknet. Detta i motsats till att ha en relationell förståelse där likhetstecknet handlar om att arbeta med likhet och balans mellan de olika sidorna av likhetstecknet (Milinković m.fl., 2022, s. 27). För att förstå algebra i högre årskurser är det viktigt att elever redan i lågstadiet ser allt som står på en sida av ett likhetstecken som en helhet. Att se det som en helhet innebär att om det exempelvis står 5 + 4 på ena sidan av likhetstecknet ska elever se på detta som 9. För en relationell förståelse behöver eleverna förstå att denna helhet sedan ska ha samma värde som den helhet som finns på andra sidan av likhetstecknet. Om det till exempel skulle stå 5 + 4 = 9 ska detta ses som att 5 och 4 är samma som 9 vilket innebär samma värde för vänster och höger sida av likhetstecknet. Forskning visar nämligen att den relationella förståelsen av likhetstecknet har stor betydelse för det algebraiska tänkandet hos elever (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006, s. 305; Milinković m.fl., 2022, s. 28).

Ämnet matematik ska innehålla undervisning om likhetstecknet och matematiska likheter under lågstadiet, något som framgår tydligt i skolans styrdokument. Där framgår även att när elever i årskurs tre ska bedömas i matematik ställs krav på att de kan använda likhetstecknet på ett fungerande sätt (Skolverket, 2022b, s. 57, 60). Framställningen förmedlar inte vilken typ av förståelse av likhetstecknet som krävs utan det nämns först för mellanstadiets undervisning att kunskapen ska kunna användas i algebraiska sammanhang (Skolverket, 2022b, s. 60). De algebraiska sammanhangen som beskrivs i läroplanen blir relevanta för studien och kan kopplas till den relationella förståelsen eftersom algebra handlar om att jämföra och få en balans mellan det som finns på olika sidor av likhetstecknet (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 11). I läroplanen för lågstadiet beskrivs inte något om relationell förståelse eller hur undervisningen kan utformas för att hjälpa elever att anamma denna förståelse. Det kan därmed bli otydligt hur lärare bör undervisa om likhetstecknet i lågstadiet om de baserar sin undervisning på läroplanen. I Skolverkets kommentarmaterial för matematik betonas dock att undervisningen ska bidra till förståelse för likhetstecknet i relation till algebra (Skolverket, 2022a, s. 15).

Både läroplan och forskning framhäver att relationell förståelse av likhetstecknet är betydelsefull, främst i relation till kommande undervisning och förståelse för algebra. Stephens, Veltri Torres, Sung, Strachota, Murphy Gardiner, Blanton, Stroud och Knuth (2021 s. 8–9) betonar dessutom att elever gynnas av att arbeta mot en relationell förståelse av likhetstecknet redan tidigt i lågstadiet. Enligt Skollagen (SFS 2010:800) 1 kap. 5 § ska undervisningen baseras på vetenskaplig grund och trots att forskning visar att likhetstecknet är ett problematiskt område för många elever saknas tydlig anknytning till detta i kursplanen för lågstadiet. Dessa kontraster gör det därmed intressant att undersöka hur lärare som arbetar på lågstadiet resonerar kring hur de uppfattar elevers förståelse och därefter utformar sin undervisning om likhetstecknet i förhållande till den relationella förståelsen med algebraiskt tänkande i fokus.

Syfte

Syftet med studien är att få ökad kunskap om hur lärare i lågstadiet beskriver sin undervisning om likhetstecknet. Med hjälp av beskrivningarna är syftet att därigenom synliggöra huruvida undervisning om likhetstecknet kan bidra till elevers relationella förståelse och algebraiskt tänkande i högre årskurser. Syftet i studien besvaras med hjälp av följande frågeställning.

Frågeställning

1. Vad framkommer om relationell förståelse och algebraiskt tänkande i undervisning om likhetstecknet på lågstadiet, utifrån lågstadielärares beskrivning av sin undervisning?

Bakgrund

I bakgrunden kommer tidigare forskning för området att presenteras. Relevanta begrepp för studien kommer att förklaras och likaså likhetstecknets framställning i skolans styrdokument. Därefter presenteras vad tidigare forskning säger om operationell och relationell förståelse, undervisningsaspekter för förståelsen av likhetstecknet samt varför likhetstecknet och algebra i de tidiga åldrarna är viktigt.

Centrala begrepp

Under denna rubrik kommer centrala begrepp för studien att beskrivas.

Likhetstecknet

Likhetstecknet definieras enligt Nationalencyklopedin som ett ”matematiskt tecken (=) som markerar att två uttryck har samma värde: i ekvationen 3x+2x--2=12 bör man förenkla uttrycket till vänster om likhetstecknet” (Nationalencyklopedin, uå). Det handlar alltså om att genom uträkningar eller förenklingar se att vänster och höger sida av likhetstecknet har samma värde.

Algebra

Algebra är en gren inom matematiken. I skolan beskrivs algebra tidigt som räkning med bokstäver. Det är alltså andra variabler än enbart tal inblandade men variablerna följer samma räkneregler som tal (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 11). Vidare definieras algebra av Kiselman och Mouwitz (2008, s. 11) som att jämföra de två sidorna av likhetstecknet och arbeta med balansering, vilket är den förståelse för algebra som är av stor relevans för denna studie.

Ekvation

Ekvation innebär ett matematiskt uttryck där minst ett tal är obekant, ofta betecknat med en bokstav (Svenska Akademien, 2021). I uttrycket finns en likhet där lösningen på den okända variabeln består av ett eller flera tal som gör att vänster led har samma värde som höger led (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 94).

Formella och icke formella räkneuppgifter
I undervisning finns olika typer av räkneuppgifter. Uppgifter kan ha formell struktur vilket innebär att en operation ska utföras på vänster sida av likhetstecknet och som resulterar i ett svar på höger sida. Utöver formella finns även icke-formella uppgifter, dessa kan variera i utformning men kan exempelvis innebära att beräkningar krävs på båda sidor om likhetstecknet. Det kan även innebära att en uträkning krävs på höger sida och med ett svar på vänster sida (Blanton, Otalora, Brizuela, Gardiner, Sawrey, Gibbins & Kim, 2018, s.174). Powell (2015, s. 269) beskriver samma fenomen men kallar det för standard- och icke-standarduppgifter. I detta examensarbete kommer begreppen formella och icke-formella uppgifter att användas.

Styrdokument
I det centrala innehållet för matematik beskrivs att elever i årskurs 1–3 ska ges möjlighet att befästa kunskap kring ”matematiska likheter och likhetstecknet betydelse” (Skolverket, 2022b, s. 55). Formuleringen för lågstadiet säger inget om vilken typ av förståelse som undervisningen ska bidra till eller vad kunskapen ska kunna användas till. I kursplanen för matematik för mellanstadiet beskrivs däremot att undervisningen om likhetstecknet ska utveckla elevers förmåga att använda sin kunskap och förståelse i arbete med ekvationer och funktioner (Skolverket, 2022b, s. 57). I slutet av årskurs 3 ska eleven kunna hantera ”enkla matematiska likheter och använder då likhetstecknet på ett fungerande sätt.” (Skolverket, 2022b, s. 60) vilket kan tolkas som att typen av förståelse inte har någon betydelse här heller. I läroplanen uttrycks alltså inget om huruvida matematikundervisningen i lågstadiet bör lägga specifikt fokus på att utveckla elevers relationella förståelse av likhetstecknet eller om lärarna lika gärna kan arbeta mot en operationell förståelse. Frånvaron av specificerad beskrivning av förståelsen i lågstadiet finns alltså trots att det i högre årskurser förutsätts en förståelse som går hand i hand med relationell förståelse där kunskapen ska kunna appliceras på uppgifter med ekvationer och funktioner. I viss kontrast till detta beskriver Skolverket (2022a, s. 15) i kommentarmaterialet för matematik att elever i tidig ålder ska arbeta med likheter och likhetstecknets betydelse för att utveckla algebraisk förståelse och algebraiskt tänkande. I Skollagen (SFS 2010:800) 1 kap. 5 § framgår att utbildningen i skolan ska grunda sig på beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Just den vetenskapliga grunden blir extra relevant för denna studie eftersom det tidiga arbetet med likhetstecknet för att utveckla algebraisk förståelse är något som stärks i forskning, detta kommer att beskrivas i avsnittet för tidigare forskning. För mellanstadiet beskrivs därutöver att förståelsen och kunskapen ska kunna sättas i relation till obekanta tal samt ekvationer vilket innebär ytterligare utökade kunskaper om den relationella förståelsen. Vad gäller bedömning av elevers matematiska kunskaper beskriver Skolverket (2022a, s. 33) att eleverna i slutet av årskurs 3 ska kunna använda likhetstecknet korrekt för att hantera likheter, vilket kan tolkas som att algebraiskt tänkande inte heller står i fokus vid bedömning.

Tidigare forskning
För att ge en bakgrund och förståelse kring denna studies forskningsområde kommer här tidigare forskning inom området att beskrivas. Sammanställningen kommer beröra vad som

framhävs i forskning beträffande operationell och relationell förståelse samt dess betydelse och påverkan, vikten av förståelse för likhetstecknet i relation till algebraisk förståelse samt undervisningsaspekter.

Operationell och relationell förståelse av likhetstecknet

Det finns enligt forskning olika sätt att förstå likhetstecknet på och vilken förståelse en elev besitter kan synliggöras genom att analysera hur de beskriver fenomenet. Knuth m.fl. (2006, s. 301) och Blanton, Stephens, Knuth, Murphy Gardiner, Isler och Kim (2015, s. 62) har i sina studier med hjälp av ett antal räkneuppgifter och frågor tagit reda på hur elever beskriver att de uppfattar likhetstecknet. I resultaten av de båda studierna framgår att om elever beskriver likhetstecknets innebörd som att något är "samma som" är det sett utifrån ett relationellt perspektiv. Relationell förståelse av likhetstecknet kan enligt Blanton m.fl. (2018, s. 181) ta sig i uttryck när elever beskriver att det handlar om balans eller likvärdighet mellan kvantiteter, att det som står på vänster och höger sida av likhetstecknet ska motsvara samma värde. Blanton m.fl. (2015, s. 62) beskriver liknande definitioner och förklarar att elever inom denna förståelse även kan visa förståelse för den kommutativa lagen, det vill säga att ordningen på till exempel termerna i en additionsuppgift inte har någon betydelse. Forskarna ger ett exempel från studien där eleverna fått uppgiften "39 + 121 = 121 + 39" (Blanton m.fl., 2015, s. 62) till sig och ska bestämma om den är sant eller falsk samt hur de kan veta det. De ger då ett exempel på en elev som ser relationerna i uppgiften och uppfattar höger respektive vänster led som helheter. Denna elev har förklarat att det är sant eftersom det är samma termer på de olika sidorna men som endast bytt plats (Blanton m.fl., 2015, s. 62). Utifrån Stephens m.fl. (2021, s. 8–9) som förklarar att relationell förståelse handlar om att betrakta de olika sidorna i matematiska utsagor som helheter går det alltså att definiera exemplet ovan som en elev med relationell förståelse för likhetstecknet. För att tydliggöra förståelsen gällande helheter kan det innebära att i utsagan 5 + 9 = 14 ska 5 + 9 förstås som en helhet som är samma som 14 snarare än att 5 + 9 blir 14. En annan situation där en relationell förståelse blir väldigt viktig i relation till helheter är enligt Blanton m.fl. (2015, s. 58) när uppgifterna har fler än ett tal på båda sidor om likhetstecknet. Till exempel om den nyligen beskrivna uppgiften hade varit 5 + 9 = 7 + 7 där höger sida alltså innehåller mer än ett tal i jämförelse med exemplet ovan där höger led endast innehöll ett tal. Blanton m.fl. (2015, s. 58) menar att sådana uppgifter kan vara problematiska i lägre åldrar men en viktig del för att bidra till det algebraiska tänkandet och något som elever med relationell förståelse har enklare att förstå.

Ett annat sätt som elever beskriver likhetstecknet på i studien av Knuth m.fl. (2006, s. 301) är att det ska "läggas till något" eller att det är "ett svar" på en beräkning, i detta fallen handlar det om ett operationellt perspektiv. Ett annat uttryck som visar på operationell förståelse är att många elever menar att likhetstecknet betyder "svaret på ett problem" (Madej, 2021a, s. 331). Operationell förståelse innebär en förståelse av en matematisk uppgift som att beräkningar av tal på vänstra sidan av likhetstecknet ska besvaras med tal på högra sidan av likhetstecknet (Blanton m.fl., 2018, s. 176; Stephens m.fl., 2021, s. 9). Vidare förklarar forskarna mer specifikt att operationell förståelse kan anses väldigt strikt och enformigt, att det endast får innehålla EN uträkning i vänster led som ska leda till ETT svar i höger led (Blanton m.fl., 2018, s. 182). Detta kan exempelvis vara 6 + 4 = ? där elever utifrån operationell förståelse menar att en beräkning i vänster led (6 + 4) ska göras för att få fram svaret 10 i höger led. I undervisning beskriver Blanton m.fl. (2018, s. 174) att de som tänker operationellt endast förstår matematiska uppgifterna om de är strukturerade på det formella sättet. En uppgift som kräver två beräkningar i vänster led (exempelvis 3 + 5 + 2 = ?) skulle alltså vara för svår för en person med operationell förståelse. Dessa elever får därmed svårigheter när en matematisk uppgift är utformad på ett icke-formellt sätt. Detta kan till exempel vara om uträkningar krävs på båda sidor (exempelvis 6 + ? = 11 – 1) eller om det finns enbart ett tal på vänster sida och beräkning krävs i höger led (exempelvis 3 = 9 – ?) (Blanton m.fl., 2018, s. 174).

