HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete

Avancerad nivå

Framgångsrik matematikundervisning i grundskolan

Undervisning som genererar hög måluppfyllelse av läroplanens och kursplanens mål

Författare: Jenny Spett
Handledare: Eva Taflin
Examinator: Maria Bjerneby Häll

Termin: vt 2011
Program: Lärarprogrammet
Ämne/huvudområde: Pedagogiskt arbete
Poäng: 15 Hp

Högskolan Dalarna
791 88 Falun
Sweden
Tel 023-77 80 00

Sammanfattning

Trots alla rapporter om sjunkande resultat i matematikämnet i den svenska skolan så finns det lärare vars elever har en hög uppfyllelse av målen i läroplan och kursplan. Denna studie ägnas åt att genom observationer och intervjuer av en handfull matematiklärare urskilja mönster och gemensamma drag hos dessa. Studien visar att det finns vissa gemensamma drag hos de lärare som bedriver framgångsrik matematikundervisning. För det första finns det ett tydigt mål med undervisningen. Det andra är att de alla tar på sig ledarskapet i klassrummet och ansvaret för undervisningen samtidigt som eleverna involveras i planeringen, både direkt och indirekt. Vidare så betonar lärarna fördelarna med en intressant och rolig undervisning. Det ska vara roligt och intressant att gå i skolan eftersom det gynnar inlärningen. De framhåller alla vikten av att hela tiden ha en dialog med eleverna, att det måste finnas ett samarbete mellan läraren och eleven/eleverna. Att ställa frågor, snarare än att ge svar, är ännu ett gemensamt drag hos de observerade lärarna. Lektionerna präglas i hög grad av att lärarna ställer frågor och följdfrågor till eleverna. Matematisk kunskap ses som viktig av lärarna och de vill erbjuda en undervisning som leder till ett livslångt lärande. Fokus i undervisningen ligger på inte på process utan på förståelse.

Sökord: Framgångsrik undervisning, matematiska resonemang, engagerade lärare, hög måluppfyllelse

Innehållsförteckning

Inledning

Trots de rapporter som kommer om att svenska elever blir allt sämre i matematik så finns det faktiskt lärare som lyckas med sin matematikundervisning. Lärare som under flera års tid haft elever som i betygen visar på hög måluppfyllelse. Vad gör dessa lärare som får så goda resultat? Finns det några gemensamma faktorer som gynnar inlärningen? Hur ser de på inlärning och hur påverkar dessa tankar undervisningen rent konkret?

När jag berättar för människor att jag läser till matematiklärare ryser många och frågar om jag inte är riktigt klok. Reaktionen är en direkt spegling av hur de upplevt matematikundervisningen under sin egen skolgång. I själva verket är jag lika förvånad som de människor jag träffar över att jag valde just matematik som första ämne i min lärarutbildning. Jag hade själv problem med matematiken i skolan och trodde, som de flesta elever, att det berodde på mig själv att jag inte förstod. När jag skulle läsa matematik D på gymnasiet med en för mig ny matematiklärare fick jag nu uppleva miraklet av att förstå! Jag behövde inte nöja mig med att försöka lära mig vilken lösningsmetod som hörde ihop med vilken uppgift. Den här aha-upplevelsen satte djupa spår i mig och påverkade mitt val av ämne när jag bestämde mig för att läsa till lärare.

Jag har en önskan om att den tid som jag lägger ner på mitt examensarbete ska vara till nytta för någon annan. Tid är en ständig bristvara för lärare idag. Jag hoppas att genom att observera lärare, vars elever visar på en hög uppfyllelse av läroplanens och kursplanens mål vilket därmed indikerar att de lyckas med sin matematikundervisning, kunna samla idéer och tips som kan vara till inspiration i undervisningen för matematiklärare, både blivande och redan verksamma.

Litteraturbakgrund

I detta kapitel behandlas forskning och annan litteratur om Framgångsrik undervisning, Pedagogisk grundsyn, Undervisningens upplägg, Matematiska resonemang, Kommunikation och samtal, Ledarskap och planering samt Undervisningens triad.

Sökandet av relevant litteratur har dels bestått i en inventering av kurslitteraturen under min lärarutbildning. Via handledning har jag även fått värdefulla tips på intressant litteratur. Jag har sökt material på http://www.diva-portal.org och http://www.uppsatser.se där jag hittat examensarbeten som rör sig inom samma område som mitt. Referenslistor i examensarbeten har fungerat som källa till ytterligare litteratur. Sökord som jag använt mig av är: matematik, lärare måluppfyllelse, kompetens.

Framgångsrik undervisning

I detta avsnitt beskrivs hur framgångsrik undervisning definieras i litteratur samt hur jag fortsättningsvis kommer att definiera begreppet i denna undersökning.

Efter att ha auskulterat i ett år hos en erfaren matematiklärare kommer Stedøy (2007:242) fram till att en framgångsrik lärare måste uppfylla fyra kriterier.