Vikten av tidig förståelse för likhetstecknet

Förståelse för likhetstecknet har stor betydelse för i vilken mån elever i högre årskurser förstår och kan hantera algebra. Goda kunskaper i algebra handlar inte om en elevs generella matematikkunskaper. Forskning hävdar nämligen att tydliga kopplingar går att göra mellan god relationell förståelse för likhetstecknet och att klara av bland annat ekvationslösningar (Knuth m.fl., 2006, s. 305, 309; Matthews & Fuchs, 2018, s. e25). Elever som har svårt med relationell förståelse av likhetstecknet i de lägre årskurserna tenderar även att ha svårt för detta senare i livet (Matthews & Fuchs, 2018, s. e24). I en studie som genomförts i USA visar elever på mellan- och högstadiet generellt ganska begränsade kunskaper om likhetstecknet. Forskarna skriver att de aktuella styrdokumenten inte behandlar relevansen av förståelse för likhetstecknet, vilket därmed kan vara en anledning till svaga elevprestationer (Knuth m.fl., 2006, s. 308). Eftersom förståelsen för likhetstecknet är av stor relevans för elevers fortsatta studier utgör läraren en viktig roll i att säkerställa att eleverna tidigt anammar förståelsen för att höja elevprestationerna. Även Matthews och Fuchs (2018, s. e25–e36) förklarar att noggrant arbete med elevers relationella förståelse för likhetstecknet bör ha en framträdande roll i undervisningen. Detta blir viktigt för att ge eleverna möjlighet att utveckla en algebraisk förståelse. Skemp (1978, s. 10) förklarar att elever utan relationell förståelse kan genom imitation av hur de tidigare klarat uppgifter applicera samma metod på en ny uppgift och därmed klara av många uppgifter. Eftersom de dock inte har den djupare förståelsen förklarar Skemp vidare att dessa elever får problem och inte klarar av matematiken när uppgifter eller frågor ställs på varierade sätt (Skemp, 1978, s. 10).

Undervisningens betydelse för förståelse av likhetstecknet

Vad gäller undervisning för att bidra till elevers relationella förståelse av likhetstecknet förklarar Blanton m.fl. (2018, s. 185) att undervisningen redan i tidiga skolår behöver innehålla räkneuppgifter med variation vad gäller utformning. Blir elever endast exponerade för formella räkneuppgifter tenderar de att anamma en operationell förståelse. För att undvika att elever ska hamna i operationella tankebanor menar Blanton m.fl. (2018, s. 185) att de icke-formella uppgifterna behöver ha en betydande roll i undervisningen samt att elever så tidigt som möjligt får möta en variation av uppgifter och vägledas mot en förståelse som präglas av helheter och likheter. Även Stephens m.fl. (2021 s. 8–9) betonar att eleverna gynnas av att arbeta mot en relationell förståelse av likhetstecknet redan tidigt i lågstadiet. Elever riskerar att tillägna sig en operationell förståelse när de i lågstadiet endast kort introduceras för likhetstecknet utan någon fördjupning eller djupare arbete kring det. Detta leder i sin tur till att eleverna i högre årskurser kan få problem med likhetstecknet i relation till algebra (Knuth m.fl., 2006, s. 309). Exempel på uppgifter för att arbeta med relationell förståelse kan bland annat vara att arbeta med uppgifter där flera räkneuppgifter uppradas med likhetstecken emellan (Knuth m.fl., 2006, s. 310). Genom dessa uppgifter är syftet att elever ska förstå att helheterna och värdet på uträkningarna är värda lika mycket (exempelvis 7 – 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 6 – 2). Det finns alltså flera olika typer av icke-formella uppgifter att arbeta med där även variationen av dessa bör ha en betydande roll i undervisningen (Powell, 2015, s. 269). Lee och Pang (2022, s. 579) menar även att visuella hjälpmedel som exempelvis en våg kan vara ett bra stöd i undervisningen. Även Powell (2015, s. 271) lyfter detta och menar att fysiska material som bland annat en våg med olika föremål, till exempel små kuber, kan vara till hjälp för elevers relationella förståelse. De kan då utveckla en förståelse genom att laborera och väga jämnt i antal på respektive sida.

Förutom själva uppgifterna nämner Kusuma m.fl. (2018, s. 6) även läraren, som i sin roll bör fokusera på att ställa frågor utformade på olika sätt för att öppna upp för mer kreativt tänkande hos sina elever. Genom att ställa flera olika frågor i undervisningen om likhetstecknet kan elevers relationella tänkande gynnas eftersom det kan bidra till att de behöver tänka i olika banor och utifrån olika infallsvinklar. Läraren bör även belysa likhetstecknet på många olika sätt för att elever inte ska hamna i operationellt tänkande. Undervisningen om likhetstecknet bör därför innehålla många olika uppgifter och arbetssätt utifrån olika infallsvinklar (Kusuma m.fl., 2018, s. 6; Lee & Pang, 2022, s. 577). Läraren kan även överväga och eventuellt ändra sitt sätt att uttrycka sig för att hjälpa eleverna mot rätt tankesätt. Uttryck att undvika är bland annat att säga att två tal efter uträkning ”blir” det som skrivs i höger led, och i så stor utsträckning som möjligt använda uttryck som ”är samma som” för att leda in eleverna i det relationella tänkandet (Powell, 2015, s. 271). Ett annat uttryckssätt att undvika är att likhetstecknet representerar att ett ”svar” ska tas fram i en uppgift, vilket är ett ytterligare exempel på operationell förståelse (Madej, 2021a, s. 332–333). Om det till exempel står 6 – 3 = 3 anser elever som definierar likhetstecknet som "svaret blir" att 6 – 3 ”blir” 3. Detta visar en tydlig operationell förståelse eftersom det innebär att en uträkning ska utföras för att det som står i vänster led ska "bli" talet som står i höger led. Det handlar alltså utifrån detta tankesätt inte om att höger och vänster led ska stå i balans och representera samma värde.

Viktiga kunskaper för att förstå algebra i högre årskurser

Det tidiga arbetet med att bygga upp algebraiskt tänkande och förståelse är avgörande för att elever ska klara av att arbeta med algebra i högre årskurser. Inom forskning förklaras detta genom att elever behöver få möta och bli bekanta med vissa grunder innan de kan börja räkna och försöka förstå ekvationer och funktioner (Blanton m.fl., 2018, s. 192). Elever behöver få med sig förkunskaper där de bland annat informellt jämför kvantiteter, vilket med fördel kan göras praktiskt. Eleverna behöver få möta obekanta objekt och få arbeta med grunder i vad bland annat en helhet är. Vad gäller obekanta objekt så ger Blanton, Stephens, Knuth, Murphy Gardiner, Isler och Kim (2015, s. 59) exempel från sin studie på hur elever kan visa på förståelse och användarkunskaper gällande variabler, det vill säga obekanta objekt. Elever som förstått detta kan utifrån textuppgifter eller beskrivna sammanhang förklara och knyta an variabler till innehållet samt jämföra olika variabler i utsagorna och hur de påverkar varandra (Blanton m.fl., 2015, s. 45, 59). Exempelvis om person A har x antal pengar och person B har p antal pengar kan eleven med hjälp av ord och variabler förklara relationer mellan hur mycket pengar personerna har, utifrån vad som framgår i textuppgiften.

Eleverna behöver dessutom få kunskap kring hur de kan förstå att något är mer eller mindre än något annat, där andra tecken än likhetstecknet också kan vara relevanta. Tecken som kan vara aktuella för detta är bland annat > och < som representerar större- respektive mindre än (Blanton m.fl., 2018, s. 192). Elever kan träna på jämförelse av kvantiteter genom att exempelvis ha 5 + 3 föremål på en sida och 5 + 4 föremål på andra sidan. För att förstå att 5 + 4 utgör en större summa ska eleverna inte behöva lägga ihop talen utan det ska räcka att de ser att det finns en femma på båda sidor och att 4 är mer än 3. Detta är ett sätt som kan hjälpa eleverna att förstå hur kvantiteter jämförs och hur de kan se skillnad på storlek eller värde av helheter som kan hjälpa dem i senare arbete med algebra.

Ett vanligt förekommande problem som beskrivs i forskning är bristen på en djup förståelse av likhetstecknet hos elever. Med detta menas att många elever kan definiera likhetstecknet korrekt sett utifrån ett relationellt perspektiv men när de ska använda sina kunskaper i arbete med algebra stöter de på problem (Kusuma m.fl., 2018, s. 6). En möjlig orsak till detta kan vara att elever inte har en vana av att applicera sina kunskaper och sin förståelse i praktiken. Även Madej (2021a, s. 338) och Blanton m.fl. (2018, s. 190) påvisar i sina studier att förmågan att förklara likhetstecknet funktion inte behöver betyda att eleven kan använda likhetstecknet på ett korrekt sätt. I artiklarna beskrivs att många elever har en korrekt relationell beskrivning av likhetstecknets funktion men när de sedan ska utföra uppgifter använder de sig av operationell förståelse. För att arbeta med appliceringen av relationella kunskaper och förståelse förklarar Milinković m.fl. (2022, s. 28) att elever behöver förstå att likhetstecknet handlar om likheter och inte om att genomföra uträkningar för att få fram ett svar. För att förstå detta behöver elever en djupare förståelse där de bland annat ser vänsterledet och högerledet som två helheter som i sin tur ska motsvara samma värde. För att hjälp elever med denna relationella förståelse kan praktiskt material vara en bra stöttning. Elever kan då visuellt få en förståelse för att om exempelvis 3 pinnar adderas till 2 redan befintliga pinnar på en sida motsvarar det samma värde som 5 pinnar som finns på andra sidan (Milinković m.fl., s. 28–30). Det visuella kan hjälpa elever att tydligare se relationen och förstå innebörden.

Elever definierar och agerar utifrån olika typer av förståelse i relation till likhetstecknet. Hur en elev definierar likhetstecknet beskrivs dock inte alltid vara av största relevans (Lee och Pang, 2022, s. 575). Det kan bero på vilken typ av uppgift som är aktuell och vilka förmågor som krävs för att utföra en specifik uppgift. Handlar det om en formell uppgift kanske eleven använder en operationell förståelse för att klara av uppgiften medan eleven vid en icke-formellt utformad uppgift använder sig av relationell förståelse. En elev kan besitta kunskap för både operationell förståelse och relationell förståelse och därmed ha kunskapen och redskap för att utföra räkneuppgifter oavsett utformning (Lee & Pang, 2022, s. 575; Madej, 2021a, s. 338). Viktigt blir dock i dessa fall att säkerställa att eleverna har förmåga att skifta mellan dessa och förstå skillnaderna (Lee & Pang, 2022, s. 575).

Teoretiskt perspektiv

I detta avsnitt kommer studiens teoretiska bakgrund att beskrivas. Det teoretiska ramverk som kommer att användas är algebrans *Fem stora idéer* (Five big ideas) (Blanton Stephens, Knuth, Murphy Gardiner, Isler och Kim, 2015, s. 43). I denna studie kommer benämningen *Algebrans stora idéer* att användas, vilket är Madejs (2021b, s. 38) svenska översättning när han i sin avhandling tolkar ramverket. Ramverket kommer i denna del att förklaras och därefter kommer användningen av ramverket i denna studie att beskrivas och motiveras.

Algebrans stora idéer

För att beskriva och förstå tidig algebra och hur algebraiskt tänkande tidigt kan utvecklas har Blanton m.fl. (2015, s. 42) utvecklat ett ramverk om algebrans stora idéer. Dessa idéer är skapade i ändamål för ett stort projekt där syftet är att utveckla ett ramverk för EALP (Early Algebra Learning Progression, lärandeprogression för tidig algebra) för årskurserna 3–7 (Blanton m.fl., 2015, s. 42). Teorin bygger på och refereras i Blanton m.fl. (2015, s. 42) till Kaput (2008) som tidigare skapat ett liknande ramverk. Dessa är de fem idéer som ingår i ramverket:

- EEEI: Ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter (Equivalence, expressions, equations och inequalities)
- GA: Generaliserad aritmetik (Generalized arithmetic)
- FT: Funtionellt tänkande (Functional thinking)
- Var: Variabler (Variable)
- PR: Proportionellt resonemang (Proportional reasoning)

(Blanton m.fl., 2015, s. 42; Madej, 2021b, s. 38)

Ramverket innehåller alltså fem idéer och i fortsättningen av denna studie kommer endast de svenska översättningarna som Madej (2021b, s. 38) tagit fram att användas. Den sista delen (Proportional reasoning) är inte utvecklad av forskarna för lågstadiet och kommer därmed inte fördjupas eller användas i denna studie. Nedan kommer först EEEI att beskrivas, vilket är den idé som har störst roll i studien. Idén kommer att användas deduktivt i första analyssteget i denna studie. Därefter kommer de tre andra idéerna att beskrivas. Dessa tre idéer kommer endast att användas i resultatdiskussionen.

Ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter

Idén kallas EEEI och handlar som tidigare nämnts om ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter. Syftet med EEEI är att undervisning som innehåller dessa fyra aspekter ger elever förutsättningar att utveckla relationell förståelse av likhetstecknet samt få en ökad förståelse för relationer, uttryck och ekvationer kopplat till algebraiskt tänkande (Blanton m.fl., 2015, s. 43).

Ekvivalens

Ekvivalens står enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 117) för att något ska vara lika. Utsagor är sanna endast om vardera sida av likhetstecknet har samma värde. Att ha förståelse för- och arbeta med ekvivalens innebär i praktiken att elever till exempel ska kunna avgöra om både formella och icke formella utsagor är korrekta, det vill säga ekvivalenta, eller om de inte stämmer (Blanton m.fl., 2015, s. 48).

Uttryck

Uttryck handlar inom ramverket om att bland annat kunna utläsa och ta fram algebraiska uttryck från textuppgifter samt att kunna använda uttryck för linjära problem (Blanton m.fl., 2015, s. 45). Detta handlar enligt Blanton m.fl. (2015, s. 59) om att i textuppgifter kunna plocka ut relevanta delar och utifrån detta skapa ett uttryck med siffror och/eller andra variabler för att förklara uppgiften. Det kan exempelvis vara att i text förklara att person A är x år gammal och person B är $x + 2$ år gammal om det i textuppgiften framgått att person B är två år äldre än person A. Dessutom beskriver Blanton m.fl. (2015, s. 58) att förståelsen för uttryck även handlar om att en lösning på ett problem eller en ekvation kan bestå av ett uttryck som innehåller fler än ett tal. Exempelvis att 5 + 8 kan vara en korrekt lösning och att det inte behöver stå 13.

Ekvationer

Delen om ekvation innebär att elever ska kunna skapa situationer som kan beskrivas genom ekvationer i formen a + b = c (Blanton m.fl., 2015, s. 45). Där behöver eleven identifiera en variabel med ett bestämt värde utifrån en situation samt förstå hur den ska användas och därefter skapa en ekvation för att beskriva detta (Blanton m.fl., 2015, s. 48). Ekvationsdelen handlar även om att kunna tolka ekvationer skrivna i olika format, det vill säga även andra format än det formella a + b = c. Exempel på sådana format kan vara att flera uttryck uppradas (3 + 9 = 14 - 2 = 5 + 7) där syftet antingen är att avgöra om utsagan är korrekt eller där någon siffra är utbytt mot någon annan variabel och eleverna ska utläsa vilket värde som variabeln har.

Olikheter

Olikheter beskrivs som en logisk relation där två objekt inte är helt lika (Kiselman och Mouwitz, 2008, s. 60). Inom EEEI beskrivs olikheterna som en viktig del för relationell förståelse av likhetstecknet. Arbete med sanna/falska uttryck och ekvationer kan bidra till förståelse för relationer mellan uttryck och därigenom även av likhetstecknet (Blanton m.fl., 2015, s. 48).

Generaliserad aritmetik, funktionellt tänkande och variabler

Generaliserad aritmetik innebär enligt Blanton m.fl. (2015, s. 43) att involvera lagar och regler som har generaliserande egenskaper, såsom exempelvis kommutativa lagen. Detta kan elever möta i undervisningen genom att arbeta med uppgifter där de får utveckla förståelse för relationen. Det kan gå ut på att få förståelse för att till exempel 18 = 6 + 12 innebär samma som 18 = 12 + 6. De får alltså utveckla resonemang kring uppgifters egenskaper och uttryck snarare än att beräkna värden (Blanton m.fl., 2015, s. 43). För årskurs 3 förväntas elever utifrån generaliserad aritmetik kunna analysera information och göra antaganden om samband. Elever ska uttrycka sig med ord och/eller variabler för att förklara generaliseringar i aritmetiska uttryck, kunna förstå innebörden av upprepade eller olika variabler i en och samma ekvation samt kunna beskriva dessa (Blanton m.fl., 2015, s. 45). För att sammanfatta detta förklarar forskarna att det handlar om att fördjupa den aritmetiska förståelsen genom att både identifiera strukturer samt att kunna resonera och motivera för generaliserbarheter. I deras studie ger de dessutom elevexempel från en uppgift där eleverna fått räkneuppgiften 39 + 121 = 121 + 39 som de ska motivera huruvida den är sann eller falsk. Blanton m.fl. (2015, s. 61–62) beskriver så att en elev som motiverat att den är sann eftersom 121 + 39 är samma som 39 + 121. Eleven har då sett till strukturen snarare än att ha gjort beräkningar och har därmed påvisat förmåga att se generaliserbarhet i matematiska utsagor.

Funktionellt tänkande går ut på att resonera kring generaliserade relationer mellan kvantiteter där algebraiska symboler får en viktig roll. Blanton m.fl. (2015, s. 45) beskriver att det funktionella tänkandet bland annat kan vara att elever kan identifiera innebörden av en okänd variabel som representerar en kvantitet samt att organisera data från linjära samband i tabeller. Det kan även handla om att identifiera funktionsregler som sak beskrivas med ord. Exempel på detta kan vara att eleven har en talföljd med talen 3, 6, 9, 12, 15, 18 där eleven kan motivera och beskriva med ord och variabler att det i varje steg ökar med 3. Efter årskurs tre förväntas elever dessutom kunna bestämma värde på en oberoende variabel när ett värde på den beroende variabeln är givet (Blanton m.fl., 2015, s. 45). Det vill säga att eleverna exempelvis ska kunna räkna ut y-värdet på det algebraiska uttrycket $y = 3x + 4$ om de vet att $x = 2$.

Den sista delen om variabler förklaras av Blanton m.fl. (2015, s. 43, 45) som att det handlar om att anamma ett språkligt verktyg som gör att elever kan presentera matematiska idéer kort och koncist. Dessa förklaringar ska kunna visa att elever har förståelse för olika variablers innebörd i sammanhangen, de ska alltså kunna förstå och använda matematiska begrepp på ett korrekt sätt. Enligt Blanton m.fl. (2015, s. 45) förväntas elever efter årskurs 3 bland annat förstå att en variabel representerar ett värde på ett objekt eller en mängd snarare än att det representerar själva objektet. De förväntas även kunna utläsa och förstå meningen av en variabel i textuppgifter samt kunna beskriva problemsituationer med hjälp av variabler (Blanton m.fl., 2015, s. 45).

Teorins roll i studien

Det teoretiska ramverket *Algebrans stora idéer* har använts på två sätt i studien. Den första idén (EEEI) användes deduktivt, som utgångspunkt i det första analyssteget av empirin för att sortera och kategorisera materialet. De övriga tre idéerna (Generaliserad aritmetik, funktionellt tänkande och variabler) användes endast i resultatdiskussionen. Den första idén lyfter viktiga innehållsaspekter i undervisning för att elever ska anamma ett algebraiskt tänkande, där förståelsen för likhetstecknet är en stor del. Eftersom syftet med studien var att utforska lärares uppfattningar och sätta dem i relation till algebraiskt tänkande och ett relationellt perspektiv på likhetstecknet kunde denna idé hjälpa till att kategorisera och synliggöra relevanta uttalanden bland intervjusvaren. Hur idén användes mer specifikt i studien beskrivs och skildras med exempel i avsnittet ”Beskrivning av analysmetod”. Efter analysen diskuterades och jämfördes studiens framtagna resultat med de övriga tre idéerna (Generaliserad aritmetik, funktionellt tänkande och variabler) tillsammans med övrig tidigare forskning.

Metod

I denna del beskrivs och motiveras vilken metod som valts för att besvara studiens syfte och frågeställning. Studiens validitet, reliabilitet samt de forskningsetiska överväganden som gjorts kommer även att förklaras.

Intervju som metod

För denna studie kommer kvalitativ intervjumetod med semistrukturerade intervjuer som grund att användas eftersom syftet med studien är att få ökad kunskap om undervisning om likhetstecknet genom lärares egna tankar. Genom detta kommer sedan mönster och kategorier synliggöras för att få en mer nyanserad bild och för att analysera skildringarna. För att eftersträva dessa mål kommer därför kvalitativ intervjumetod att användas (Larsen, 2018, s. 34).

Kvalitativ metod är vanligt när syftet är att undersöka upplevelser kring vad och hur människor lär och uppfattar fenomen i sin omgivning, snarare än att direkt undersöka fenomenet (Stukát, 2011, s. 37; Dahlgren & Johansson, 2019, s. 179). Ett av de vanligaste sätten att angripa utbildningsvetenskapliga studieobjekt är intervjuer (Stukát, 2011, s. 42; Dahlgren & Johansson, 2019, s. 179). Studiens syfte är att utforska lärares uppfattningar och beskrivningar av deras undervisning om likhetstecknet och faller därmed inom ramen för kvalitativ intervjumetod. När en studie ska genomföras med hjälp av intervjuer finns flera olika sätt att strukturera dessa på. I denna studie kommer intervjuerna ske individuellt. Att genomföra intervjuer individuellt minskar bland annat risken för att respondenterna påverkas av någon annans åsikter eller att flera personer uppfattas ha samma åsikter trots att alla kanske inte kommit till tals. Det blir då en kollektiv åsikt snarare än individens åsikt (Davidsson, 2007, s. 64). Eftersom syftet med denna studie är att få syn på olika lärares uppfattningar är därför den enskilda intervjun bättre anpassad.

En fördel med att göra intervjuer är att det öppnar upp för djupare och fylligare svar än genom exempelvis enkäter. Larsen (2018, s. 36) förklarar att intervjuaren med hjälp av uppföljningsfrågor eller begäran om förtydliganden kan bidra till utförligare empiri. En annan fördel med intervju som metod är att respondenten kan tala mer fritt än genom enkäter med färdiga frågeformulär. Detta kan enligt Larsen (2018, s. 36) leda till utförligare och mer precist innehåll samt att missförstånd kan redas ut och bidra till att forskaren senare har bredare och tydligare empiri att analysera.

Utformning av intervju

Intervjun (se bilaga 2) innefattar två delar. En del med semistrukturerade frågor och en del där informanterna får en kort sammanfattning av vad som framkommit i tidigare forskning om likhetstecknet för att därefter samtala kring fyra räkneuppgifter. Informationen om forskning inom området för likhetstecknet ges för att bibehålla fokus på matematikinnehållet i intervjun, samt eventuellt tillföra nya infallsvinklar i samtalet kring räkneuppgifterna. Dessa två delar kommer nedan att beskrivas.

Den första delen innehåller ett antal semistrukturerade frågor (Larsen, 2018, s. 139). Det vill säga att intervjun utgår ifrån förkonstruerade frågor med följdfrågor som kan förändras eller ändra ordning beroende på hur intervjun utspelar sig. Denna struktur möjliggör enligt Kihlström (2007, s. 161) och Larsen (2018, s. 139) en dialogkaraktär under intervjun. En semistrukturerad intervju kan göra respondenten mer bekväm eftersom intervjun i sin helhet anpassas efter vad som sägs eller vilka spår samtalet leds in på och känns mer naturlig. Det ger även intervjuaren möjlighet att fånga upp intressanta yttranden att bygga vidare på och intervjuerna kan därmed ta olika riktningar i syfte att få ut maximalt av dem (Dahlgren och Johansson, 2019, s. 183). Följdfrågor är även viktiga för att påminna respondenten och minimera risken att viktiga aspekter glöms bort.

Intervjuguiden som låg till grund för samtalen med de sex lärarna reviderades ett flertal gånger. I ett första utkast fanns exempelvis frågorna ”Vad är viktigt att inkludera i undervisningen om likhetstecknet?”, ”Vad är viktigt att tänka på för dig som lärare i arbetet med likhetstecknet?” samt ”Vilka är de viktigaste delarna för eleverna att få med sig?”. Utifrån reflektioner innan genomförandet av intervjuerna justerades bland annat dessa frågor då de skulle kunna kännas något ”dömande” eller som att det fanns rätta och felaktiga svar. Frågorna justerades för att försöka få lärarna att berätta mer öppet om sin undervisning och erfarenheter. De slutliga frågorna (se bilaga 2) erbjöd fler möjligheter för lärarna att exemplifiera och beskriva mer målande. Lärarna blev exempelvis ombedda att beskriva sitt arbete vid planering och genomförande av undervisningen om likhetstecknet samt hur de kan upptäcka och bemöta elevers svårigheter. Mycket fokus låg på att lärarna skulle få beskriva och ge exempel utifrån konkreta situationer de hamnat i och hur de upplevt dessa. Genom denna justering blev frågorna mer kravlösa och det fanns ingen värdering i frågorna eller att något specifikt svar förväntades. Frågorna gav även möjlighet till rikare och mer konkret information om lärarnas undervisning. De ursprungliga frågorna var dock utformade för att kunna besvara studiens syfte och användes därför som stödfrågor i analysarbetet.

Den andra delen av intervjun inleddes med att informanten fick en kort och översiktlig sammanfattning av vad forskning påvisat inom studiens område, likhetstecknet, för att därefter samtala kring räkneuppgifter och hur dessa skulle kunna te sig i undervisningen. Syftet med denna del var att ge en input och att tillföra ämnesdidaktiska idéer från tidigare forskning till intervjun. I intervjun fick lärarna titta på fyra olika räkneuppgifter och matematiska uttryck med matematiskt innehåll som enligt Algebrans stora idéer (Blanton m.fl., 2015, s. 43) bör vara inkluderat i undervisningen. De fyra räkneuppgifterna (se bilaga 2) arbetades fram för att representera den första idén i det teoretiska ramverket om Algebrans stora idéer som handlar om ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter (Blanton m.fl., 2015, s. 43). Aspekterna är menade att representera det undervisningsinnehåll och den förståelse som är viktig för att elever ska anamma en relationell förståelse av likhetstecknet. Lärarna fick titta på räkneuppgifterna och med hjälp av stödfrågor (se bilaga 2) prata om dem både kopplat till själva användningen av dem i undervisningen samt sin syn på elevers agerande och förståelse utifrån räkneuppgifterna.

Validitet och reliabilitet

Inom forskning finns två begrepp, validitet och reliabilitet, som är viktiga att ha i åtanke för att säkerställa kvalitet och trovärdighet. När det gäller validitet inom kvalitativ forskning innebär detta att säkerställa att forskningen som genomförs har undersökt det som är avsett att undersöka (Thornberg & Fejes, 2019, s. 275). I följande del om validitet kommer Larsens (2018, s. 129) begrepp bekräftbarhet, trovärdighet och överföringsvärde att användas för att motivera metodens validitet i studien. Därefter kommer även reliabiliteten att diskuteras.

Bekräftbarhet

Bekräftbarhet innebär att säkerställa att den information som inhämtas är relevant för att besvara en studies syfte samt tillräckligt omfattande och korrekt för att dra giltiga slutsatser av (Larsen, 2018, s. 129). I denna studie handlar bekräftbarheten exempelvis om att frågorna utvecklades till att bli väldigt öppna. Intervjuns struktur gjorde att intervjun undersöker just lärares uppfattningar och inte på något sätt styrs av ledande frågor. Den insamlade informationen blir således relevant för att besvara studiens syfte. Genom noggrant utformade frågor samt följdfrågor som på förhand var utformade för att knyta an till den tidigare forskningen och det aktuella teoretiska ramverket blev även svaren tillräckligt omfattande och korrekta att dra slutsatser av (Larsen, 2018, s. 36, 129). För att säkerställa relevansen av materialet som samlades in var exempelvis de fyra räkneuppgifterna som ingick i intervjun (se bilaga 2) även kopplade till var sin aspekt från första idén i Algebrans stora idéer (Blanton m.fl., 2015, s. 43).

Trovärdighet

Den andra aspekten, trovärdighet, handlar om att göra trovärdiga tolkningar (Larsen, 2018, s. 129). I denna studie uppstår flertalet tillfällen där tolkningar kan komma att påverka. Dels under själva intervjun, dels vid analys av empirin. Stukát (2011, s. 36) förklarar att det genom tolkningar som görs finns en risk att resultaten blir missvisande och att studiens trovärdighet blir bristande. Genom tydliga skildringar av vad som sagts under intervjuer samt motiveringar för vilka tolkningar som gjorts i analysen får denna studie en ökad trovärdighet. Studien får även en ökad trovärdighet eftersom slutsatser som dragits vid analys och diskussion beskrivits genomskinligt och tydligt (Stukát, 2011, s. 46–47, 130).

Överförbarhet

Eftersom antalet intervjuer i studien är relativt få blir det svårt att göra generaliseringar av resultatet. Generaliserbarhet är något Stukát (2011, s. 36) beskriver som kritik till kvalitativ forskning. Däremot nämner Larsen (2018, s. 37) att idén med kvalitativ forskning är att studierna snarare ska ha ett överföringsvärde, det vill säga att tillvägagångssättet är tillräckligt tydligt beskrivet för att en annan forskare ska kunna utföra liknande studie. Syftet med denna studie är inte att få ett fullt generaliserbart resultat utan snarare att synliggöra olika uppfattningar som finns bland lärare gällande undervisningen om likhetstecknet i relation till algebraiskt tänkande.

Reliabilitet

Reliabilitet i kvalitativa studier handlar om noggrannhet och pålitlighet (Larsen, 2018, s. 131). Flera av aspekterna går att jämföra med validitetens aspekter om genomskinlighet och hur till exempel omgivning eller respondentens rädsla att säga ”fel” saker kan påverka själva utfallet i en intervju. Dessa osäkerheter skulle alltså kunna leda till att slutsatserna inte är pålitliga i relation till den faktiska verkligheten (Larsen, 2018, s. 131). Det viktigaste att tänka på för att stärka reliabiliteten är enligt Larsen (2018, s. 131) att flertalet gånger under processen vara kritisk mot sitt arbete och genomförande. Ett exempel från denna studie var att frågeställningarna granskades och justerades för att säkerställa att de var enkla att förstå och att de inte var ledande eller dömande. Därefter lades stort fokus på noggrannhet vid transkription och kodning av det insamlade materialet genom att bland annat granska materialet flertalet gånger för att säkerställa pålitligheten.

Etiska överväganden

För att säkerställa god forskningssed har denna studie utformats i enlighet med Vetenskapsrådets krav på att all forskning ska säkerställa de inblandades säkerhet och integritet (Vetenskapsrådet, 2017, s. 9). Dessa etiska aspekter handlar om att värna om integriteten hos de personer som deltar i studien.

De deltagande lärarna blev genom ett informationsbrev informerade om studiens syfte, innehåll och genomförande. Där framgick även hur deras personuppgifter såsom exempelvis ålder, namn och arbetsplats behandlas. De blev även informerade om att de när som helst kunde avbryta sin medverkan i studien. Vid videoinspelningar finns krav på information och samtycke från den medverkande (Vetenskapsrådet, 2017, s. 26). I denna studie användes endast ljudupptagning under intervjuerna men deltagarna fick ändå information kring detta för att känna sig trygga och vara medvetna om hur deras uttalanden skulle behandlas.

För att uppfylla kravet om tystnadsplikt och konfidentialitet (Vetenskapsrådet, 2017, s. 40) innebär det att de uppgifter som framkom i studien inte förts vidare till någon utomstående. Detta informerades till deltagarna och den information som inhämtades under intervjuerna används endast för studiens syfte och raderas efter slutfört arbete. Vad gäller anonymitet så används inte respondenternas verkliga namn i studien. Namnen är ersatta med siffror och de benämns som lärare 1–6 för att det inte ska gå att koppla ihop svar med en viss person. Genom detta anonymiseras respondenterna vilket enligt Vetenskapsrådet (2017, s. 28) är en viktig aspekt för att säkerställa god forskningssed.

Urval

Urvalet till denna studie avgränsades till sex enskilda kvalitativa intervjuer med lärare verksamma i lågstadiet. Ett av urvalskriterierna var krav på lärarlegitimation samt erfarenhet av undervisning i matematik. Respondenterna avgränsades till lärare i en mindre kommun i Sverige. Att selektera på detta sätt blir en form av godtyckligt urval eftersom jag valt några kriterier som jag anser passar genomförandet och syftet med studien (Larsen, 2018, s. 126). Eftersom syftet med denna kvalitativa studie är att uppnå ett överföringsvärde och inte generaliserbara resultat funkar denna urvalsmetod bra (Larsen, 2018, s. 124). Lärare kontaktades via mejl med förfrågan och informationsbrev. Lärarna som blev informerade fick därefter själva välja om de ville medverka, något som kallas självselektion (Larsen, 2018, s. 125). Självselektion kan medföra att de medverkande har ett större intresse för att delta än om de blivit tillsagda att delta.

Dokumentation av intervjumaterial

För att få ett utförligt underlag till analys spelades intervjuerna in med ljudupptagning. Detta gjordes även för att jag som intervjuperson skulle kunna vara mer närvarande och följsam i samtalet än om insamlingen av material skulle ha skett genom anteckningar under samtalets gång. Efter intervjuerna transkriberades det insamlade materialet och allt som sagts skrevs ned. Vid transkriberingen uteslöts pauser, hummande och tystnader eftersom syftet var att analysera själva innehållet i det som sägs snarare än att göra en språklig analys (Kvale & Brinkmann, 2014, s. 221–222).

Beskrivning av analysmetod

Analysen av det insamlade materialet skedde i ett första steg med hjälp av EEEI, vilket är en av de fem stora idéerna från studiens teoretiska ramverk. (Blanton m.fl., 2015, s. 43). Idén består av de fyra aspekterna ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter och dessa utgjorde grunden i det första analyssteget. I det andra steget analyserades den utvalda empirin med hjälp av analysfrågor som arbetats fram under arbetet med studien för att därefter kunna framställa studiens huvudresultat. I följande avsnitt kommer utförandet av analysen att beskrivas mer ingående.

Efter transkribering av de sex intervjuerna påbörjades analysen och att bekanta sig med materialet. Genom att själv göra transkriberingarna menar Kvale och Brinkmann (2014, s. 220–221) att arbetet med att skaffa sig en första uppfattning effektiviseras då det påbörjas redan vid transkriberingen. Materialet lästes dock igenom flertalet gånger för att få en bättre förståelse och känsla för materialet inför analysen. I ett första steg av analysarbete handlar det även om att bli bekant med materialet samt att komprimera materialet till de uttalanden som är relevanta (Fejes & Thornberg, 2019, s.37). Detta innebar att det insamlade materialet granskades och uttalanden som föll under någon av de fyra innehållsaspekterna ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter behölls och markerades i texten. Övriga uttalanden togs vid detta stadie bort. Nedan följer en beskrivning för hur dessa fyra aspekter togs i beaktning under analysarbetet.

För innehållsaspekten ekvivalens som handlar om den relationella förståelsen och att det som står på vardera sida om likhetstecknet ska vara lika mycket tolkades exempelvis följande citat från lärare 1 passa in: ”*det beror mycket på hur man har skolat in dem från början, det är viktigt att det blir rätt från början. Det är ingenting som ”blir” utan det ”är” lika mycket. Man ser bland de som har svårt det är vanligare att de fortfarande hänger kvar i det där med att ”det blir”*. Under denna kategori föll även uttalanden som handlade om att arbeta med lika värde och att förstå att båda sidor ska vara värda lika mycket i såväl formella som icke formella utsagor (Blanton m.fl., 2015, s. 48).

Vad gäller den andra aspekten om uttryck innebar detta att hitta uttalanden som kunde kopplas till arbete med algebraiska uttryck, arbete med bokstäver och andra okända variabler (Blanton m.fl., 2015, s. 59). Genom detta hittades exempelvis uttalandet från lärare 1 om algebraiska inslag där de använder andra föremål som ersättning för bokstäver: ”*vi döper det inte till x utan för oss kanske det är ett äpple också frågar man hur mycket äpplet är värt. Så vi arbetar ju egentligen som man gör med bokstäver fast döljer bokstäverna och sätter dit någon bild i stället”*. Uttryck innefattar även när lärarna samtalade kring att en lösning inte bara behöver uttryckas genom endast ett tal, utan att en lösning kan vara klar när det innefattar flera tal, exempelvis att det inte måste stå 13 utan att 5 + 8 kan vara lika mycket rätt (Blanton m.fl., 2015, s. 58).

Vid kategoriseringen utifrån aspekten om ekvationer synliggjordes uttalanden som handlade om att veta hur variabler i uttryck ska tolkas för att lösa räkneuppgifterna. Främst innebar detta yttranden om icke formella utsagor, exempelvis när uttryck uppradas (Blanton m.fl., 2015, s. 48). Genom detta framkom bland annat citatet *”jag skulle gjort ring runt 3 + 9, ring runt 4 – 2, och en ring runt _ plus 7 för att hjälpa dem synliggöra och förstå en sak i taget”* som handlar om en räkneuppgift med flera uppradade uttryck (3 + 9 = 14 - 2 = _ + 7). Citatet kunde alltså kopplas till detta då det både handlar om uppradning av uttryck och lärarens tankar kring att elever ska förstå vad som är vad i räkneuppgiften och vad exempelvis hur det okända i uppgiften ska behandlas.

Olikheter är den sista kategorin och genom denna synliggjordes lärarcitat handlade om bland annat användandet av tecknet för större än, mindre än och inte lika med (>, < och ≠). Till exempel framkom citatet ”*det är bättre om det finns ett tal på ena sidan, ett tecken, antingen större än, mindre än, lika med eller inte lika med, och att de själva får fylla på med ett tal på andra sidan. Annars tror jag att det är ganska lätt att sätta ut rätt tecken utan att de egentligen har förstått, de kan enklare chansa. Men ska du i stället sätta ut ett tal, då finns det fler att välja på så har du träffat rätt så har du troligtvis förstått*” där läraren samtalar kring både själva undervisningsinnehållet och kring hur undervisningen kan utformas olika.

Nästa steg i innehållsanalysen innebar att mer strukturerat gå igenom och analysera de uttalanden som tagits fram i det första steget. För att bibehålla en tydlig struktur på materialet och hela tiden säkerställa att det höll den röda tråden riktat mot studiens syfte användes de tre analysfrågorna som togs fram under arbetet med intervjufrågorna. Hur dessa togs fram finns beskrivet under rubriken ”intervju som metod” och *Utformning av intervju.* Utifrån de intervjusvar som valts ut med hjälp av de fyra kategorierna ekvivalens, uttryck, ekvationer och olikheter sorterades dessa uttalanden med hjälp av följande frågor:

- Vad är viktigt att inkludera i undervisningen om likhetstecknet?
- Vad är viktigt att som lärare tänka på i arbetet med likhetstecknet?
- Vilka är de viktigaste kunskaperna och förmågorna eleverna behöver få med sig?

När forskare själv ska analysera och välja ut delar från insamlade data finns risken att forskarens egna värderingar blandas in, detta menar dock Fejes & Thornberg (2019, s. 37) kan undvikas genom att använda färdiga kategorier i analysarbetet. Med hjälp av de tre förutbestämda analysfrågorna med tydlig koppling till den tidigare forskningen och studiens syfte minimerades risken för egna värderingar i analysen. Till den första analysfrågan om undervisningsinnehåll kunde exempelvis uttalandet ”*vi döper det inte till x utan för oss kanske det är ett äpple också frågar man hur mycket äpplet är värt. Så vi arbetar ju egentligen som man gör med bokstäver fast döljer bokstäverna och sätter dit någon bild i stället”* om hur de arbetar med obekanta tal att knytas an. Exempel på citat som kategoriserades till den andra analysfrågan om lärarens roll var *”jag skulle gjort ring runt 3 + 9, ring runt 4 – 2, och en ring runt _ plus 7 för att hjälpa dem synliggöra och förstå en sak i taget”* som tolkades som ett exempel på hur lärare kan hjälpa elever att få en struktur i arbetet. Citatet ”*det beror mycket på* *hur man har skolat in dem från början, det är viktigt att det blir rätt från början. Det är ingenting som ”blir” utan det ”är” lika mycket. Man ser bland de som har svårt det är vanligare att de fortfarande hänger kvar i det där med att ”det blir”* från Lärare 1 om ekvivalens och hur elever tidigt behöver förstå och definiera likhetstecknet kategoriserades i detta steg exempelvis in under den sista analysfrågan om viktiga kunskaper och förmågor elever behöver få med sig.

Sista steget i analysen handlade om att sammanställa de uttalanden som placerats under varje analysfråga. Genom granskning av empirin som placerats under varje analysfråga kunde huvudteman synliggöras utifrån det som var mest centralt. Därtill granskades även huruvida lärarna var överens eller hade skilda uppfattningar i de huvudteman som synliggjordes. De fyra teman som utkristalliserades genom analysen var *Lärares medvetenhet om den egna rollen och dess betydelse för elevers inlärning, Visualisering av undervisningsunderhållet, Öppna utsagor en stor svårighet för många elever* samt *Varierad undervisning för en djupare förståelse.* Det är utifrån dessa teman som resultatet kommer presenteras i kommande avsnitt.

Resultat

I detta avsnitt presenteras vad som framkommit under intervjuerna med lärarna. Resultatet presenteras uppdelat i de fyra ovan nämnda teman som successivt tagits fram genom analysarbetets olika steg. I slutet av avsnittet sammanfattas även resultatet i sin helhet.

Lärares medvetenhet om den egna rollens betydelse i undervisningen

I intervjuerna påpekade samtliga lärare vikten av sitt sätt att uttrycka sig inför eleverna. Lärarna lyfte vikten av att vara noggrann med vilken definition de använder och hur de uttrycker att likhetstecknet ska användas. Alla lärare var eniga om att det är viktigt att uttrycka att det ska vara lika värde, lika mycket eller samma värde på båda sidor om likhetstecknet. De var även eniga om att de undviker uttrycket att det ska ”bli” något. Lärare 1 berättade att ”*det beror mycket på hur man har skolat in dem från början, det är viktigt att det blir rätt från början. Det är ingenting som ”blir” utan det ”är” lika mycket. Man ser bland de som har svårt, det är vanligare att de fortfarande hänger kvar i det där med att det blir något*”. Lärare 5 var också väldigt noggrann med vilken terminologi som används. Dock uttryckte läraren att det är svårt att veta om terminologin har någon påverkan i elevers förståelse i så unga åldrar.

Flera av lärarna betonade vikten av att som lärare vara flexibel och erbjuda flera olika sätt att undervisa inom området. På samma sätt är det viktigt att vara medveten om vilka olika utfall olika arbetssätt och räkneuppgifter kan ge. För att synliggöra huruvida eleverna anammat förståelsen eller inte jämförde lärare 3 olika sätt att arbeta med större än, mindre än och inte lika med” (>, < och ≠). *”i arbetsboken har dom skrivit ut exempelvis 3 på vänstersidan och 4 på den andra, och så ska de antingen sätta in lika med eller ej lika med, eller så ska dom sätta ut tecknet för större än, mindre än eller lika med.”.* Läraren förklarade dock att det är bättre när eleverna ska skriva ut siffror och inte sätta ut tecken. ”*det är bättre om det finns ett tal på ena sidan, ett tecken, antingen större än mindre än eller lika med eller inte lika med, och att de själva får fylla på med ett tal på andra sidan. Annars tror jag att det är ganska lätt att sätta ut* *rätt tecken utan att de egentligen har förstått, de kan enklare chansa. Men ska du i stället sätta ut ett tal, då finns det fler att välja på så har du träffat rätt så har du troligtvis förstått*".

När det gäller lärarens roll beskrev en av lärarna vikten av att alltid försöka ligga steget före. *"Det gäller ju som lärare att ligga före, alltså försöka tänka "hur tänker eleverna?" "vad kan jag råka ut för som lärare liksom", "vilka fall vilka fallgropar hamnar eleverna i?".* Läraren beskrev bland annat att de vet att många elever vid icke formella räkneuppgifter har svårt att förstå hur de ska tänka när likhetstecknet är på ett annat ställe än vad de kanske är vana vid. Även lärare 4 och 5 pratade om detta. De förklarade att många elever har svårt med icke formella räkneuppgifter och brukar därför arbeta med att tydliggöra var likhetstecknet är i uppgiften. Lärare 5 förklarade att *"om vi till exempel har ett arbetsblad med olika räkneuppgifter så ringar vi in varje likhetstecken i rött eller något, bara så att det blir tydligt liksom vart det är. Det hjälper en del att de bara påminns om att "just ja, så där var det". Om de har en uppgift, till exempel 8 = någonting – 6 tänker vissa 8 – 6 och skriver 2 där det är tomt, de liksom räknar med de siffror som står där oavsett var de står och var likhetstecknet är. För vissa kan det då hjälpa om vi ringar in likhetstecknet så förstår de att någonting – 6 ska vara lika mycket som åttan på andra sidan."*

Flera av lärarna lyfte även lärarens ansvar att erbjuda undervisning där samtliga elever aktiveras. Lärare 6 uttryckte *"jag tror på att eleverna lär sig bäst när de själva får komma till tals liksom, därför är det kanske bäst när de sitter i mindre grupper så att alla får komma till tals vad de tror och tänker.*" Lika viktigt beskrevs det vara att arbetssätten och uppgifterna utformas på så sätt att de kan utgöra bra bedömningsmöjligheter för lärarna. Samtliga lärare beskrev att de själva behöver vara uppmärksamma och aktiva under lektionerna för att försöka se vad eleverna kan eller inte kan. Även lärare 2 föredrog när eleverna sitter i mindre grupper och pratar kring likhetstecknet eftersom detta också möjliggör för läraren själv att upptäcka hur eleverna uttrycker sig kring likhetstecknet. Läraren förklarar att "*man behöver vara aktiv i klassrummet, arbetar vi till exempel i par kan jag som lärare försöka hänga med i deras samtal. Man behöver inte göra så stor grej av det heller om man märker att dom inte förstår utan bara försöka sätta sig med den eller de eleverna och se hur de tänker och försöka stötta dem åt rätt håll. Det kanske handlar om att jag måste påminna dem eller bara ställa en dum fråga som att jag inte förstår vad likhetstecknet handlar om för att de ska komma på rätt bana igen".*

Visualisering av undervisningsunderhållet

Alla lärare förklarade att de använder sig av en fysisk våg i arbetet med likhetstecknet. Vågen används av samtliga, främst i början av inlärningen men de beskrev även att den följer med under hela lågstadiet på något sätt. En av lärarna använder inte den fysiska vågen när eleverna kommer upp i trean men att de kan använda den muntligt och som påminnelse om vad likhetstecknet handlar om. Det vill säga genom att exempelvis påminna om att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet, eller att sidorna ska ha samma värde. I relation till detta berättade flera av lärarna att de i inledningen använder annat än siffror för att visualisera och synliggöra taluppfattning och värde. Lärare 6 förklarade att vågen kan vara särskilt bra innan eleverna kommit så långt i sin taluppfattning. Läraren uttryckte att *"jag börjar liksom med att om det är 3 bollar på ena sidan, då ska det vara 3 bollar på andra sidan på vågen* *också, sen byter man ut bollarna till streck och sedan byter man ut sträcken till siffror"*. När det gäller övergången från praktiskt beskrev två av lärarna svårigheten de sett hos elever att överföra det praktiska till mer abstrakt. Lärare 2 förklarade att *"man har ju jobbat med sådana här fysiska vågar också och tydliggjort med plockmaterial och så där och det konkretiserar ju på ett sätt men jag upplever att det ändå är svårt för eleverna att de kan vara helt med på tåget när man gör sådana praktiska exempel och sen när det kommer till att det är siffror och mer abstrakt så är det som att den kopplingen till vad de gjort faller bort"*.

I samtal kring intervjuns räkneuppgifter där flera steg krävs (exempelvis 3 + 9 = 14 - 2 = _ + 7) var lärarna överens om att det är svårt för många elever att veta var de ska börja. Vid sådana situationer gav flera av lärarna exempel på hur de brukar hjälpa eleverna genom att visualisera för dem vad som är vad och bryta ner problemet. Lärare 6 beskrev exempelvis följande *"jag skulle gjort ring runt 3 + 9, ring runt 14 – 2, och en ring runt streck plus 7 för att hjälpa dem synliggöra och förstå en sak i taget"*. Även lärare 5 beskrev att elever ofta har svårt när arbetet kräver flera steg. Läraren beskrev dock att arbete med räkneuppgifter som innehåller uppradning av uttryck med flera likhetstecknet på sikt kan utveckla förståelsen för helheter och likheter. Läraren förklarade att *"man skulle kunna fortsätta hur långt som helst med hur många likhetstecken uppradade som helst bara man ser till att det blir 12 på varje sida, men att dela upp talen på olika sätt. Det kanske är ett sätt att få dem att förstå bättre när de har gjort det själva"*. Uttalandet kan tolkas som att elever trots svårigheterna behöver arbeta med denna typ av räkneuppgift över tid för att den relationella förståelsen ska befästas. Citatet kan även tolkas som att förståelsen befästs som bäst när eleverna själva får utforska räkneuppgifterna.

Att arbeta med algebra som inkluderar bokstäver var något som ingen av lärarna beskrev att de arbetat med. Två av lärarna förklarade att de hade tänkt påbörja detta lite längre fram men menar att det i sådana fall endast förekommer i trean. Några av lärarna beskrev kopplingar till algebra när de samtalade om arbete med andra okända variabler. Två av lärarna använder en arbetsbok som erbjuder additionsuppgifter där eleverna ska fundera ut två termer, representerade av var sin ring med additionstecken emellan, som tillsammans ska motsvara en bestämd summa på andra sidan av likhetstecknet (exempelvis ring + ring = 12). Lärare 1 förklarade också att *"vi döper det inte till x utan för oss kanske det är ett äpple också frågar man hur mycket äpplet är värt. Så vi arbetar egentligen som man gör med bokstäver fast vi sätter dit en bild i stället."*. Några lärare förklarade att de sällan tydliggör kopplingen mellan användningen av föremål och algebra med bokstäver. Lärare 2 förklarade dock att detta är något de bör tillägga för att tydliggöra för eleverna att det handlar om samma ämnesinnehåll oavsett om de använder sig av bokstäver eller andra figurer. Annars menar flera av lärarna att hoppet till bokstäver som okända variabler, som blir mer vanligt i högre årskurser, blir väldigt stort och svårt. En av lärarna beskriver att de inte använder okända variabler alls under lågstadiet, vilket kan tolkas som en möjlig anledning till att elever möter svårigheter i algebra när de kommer upp i högre årskurser.

Icke formella räkneuppgifter är en stor svårighet

Icke formella räkneuppgifter var ett område samtliga lärare samtalade kring. Svårigheterna visar sig enligt lärarna på flera olika sätt. Det fanns även delade tankar kring hur detta ska bemötas i undervisningen. När det gäller själva utformningen av uppgifter i undervisningen beskrev flera lärare vikten av att tidigt vänja elever vid icke formella uppgifter för att de inte ska fastna i strukturen för formella uppgifter. Lärare 5 förklarade att ”*i princip alla har det inprogrammerat att typ 2 + 3 = 5, ”det är så matteuppgifter ska se ut” så att bara att komma bort från det är en sak och vi börjar redan i ettan med att laborera med likhetstecknet och flytta runt det och bygga allt möjligt men det är inte så lätt och det tar tid.”*. En av lärarna förklarade att öppna utsagor ofta är för svårt för elever i början. Läraren beskriver ett arbete där en lärobok började med öppna utsagor från allra första början vilket ansågs vara för svårt och läraren menar därför att undervisningen först behöver bestå av de mer formella räkneuppgifterna.

Tre av lärarna nämnde att många elever vid icke formella räkneuppgifter har svårt att förstå hur de ska tänka när de arbetar själva. De kan lyckas med hjälp av stöttning av läraren men när de ska arbeta själva blir det problematiskt. Speciellt vid subtraktioner där differensen finns utskriven och eleverna ska fylla i den första termen (exempelvis 6 = _ - 2). Då förklarade flera av lärarna att eleverna har svårt att tänka tillbaka ett steg för att förstå vilket tal som du kan ta bort två från för att få samma värde som sexan på vänster sida.

Lärare 3 förklarade även att uppgifter där flera likhetstecken förekommer i samma räkneuppgift är svårt för de allra flesta elever eftersom det blir för många moment för dem att hålla koll på själv. Lärare 5 förklarade att de i sådana lägen brukar uppmuntra eleverna att skriva små anteckningar för att hålla koll på helheterna i räkneuppgifterna om det är flera steg de behöver tänka. Vid samtal kring en av räkneuppgifterna i intervjun (3 + 9 = 14 - 2 = _ + 7) förklarade lärare 5 därför att de brukar be eleverna räkna samman en helhet i taget. Först exempelvis i denna uppgift räkna ihop 3 och 9, skriva en notis för att komma ihåg, därefter ta nästa och göra likadant för att förstå att det handlar om helheter. Vid samtal kring samma uppgift (3 + 9 = 14 - 2 = _ + 7) förklarade lärare 3 att *”jag tror inte alla hade vetat vart de skulle börja eftersom det inte står ett likhetstecken på slutet. Nu måste de ju räkna ut vad som ska stå på den högra sidan av likhetstecknet och dessutom räkna in sjuan i det. Jag tror att det hade förvirrat många att det står en siffra bakom det sista likhetstecknet. Det är nog stor chans att de hade skrivit 12 och inte räknat med sjuan.”*. Lärare 2 gav även förslag utifrån hur eleverna tidigare gjort och sa att vissa elever även kan lägga till ett likhetstecken i slutet för att tolv ska stå ensamt. Lärare 4 beskrev ytterligare ett problem i vid sådana uppgifter och sa att ”*många elever tänker nog att ”det står 3 + 9 är lika med någonting och då måste ju svaret komma efter, ja jag tror att det blir svårt de är så vana vid att det ska vara 3 + 9 och sedan direkt ett svar, men här händer det ju något nytt ja och sen ytterligare något nytt det är supersvårt när det blir så många steg”*.

Varierad undervisning för en djupare förståelse

Flera av lärarna betonade vikten av att som lärare vara flexibel och erbjuda flera olika sätt att undervisa inom området. Samtliga lärare pratade om praktiskt arbete, att använda våg och laborativt material för att erbjuda visualisering av likhetstecken. Lärarna pratade även om att de arbetat varierat där de både använder sig av individuellt arbete i lärobok och mer praktiskt eller gemensamt arbete.

Lärare 4 beskrev att de utgår ifrån läroboken men specifikt i inledningen av lektionen eller när de exempelvis introducerade likhetstecknet från början arbetade de mer tillsammans och på tavlan i helklass. Kring den första räkneuppgiften i intervjun (7 + 4 _ 9 + 2) beskrev läraren att ”*Jag skulle kunna tänka att man skulle kunna skriva en sådan här uppgift för tavlan och sen inte säga så mycket till att börja med. Jag tror på att man löser problem i helklass och alla får komma till tals liksom, jag tror det är viktigt att alla får komma till tals vad de tror och tänker så vi arbetar också mycket i par där de får prata med varandra och förklara vad de tänker. Sedan får de testa själva och därefter återkopplar vi igen i helklass för att se hur det gått.”*. Flera av de andra lärarna samtalade även kring vikten av att prata om likhetstecknet, både i helklass och i mindre grupper eller par för att samtliga ska få talutrymme.

När det kommer till inlärning av likhetstecknet har lärarna något skilda uppfattningar gällande tecknet för inte lika med (≠). För lärare 3 är tecknet en självklarhet och berättade att de introducerar tecknet i samband med introduktionen av likhetstecknet. Ett exempel som framkom i det insamlade materialet var att arbeta med matematiska utsagor där samtliga tal var utsatta och eleverna skulle avgöra om det skulle sättas ut ett likhetstecken eller ett tecken för inte lika med. Lärare 6 ställde sig frågande till tecknet och förstod inte varför det bör användas och hade heller ingen erfarenhet av att ha sett det i läromedel. Lärare 2 och 4 förklarade att de introducerat tecknet och samtalat kring det med eleverna men inte lagt något större fokus på det. Lärare två pratade även utifrån räkneuppgiften 6 + _ ≠ 13 – 3 i intervjun om att tecknet även riskerar att blanda ihop och krångla till förståelsen av likhetstecknet och beskrev å ena sidan att ”*jag upplever att vissa elever tänker att det hela tiden ska vara bara en sak som är rätt och när det då kan vara flera rätta alternativ så kan det också krångla till det för dem. Ibland kan jag uppleva att de vill att det ska vara så himla svartvitt liksom. Nu kan det ju vara ett oändligt antal tal på ena sidan, förutom just talet 4, ja man får ju lägga till vad som helst eftersom det inte ska vara lika med och det tror jag också kan vara svårt för vissa att förstå”*.

Sammanfattning av resultat

Det som framkommit om relationell förståelse och algebraiskt tänkande i undervisningen om likhetstecknet kan utifrån studiens resultat sammanfattas som väldigt komplext och att undervisningen innefattar många svåra delar. Studiens huvudresultat kan summeras som att de icke formella räkneuppgifterna samt överföringen av relationell förståelse från varierat praktiskt arbete till abstrakt arbete visat sig vara problematiskt. Intressanta huvudresultat är även lärarnas meningsskiljaktigheter kring vilka arbetsområden som inkluderas i arbetet med likhetstecknet och inte.

I studiens resultat har det framkommit att de icke formella räkneuppgifterna var det område där lärarna stötte på övervägande problem. Lärarna beskrev att de anser att eleverna är vana de formella uppgifterna och att icke formella uppgifter med exempelvis öppna utsagor eller uppradning av uttryck tycks vara svårt. De flesta var överens om att icke formella räkneuppgifter är ett viktigt inslag i undervisningen men här fanns också tankar kring att det är för tidigt för eleverna i lågstadiet att blanda in icke formella räkneuppgifter. I resultatet framkom det att elever ofta behöver hjälp med att dela upp arbetet stegvis eller att på andra sätt förenkla för att de ska förstå vad uppgifterna handlar om och hur de ska tänka. I anslutning till formella och icke formella räkneuppgifter kan även olika sätt att uttrycka sig kring likhetstecknet knytas an. Utifrån resultatet kan lärarna tolkas vara överens om att uttryck som handlar om att något ska vara värt lika mycket eller ha samma värde kan bidra till relationell förståelse medan uttryck som att en beräkning ska ”bli” ett svar riskerar att föra över operationell förståelse till eleverna. Enligt ena lärarens uttalande var uttryckssättet något som dock kunde anses vara svårt att se någon större effekt av eftersom eleverna i lågstadiet är så unga och inte arbetar med så komplicerad matematik än.

För utveckling av relationell förståelse och algebraiskt tänkande var lärarna eniga om att samtal i mindre grupper där även läraren kunde få en tydlig överblick över eleverna var gynnsamt. Den varierade undervisningen kunde även tolkas som att arbete i lärobok blandat med praktiskt och gemensamt arbete tycktes vara mest framgångsrikt. Vidare har resultatet visat att visualisering av ämnesinnehållet är viktigt för att hjälpa elever utveckla relationell förståelse av likhetstecknet. Samtliga lärare beskrev att de på något sätt använder en våg för att visualisera likheter och likhetstecknet för eleverna. Att visualisera kunde även handla om att ringa in likhetstecknet eller de tal som tillsammans ska representera en helhet. Resultatet pekar på att det praktiska arbetet leder till relationell förståelse men att överföringen av elevernas praktiska kunskaper till mer abstrakt arbete tycks vara svårt.

Slutligen framkom skilda meningar i resultatet kring vissa ämnesinnehåll i undervisningen. Tecken för större än och mindre än (> och <) tycktes ha väldigt olika betydelse för lärarna för att utveckla elevers relationella förståelse. Ännu mer skilda uppfattningar upptäcktes gällande tecknet för inte lika med (≠) och arbetet med sanna och falska utsagor där det för en lärare var en självklarhet medan en annan lärare inte alls såg några fördelar utan endast nackdelar med att använda det i undervisningen. Skilda meningar framkom även gällande algebraiska uttryck och användning av bokstäver. I resultatet framkom att ingen av lärarna vid intervjutillfället hade arbetat med bokstäver som obekanta variabler i lågstadiet. Flera av lärarna beskrev dock att de arbetar med andra figurer eller bilder för att representera okända variabler.

Diskussion

I detta avsnitt kommer både resultatet och metoden att diskuteras. Resultatet kommer att diskuteras i relation till studiens teoretiska ramverk och den tidigare forskning som presenterats under rubriken *Bakgrund*. Därefter kommer metoden som använts för att framställa studiens resultat att diskuteras och problematiseras. Diskussionsavsnittet avslutas med författarens reflektioner samt förslag på vidare forskning.

Resultatdiskussion

I detta avsnitt kommer studiens resultat att diskuteras i relation till den tidigare forskning som studien bygger på. Från det teoretiska ramverket *Algebrans stora idéer* (Blanton m.fl., 2015, s. 43) kommer även idéerna om generaliserad aritmetik, funktionellt tänkande och variabler att inkluderas i diskussionen. Syftet med studien var att öka kunskap och synliggöra lärares perspektiv på undervisningen om likhetstecknet samt utifrån dessa beskrivningar synliggöra huruvida undervisningen kan bidra till relationell förståelse och algebraiskt tänkande hos elever. För att besvara studiens syfte kommer resultatet i relation till den tidigare forskningen och idéerna från teorin att diskuteras uppdelat utifrån de tre huvudresultat som togs fram i resultatsammanfattningen.

Användningen av- och svårigheterna med icke formella räkneuppgifter

Återkommande i studiens resultat var användandet av icke formella räkneuppgifter i undervisningen samt hur elever uppfattar dem. I denna studie framgick det att flera lärare uppmärksammat svårigheter hos elever när det handlar om att förstå att ett tal kan skrivas på flera olika sätt samt med olika räknesätt men fortfarande representera samma värde. Problematiken är även uppmärksammad i tidigare forskning som bland annat framställer att matematikundervisningen bör behandla räkneuppgifter med uppradning av uttryck (Knuth m.fl., 2006, s. 310) för att visualisera att ett värde kan beskrivas på olika sätt. I resultatet för denna studie påvisade lärare i enlighet med detta att de använder flera olika typer av icke formella arbetsuppgifter i sin undervisning, däribland räkneuppgifter som innefattar uppradning av uttryck. Resultatet visade bland annat att lärare använder sig av uppradning där de bygger på med väldigt många likhetstecken där syftet är att det totala värdet alltid ska bli samma. Andra sätt lärarna gav exempel på kunde vara att välja ett specifikt tal som utgångspunkt och därefter låta eleverna komma på olika sätt att dela upp talet och skriva det på. Att arbeta med olika icke formella uppgifter har även betonats av forskare som dessutom uttryckt att variationen av räkneuppgifterna bör ha en omfattande roll i undervisningen (Powell, 2015, s. 269). Lärarna i denna studie lyfte alltså flera exempel från sin undervisning där syftet var att eleverna ska förstå att ett tal kan skrivas på olika sätt men fortfarande representera samma värde. Även detta kan kopplas till studiens teoretiska ramverk där Blanton m.fl. (2015, s. 61–62) lyfter förmågan om generaliserad aritmetik som handlar om förmågan att se strukturer och förstå att ett specifikt värde kan skriva på olika sätt. Detta anses vara en viktig förmåga som ger förutsättningar att anamma algebraisk förståelse.

Vad gäller problematiken med icke formella räkneuppgifter visar resultatet även att lärare tenderade att se att de elever som har svårt för icke formella räkneuppgifter även var de elever som samtalar kring likhetstecknet utifrån en operationell förståelse. Hur elever samtalar kring likhetstecknet och hur de använder det i arbete kan alltså tolkas ha en koppling utifrån studiens resultat. I resultatet framkommer alltså, i enlighet med forskning att operationell förståelse av likhetstecknet präglas av resonemang likt att det i en matematisk utsaga ska ”bli” något eller att man ska utföra en beräkning på vänster sida av likhetstecknet är att få fram ett svar på andra sidan (Blanton m.fl., 2018, s. 176; Stephens m.fl., 2021, s. 9). Blanton m.fl. (2018, s. 174) förklarar att elever med denna förståelse för likhetstecknet har svårt när räkneuppgifterna har en annan utformning än det formella uttrycket, vilket även var tydligt i denna studies resultat. I resultatet för denna studie framkommer det att lärarna var medvetna och överens om att även sättet de själva uttrycker sig på kan ha en viss påverkan på eleverna. Resultatet visade att flera lärare medvetet reflekterat över och aktivt försöker använda uttryck som knyter an till att likhetstecknet handlar om likheter, det vill säga ett mer relationellt sätt att tänka. Detta återfinns i den tidigare forskningen där lärarens sätt att uttrycka sig ansågs vara avgörande för elevers förståelse. Kusuma m.fl. (2018, s. 6) beskrev att läraren bör fokusera på en variation av frågor som bidrar till ett mer kreativt tänkande hos sina elever vilket resultatet i denna studie visar att lärarna haft i åtanke.

Praktiskt, varierat arbete och övergången till abstrakt

Bland lärarnas beskrivningar i denna studie framgick det att samtliga arbetar mycket praktiskt i introduktionen av arbetet med likhetstecknet. Användning av våg var ett återkommande moment enligt beskrivningarna. Vågen ansågs vara framgångsrik och några av lärarna beskrev att de började väldigt simpelt där föremål på vågen användes som representation för- och visualisering av antal för att därefter succesivt övergå till användning av siffror. Arbetet under övergången till siffror skedde fortfarande på en våg för att visualisera att likhetstecknet handlar om lika värde och att det ska vara samma antal på båda sidor. En svårighet för elever beskrevs vara övergången från det konkreta till det abstrakta. Lärarna beskrev att de många gånger kunde uppfatta att elever i praktiskt arbete förstod likhetstecknet både i samtal och arbete. Att sedan applicera detta på abstrakt arbete, till exempel i en arbetsbok, beskrevs vara svårt för många. Att elever muntligt kan definiera likhetstecknet korrekt sett ur ett relationellt perspektiv men stöta på problem när de inte tydligt ser matematiken framför sig är inom tidigare forskning ett känt fenomen (Kusuma m.fl., 2018, s. 6). En möjlig orsak till detta kan vara att elever inte har en vana av att applicera sina kunskaper och sin förståelse i praktiken. I den tidigare forskningen anses detta kunna behjälpas med repetition och synliggörande med hjälp av fysiska och praktiska hjälpmedel (Milinković m.fl., s. 28–30).

Variationen av uppgifters utformning i undervisningen om likhetstecknet var något som flera av lärarna pratade om. Lärarna beskrev att de såg att det fanns elever som kunde klara av formella uppgifter väldigt bra men när de exponerades för icke formella uppgifter upplevde flera av lärarna att elever fick problem. Denna problematik går tydligt att koppla till den tidigare forskningen. Skemp (1978, s. 10) förklarar att elever utan relationell förståelse genom imitation av hur de tidigare klarat uppgifter kan applicera samma metod på en ny uppgift och därmed klara av många uppgifter under förutsättning att de är utformade på samma sätt. För de elever som inte har den djupare förståelsen visar den tidigare forskningen att det kan skapa problem för dessa elever när uppgifter eller frågor ställs på olika sätt (Skemp, 1978, s. 10). Resultatet visade att flera lärare upplevde att eleverna blev vana vid formella räkneuppgifter och att problematiken visade sig när icke formella räkneuppgifter blandades in. Detta var även anledning till att en av lärarna valde att exempelvis tidigt i lågstadiet börja med laborationer och att variera hur räkneuppgifterna i deras undervisning utformas. För att stötta eleverna när uppgifter exempelvis krävde flera uträkningar eller vid andra icke formella räkneuppgifter beskrev lärarna även att de kunde hjälpa eleverna genom att ringa in exempelvis likhetstecknet för att påminna om var det är eller ringa in de tal som tillhör samma beräkning. Att tidigt börja med variation i utformningen av räkneuppgifterna är även något som återfinns och uppmuntras i den tidigare forskningen (Blanton m.fl., 2018, s. 185). Inom området för öppna utsagor och variation i utformning av räkneuppgifter finns även resultat i denna studie som saknar belägg i den tidigare forskningen. En av lärarna i denna studie har upplevt att många elever i lågstadiet inte är mottagliga för öppna utsagor eller andra variationer av icke formella räkneuppgifter. Enligt detta resonemang anses det att undervisningen snarare bör börja med de formella räkneuppgifterna för att ge eleverna en bas att stå på innan de icke formella räkneuppgifterna i högre årskurser blandas in.

Skilda uppfattningar om inkludering av arbetsområden

I denna studie visade resultatet varierade erfarenheter och tankar kring arbetet med okända variabler. Ingen lärare som deltog i denna studie visade sig arbeta med bokstäver i sin undervisning under lågstadiet. Några lärare gjorde dock kopplingar till algebra när de arbetar med bilder eller föremål som ersättning för bokstäver. Arbetet med obekanta tal är ett väl omtalat område inom tidigare forskning och påstås vara viktigt för att utveckla färdigheter och förbereda elever för algebra. Blanton m.fl. (2018, s. 192) har uttalat att elever behöver en grund som baseras på att kunna jämföra kvantiteter samt förmågan att hantera obekanta tal för att utveckla algebraisk förståelse. En möjlig slutsats av detta skulle kunna vara att bokstäver, som blir allt vanligare högre upp i årskurserna, behöver introduceras tidigare. Både lärare i denna studie och tidigare forskningen har som tidigare beskrivits framställt att övergången från konkret till abstrakt är svårt (Kusuma m.fl., 2018, s. 6). En intressant tanke rörande detta är därför ifall lärare skulle behöva introducera bokstäver som obekanta tal i tidigare årskurser än vad lärarna i denna studie gav uttryck för. Att påbörja användandet av bokstäver tidigt skulle kunna ge elever bättre förutsättningar att hantera och förstå bokstäver som okända variabler tidigare. Det faktum att en av lärarna i denna studie framställer att obekanta föremål inte är en del av sin undervisning blir dock en tydlig avvikelse från forskningen. Sett till vad forskning i detta stycke framställt vara framgångsfaktorer för algebraisk förståelse kan denna exkludering vara en möjlig anledning till att elever stöter på problem. Det finns dock flera exempel i denna studies resultat som går i linje med vad forskningen framställer. I studien har exempel lyfts fram från lärare som använder räkneuppgifter där två okända variabler tillsammans ska motsvara ett bestämt tal. Detta kan tolkas som arbetsuppgifter där eleverna får fundera kring hur bestämmelse av ena variabeln påverkar vad den andra okända variabeln ska representera och är en tydlig koppling till vad som framgår i forskningen. I det teoretiska ramverket om *Algebrans stora idéer* framgår bland annat att för att kunna utveckla algebraisk förståelse behöver elever även förstå hur okända variabler kan påverka varandra (Blanton m.fl., 2015, s. 45,59).

Intressanta upptäckter har även gjorts vad gäller användningen av tecken för större än och mindre än (> och <) samt gällande att undervisa kring sanna eller falska matematiska utsagor och användandet av tecknet för inte lika med (≠). Bland lärarna i denna studie är användningen av större än och mindre än (> och <) integrerat i undervisningen. Något som endast förekommer i ett fall i denna studie är arbete med sanna eller falska utsagor. I detta fall inkluderades tecknet för inte lika med (≠) och det handlade för eleverna om att sätta ut rätt tecken i en annars färdig matematisk utsaga. Utifrån studiens resultat påvisades inget större engagemang för att elever skulle arbeta med sanna eller falska utsagor. Genom att arbeta med dessa olika tecken kan elever enligt forskare utveckla viktiga förmågor om relationer mellan tal och dess värden i olika uttrycksformer (Blanton m.fl., 2018, s. 192). Denna iakttagelse i resultatet frångår en av idéerna i det teoretiska ramverkets som handlar om generaliserad aritmetik (Blanton m.fl., 2015, s. 43). Idén innebär att elever ska förstå att en utsaga kan skrivas på olika sätt och ändå ha samma värde, exempelvis som Blanton m.fl. (2015, s. 61–62) beskriver att 160 kan skrivas som både 39 + 121 och 121 + 39. Elever bör enligt teorin alltså förstå att dessa utsagor med ett likhetstecken emellan är sann då de motsvarar samma summa. Inom teorin anses att arbete med sanna och/eller falska utsagor bidrar till generaliseringsförmågan som är en av idéerna för att bidra till utvecklandet av algebraisk förståelse (Blanton m.fl., 2015, s. 61–62). Utifrån denna studies resultat kan det därför tolkas som att denna idé inte uppfylls av flera lärare och avsaknaden av innehållet i undervisning skulle kunna leda till att elever inte utvecklar algebraisk förmåga.

Metoddiskussion

För denna studie valdes kvalitativ insamlingsmetod i form av individuella intervjuer med sex verksamma lärare. Som alternativ hade observationer kunnat genomföras för att synliggöra hur verksamheten faktiskt ser ut, detta hade dock inte utmynnat i samma inblick i hur arbete med exempelvis planering ser ut. Det hade inte heller givit resultat för hur lärare resonerar kring vilket innehåll och vilka metoder som ansågs vara viktiga och inte. Eftersom studien syftat till att innehålla många resonemang kring undervisningen och dess bakomliggande idéer var lärarperspektivet mer lämpligt. En risk med kvalitativa intervjuer är att de ofta bara har ett fåtal informanter vilket leder till att det är svårt att framställa generaliserbara resultat (Stukát, 2011, s. 36). Denna studie syftar dock i enlighet med Larsen (2018, s. 37) till att skapa en form av överförbarhet där innehållet trots bristande omfattning kan bidra till nyttiga slutsatser för andra att ta del av. Denna studie har visat på resultat som både går i linje med tidigare forskning och resultat som avviker från forskningen, vilket är viktiga bidrag till forskningen. Att finna dessa varierande upptäckter var även syftet med studien vilket visar att metoden varit bidragande för att besvara studiens syfte.

För att göra observationer hade det även krävts att samtliga berörda klasser aktivt undervisade om likhetstecknet vid de tillfällen jag besökte dem. Eftersom arbetet med likhetstecknet, vilket även framkom under flera intervjuer, är ett långsiktigt arbete som pågår under hela lågstadiet lämpade det sig bättre att låta lärarna beskriva arbetet under dessa år. Vid själva genomförandet av intervjuer finns många kritiska aspekter. Bland annat finns risker gällande reliabiliteten där respondenter skulle kunna känna sig rädda att exempelvis svara fel i intervjuer (Larsen, 2018, s. 131). För att minimera riskerna och säkerställa god reliabilitet justerades bland annat intervjuguiden till att innehålla mer öppna och fria frågor och känslan var att lärarna kände sig trygga i intervjusituationen.

Efter materialinsamlingen valdes en deduktiv metod vid första steget av analysen. Resultatet analyserades med utgångspunkt i en av idéerna från det teoretiska ramverket om algebrans stora idéer. Enligt teorin är dessa kategorier en förutsättning och väl bidragande faktorer till utvecklandet av relationell förståelse och algebraiskt tänkande, vilket är kärnan i studien. Metoden bidrog därmed i detta steg till att bibehålla fokus i arbetet mot studiens syfte. Att analysera med utgångspunkt och direkt koppling till teorin bidrog till en tydlig koppling mellan å ena sidan lärarnas erfarenheter om undervisning samt elevers förståelse och å andra sidan vad tidigare forskning beskriver vara framgångsfaktorer. En risk med analyser av kvalitativ empiri kopplas till studiens trovärdighet och handlar om de tolkningar som görs under analysen (Stukát, 2011, s. 36). Tolkningar har säkerligen gjorts även i denna studie som kan ha påverkat utfallet. Valet att använda deduktiv metod minimerar dock dessa tolkningar då materialet inte granskats helt fritt utan har gjorts utifrån fyra kategorier. En nackdel med den deduktiva analysmetoden är att andra relevanta delar än de som tas fram genom att endast kolla utifrån teorin kan missas. Detta innebär att studiens utfall hade kunnat bli annorlunda om analysen gjorts induktivt. Genom att använda teorin som utgångspunkt minskar dock risken för många egna tolkningar och resultatet blir som sagt tydligare kopplat till forskning och därmed även studiens syfte. Genom att tydligt ha beskrivit tillvägagångssätt för hela studiens arbetsgång, från planering till genomförande och därefter analysarbete blir arbetet genomskinligt. Genomskinligheten är en annan aspekt till att öka en studies trovärdighet (Stukát, 2015, s. 46–47, 130).

Avslutande reflektioner och förslag på vidare forskning

Efter genomförd studie och analys kan slutsatser dras gällande att undervisningen om likhetstecknet är ett svårt och mångfacetterat område. Syftet med studien har varit att öka kunskapen kring lärares undervisning om likhetstecknet genom sex lärares beskrivningar av upplevelser och erfarenheter. Därigenom synliggöra huruvida undervisningen bidrar till utvecklande av relationell förståelse och algebraiskt tänkande hos elever. Enligt studiens tidigare forskning och teoretiska ramverk är den relationella förståelsen av likhetstecknet en förutsättning för att utveckla en algebraisk förståelse. Gällande elevers förmåga att anamma den relationella förståelsen visar denna studie att det tycks vara både svårt och tidskrävande. Intressant är att studien påvisat att lärarna övervägande använder sig av de flesta av de undervisningsmetoder och innehåll som forskning och studiens teori argumenterar för. Trots detta utmynnar denna studie i att lärarna beskriver svårigheter i sin undervisning och när det gäller elevers utveckling av relationell förståelse. Utifrån detta kan en slutsats av denna studie beskrivas som att trots att lärare undervisar med metoder och hjälpmedel som framhävs av forskning är den relationella förståelsen av likhetstecknet tidskrävande och svår att befästa. Studien har lyft exempel och diskussioner där resultatet i studien avviker sig från den tidigare forskningen, dessa avvikelser bedöms dock inte vara tillräckligt omfattande för att vara direkt avgörande för utfallet. I det stora hela följer lärarna i studien det som lyfts i för att ge eleverna förutsättningar att anamma relationell förståelse. En slutsats utifrån detta skulle därför kunna vara att relationell förståelse och algebraiskt tänkande helt enkelt tar lång tid att utveckla och något lärare behöver aktivt arbeta med under många år.

Vad som dock är intressant är diskussionen kring användandet och introduktionen av okända variabler i de tidiga årskurserna. Utifrån studien visar det delade meningar från lärarna rörande när och i vilken utsträckning de bör användas. Forskningen menar alltså att det är viktigt att elever lär sig i tidig ålder medan lärare påstår att de ibland kan kännas för tidigt. Intressant vore därför att se vidare forskning kring när och hur detta kan ge bäst effekt för elever att anamma relationell förståelse och utveckla ett algebraiskt tänkande. I studiens framfördes även flera förslag på hur lärarna beskrev att de brukade stötta sina elever i undervisningen om likhetstecknet. Stöd och anpassningar är något som denna studies tidigare forskning inte haft som största fokus då själva undervisningen som helhet varit det primära. För vidare forskning vore det därför intressant att undersöka hur problematiska områden inom undervisningen om likhetstecknet skulle kunna bemötas av lärare för att stötta eleverna. Detta skulle exempelvis kunna vara när elever vid uppgifter som kräver flera steg inte vet var de ska börja och därmed fastnar.

Referenser

Blanton, M., Otalora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 167-250. DOI: 10.1080/10986065.2018.1474534.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87.

Dahlgren L.O., & Johansson K. (2019). Fenomenografi. I: Fejes, A. & Thornberg, R. (red.) (2019). *Handbok i kvalitativ analys*. Stockholm: Liber. s. 179–192

Davidsson, B. (2007). Fokuserade gruppintervjuer. I: Dimenäs, J. (red.) (2007*). Lära till lärare: att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik,* Stockholm, Liber. s. 63–69

Fejes, A., & Thornberg, R. (2019). Kvalitativ forskning och kvalitativ analys. I: Fejes, A. & Thornberg, R. (red.) (2019). *Handbok i kvalitativ analys*. Stockholm: Liber. s. 16–43.

Kihlström S. (2007). Fenomenografi som forskningsansats. I: Dimenäs, J. (red.) (2007). *Lära till lärare. Att utveckla läraryrket – vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik.* Stockholm. Liber. s. 157–173.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM. Göteborg: Göteborgs universitet.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312. DOI:10.2307/30034852.

Kusuma, N. F., Subanti, S., & Usodo, B. (2018) Students' misconception on equal sign. *Journal of Physics: Conference Series, 1008*(1), 1-6. DOI: 10.1088/1742–6596/1008/1/012058.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Larsen, A. K. (2018). *Metod helt enkelt: en introduktion till samhällsvetenskaplig metod*. Malmö: Gleerups.

Lee, J., & Pang, J. (2022). What is so Complicated in Developing Students' Conception of the Equal Sign? *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(2), 559-580. DOI: 10.1007/s10763-022-10248-8.

Lyle, J. (2003). Stimulated recall: a report on its use in naturalistic research. *British Educational Research Journal,* 29(6), 861-878. DOI: 10.1080/0141192032000137349.

Madej, L. (2021a). Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign—the Swedish Case. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20(*2), 321-343. DOI: 10.1007/s10763-020-10144-z.

Madej, L. (2021b). *X - men sen då? Algebrans stora idéer från första klass till högre matematik. Med fokus på tidig algebra i Sverige* (Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Educational Sciences, 23). [Doktorsavhandling]. Uppsala universitet.

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2018). Keys to the Gate? Equal Sign Knowledge at Second Grade Predicts Fourth-Grade Algebra Competence. *Child Development, 91*(1), e14-e28. DOI:10.1111/cdev.13144

Milinković, N. S., Maričić, S. M., & Đokić, O. J. (2022) The Equals Sign – the Problem of Early Algebra Learning and How to Solve It. *Inovacije u Nastavi, 35*(3), 26-43. DOI:10.5937/inovacije2203026M.

Nationalencyklopedin. (u.å.). Likhetstecken. I *Nationalencyklopedin.* Hämtad 2023, 17 april från http://www-ne-se.www.bibproxy.du.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/likhetstecken

Powell, S. R. (2015). The influence of Symbols and Equations on Understanding Mathematical Equivalence. *Intervention in school and clinic, 50*(5), 255-315. DOI: 10.1177/1053451214560891.

SFS 2010:800. *Skollag*. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15. http://www.jstor.org/stable/41187667

Skolverket (2022a). *Kommentarmaterial för matematik.* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/getFile?file=9790

Skolverket (2022b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2022.* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Stephens, A., Veltri Torres, R., Sung, Y., Strachota, S., Murphy Gardiner, A., Blanton, M., Stroud, R., & Knuth, E. (2021). From "You have to have three numbers and a plus sign" to "It's the exact same thing": K–1 students learn to think relationally about equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*(1), 1-11. DOI: 10.1016/j.jmathb.2021.100871.

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Svenska Akademien (2021b). *Ekvation.* Hämtad 2023, 19 april från https://svenska.se/so/?sok=ekvation&pz=4

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet. https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063/God-forskningssed_VR_2017.pdf

Bilaga 1

HÖGSKOLAN
DALARNA

Information till lågstadielärare om en studie gällande undervisning om likhetstecknet för att gynna algebraisk förståelse

Hej! Jag heter Lina Hägg och studerar till grundskollärare med inriktning åk F-3 vid Högskolan Dalarna. Jag läser sista terminen på utbildningen och skriver just nu mitt examensarbete inom matematikdidaktik. Studien är en kvalitativ intervjustudie och du tillfrågas härmed om deltagande i denna undersökning.

Syftet med studien är att bidra till ökad kunskap om hur verksamma lågstadielärare beskriver sin undervisning om likhetstecknet samt koppla detta till algebraisk förståelse. Studien är tänkt att innehålla sex enskilda intervjuer, dessa är planerade att ta cirka 30–45 minuter. Under intervjuerna samtalas bland annat kring arbetsuppgifter för åk 1–3 innehållande likhetstecknet.

Du som lågstadielärare är utvald genom ett visst godtyckligt urval då jag endast skickat ut förfrågan till några enstaka skolor men detta urval har även skett på grund av den tidsram som arbetet är begränsat till. Du tillfrågas att delta i denna undersökning eftersom du undervisar matematik på lågstadiet och skulle kunna bidra med viktigt och relevant underlag till studien. Samtliga intervjuer kommer spelas in för att säkerställa att jag inte missar något som sägs.

Du som deltar kommer anonymiseras i studien och jag ansvarar dessutom för att endast jag, min handledare och examinator kommer ta del av det insamlade materialet. Undersökningen kommer att presenteras i form av en uppsats vid Högskolan Dalarna och därefter kommer det insamlade materialet att förstöras. Ditt deltagande i undersökningen är helt frivilligt. Du kan när som helst avbryta ditt deltagande utan närmare motivering. När uppsatsen är färdig finns möjlighet för dig att ta del av den.

Ytterligare upplysningar lämnas av nedanstående ansvariga:

Lina Hägg, student	Helén Sterner, handledare
Tel: xxx	Tel: xxx
E-post: xxx	E-post: xxx
Underskrift:	Underskrift:
_______________________	_______________________

Bilaga 2

Intervjuguide

Inledning – Berätta kort syftet med undersökningen, informationsbrevet och att läraren kommer vara anonym. Berätta att intervjun kommer spelas in. Förklara intervjuns upplägg.

Del 1

1. Kan du beskriva någon situation eller liknande som du kommer och tänka på när du tänker på undervisningen om likhetstecknet? Något som hänt som du tycker är intressant eller skulle vilja lyfta.

- *Något som en elev upptäckt eller något ni pratat om.*

2. Har du några exempel du kan beskriva där elever hamnar i problem i undervisningen om likhetstecknet eller där det uppkommit missförstånd under processen?

- *Hur kan dessa svårigheter/missförstånd upptäckas? Har du något exempel?*
- *Hur har du hanterat dessa situationer?*

3. Kan du beskriva hur eller vad du brukar tänka på när du ska introducera likhetstecknet?

- *Ex, vilket räknesätt eller annat som du brukar fokusera på speciellt i början?*
- *Har du några idéer kring förkunskaper elever brukar ha, som du har speciellt i åtanke?*
- *Tänker du olika när du ska introducera det i olika åldrar? I sådana fall, hur?*

4. Använder du några andra tecken i undervisningen om likhetstecknet än just likhetstecknet? Exempelvis <, >, ≠? Om ja, kan du ge exempel på hur du arbetar med dem?

5. Kan du beskriva eller ge några exempel på hur du tar reda på om och vad eleverna förstått när det gäller likhetstecknet

6. Ser du någon skillnad i hur eleverna definierar och hur de använder likhetstecknet? I sådana fall, hur?

- *Ex, om de säger att de har att göra med att något ”blir”, ska vara ”samma som” är ”lika med”?*

Del 2

I denna del kommer jag berätta lite om vad jag har hittat i forskning inom området och som ligger till grund för mitt arbete. Vi kommer sedan kolla på några olika matematikuppgifter.

För mitt examensarbete har jag läst väldigt mycket forskning, och till väldigt stor utsträckning beskrivs att tidig förståelse av likhetstecknet är väldigt viktig. Starka kopplingar finns till algebraisk förståelse där förståelsen för likhetstecknet spelar en stor roll. Forskning visar dock även att inlärningen av likhetstecknet kan vara problematisk för många elever och att vissa anammar en förståelse som leder till problem när de i de högre årskurserna ska arbeta med algebra. I forskning framkommer att elever utifrån olika typer av matematikuppgifter kan ledas in i olika sätt att tänka och förstå likhetstecknet. Forskare pratar främst om två olika typer av förståelse av likhetstecknet, att vissa elever å ena sidan ser matematikuppgifter som att uträkningar ska göras på vänster sida av likhetstecknet som sedan ska bli ett ”svar” på den högra sidan. Vissa elever ser å andra sidan på matematikuppgifter som att det handlar om likheter och balans mellan de två sidorna av likhetstecknet. Dessa elever har man sett har en djupare förståelse för likhetstecknet och har exempelvis enklare att förstå uppgifter utformade på olika sätt, förstå likheter och olikheter samt utläsa variabler från textuppgifter. Dessa förmågor blir sedan väldigt viktiga när eleverna ska arbeta med svårare algebra.

Vi kommer nu kolla på fyra olika matematikuppgifter eller uttryck, en i taget. Du får titta på den ett tag och sedan berätta vad du tänker kring den för din undervisning.

Stödfrågor:

- Finns det någon situation från din undervisning du kommer och tänka på när du ser den?
- Hur skulle du kunna använda och arbeta med uppgiften i din undervisning?
- Kan du ge något exempel på hur elever skulle kunna tänka eller resonera? Kan du komma på några fallgropar som kan uppstå vid den typen av uppgift?

Uppgift 1
7 + 4 _ 9 + 2

Uppgift 2
X = 50 - 20

Uppgift 3
3 + 9 = 14 - 2 = _ + 7

Uppgift 4
6 + _ ≠ 13 – 3

Avslutning - Finns det något mer du skulle vilja lägga till eller berätta kring undervisningen om likhetstecknet?