> Läraren måste ha en djup förståelse för den matematik som undervisningen gäller, en förståelse för vilka svårigheter elever i allmänhet har när de försöker förstå matematik på en given nivå, en god kunskap om hur matematiska idéer kan presenteras för elever på olika sätt och en stark övertygelse att alla barn kan lära sig matematik. Läraren måste också ha i åtanke att elever lär på olika sätt och att det därför krävs att matematiska begrepp och teman presenteras på varierande sätt. (Stedøy, 2007:242)

Framgångsrik undervisning definierar Stedøy med orden: "It has the respect for students as persons, it corrects without squelching, it builds upon strength rather than trying to stamp weakness." (Stedøy 2007:242). Efter att ha definierat vad som kännetecknar högkvalitativ undervisning går Stedøy vidare med att undersöka huruvida detta sätt att undervisa är något man som lärare föds med eller om det går att lära in. Tidigare forskning (Glennkommissionen 2000:22) stödjer tesen att det är möjligt, även för lärare som under lång tid undervisat på ett mer traditionellt sätt, att förändra sin undervisning. Även Stedøys (2007) egen forskning visar att lärare kan lära om och utveckla sin egen undervisning.

I grundskolans kursplan står det att matematikämnet ska ”ge eleven möjlighet […] att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem.” (Skolverket 2000a). I Skolverkets rapport *Lusten att lära – med fokus på matematik* (2003) konstateras att glädje över ny kunskap inte kan kopplas till någon yttre undervisningsstruktur utan handlar om mer komplicerade saker. Rapporten lyfter fram vikten av varierad undervisning när det gäller innehåll och arbetssätt samt att både lärare och elever är engagerade och aktiva under lektionerna. Eleverna har inte bara fått möjlighet att ”utveckla en förmåga att beskriva och reflektera kring matematiska lösningsprocesser" (Skolverket 2003:15), de har även "haft möjlighet att visa och beskriva sina lösningar och hur de kom fram till dem för sina kamrater och de har på olika sätt fått adekvat återkoppling på det de har gjort."(Skolverket 2003:13). Det är även en undervisning som lägger större vikt vid förståelse än vid färdighet och där det finns ett fungerande samspel mellan engagerade lärare och deras elever (2003:24, 40). En viktig faktor för lusten att lära är enligt studien tilltron till den egna förmågan (2003:27). Elever anger läraren som den viktigaste faktorn för lusten att lära, mer specifikt lärare som tror på sina elevers förmåga att lära och som är engagerade och har förmåga att inspirera (Skolverket 2003:34).

Litteraturen ger indikationer på hur framgångsrik undervisning bör bedrivas. **Framgångsrik undervisning** definieras i den här undersökningen som **undervisning som genererar hög uppfyllelse av läroplanens och kursplanernas mål hos eleverna**. Definitionen är vald utifrån det faktum att vi, oavsett åsikt om detta, idag har en skola som använder sig av betyg och kriterier för att bedöma en elevs prestationer. All undervisning i de svenska skolorna regleras av de styrdokument som finns, läroplan samt kursplaner, vilka även ligger till grund för de bedömningskriterier som används vid betygssättning.

Pedagogisk grundsyn

Med pedagogisk grundsyn avser jag hur läraren ser på inlärning. Eftersom läraren är den enskilt viktigaste resursen för inlärning (Carlsson 2008:6; Skolverket 2007:21) betyder det att dennes inställning till inlärning, elever och undervisning kommer att påverka resultatet. Ahlstrand (2003:54-56) anser att det ur *Lpo94* går att vaska fram tre olika sätt att se på hur inlärning och utveckling sker. Dessa tre benämns:

- Det *inlärningsinriktade* synsättet som innebär att kunskap ska förmedlas, företrädesvis av läraren men även av andra vuxna i skolan. Inlärning sker genom att barnet tar in kunskap genom att modellera, träna och repetera.
- Det *utvecklingsinriktade* synsättet, där barnet själv har en inneboende drivkraft och ett intresse av att lära sig nya saker. Barnets utveckling gynnas av möjligheten att få göra egna val. Lärarens roll blir då att invänta signaler från barnet samt att förmedla en tilltro till barnets egen förmåga att lära och konstruera kunskap.
- Det *interaktionistiska* synsättet som innebär att barnet lär sig bäst genom att vara och arbeta tillsammans med andra barn. Samarbete blir därmed viktigt för barns lärande och utveckling.

De tre alternativen speglar tre olika synsätt på barnens roll i och förmåga till lärande, vilket får konsekvenser för hur läraren bemöter barnet. Stensmo (1994:19) menar att det även får konsekvenser för vem som är den centrala aktören i lärande situationer, läraren som lär ut eller eleven som lär in.

De tre synsätten har sin grund i olika teorier om hur lärande och kunskapsbildning går till, nämligen behavioristisk kunskapssyn, konstruktivistisk kunskapssyn och sociokulturell kunskapssyn.

Undervisningens upplägg

I detta avsnitt vill jag visa på att matematisk kompetens handlar om mer än procedurkompetens samt motivera varför jag fortsättningsvis väljer att fokusera på resonemangskompetens.

NCM, *Nationellt Centrum för matematikutbildning* gjorde tillsammans med UFM, *Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik* en kvalitetsgranskning (NCM 2010:3) vars syfte var att bidra till ökad måluppfyllelse hos elever i skolämnet matematik. Alla elever i skolan når inte de mål som finns uppsatta i kursplanen (Skolverket 2000a). Anledningarna är många, varav en del kan hänföras till den svårighet som skolorna har att implementera kursplanen i undervisningen. Studien visar att kursplanen, i fråga om kompetensmålen, verkar ha en obetydlig påverkan när det gäller styrning och vägledning för lärarna (NCM 2010:48). Enligt rapporten är kursplanen alltför kortfattad vilket tillsammans med avsaknaden av exempel på vad kunskapsmålen i realiteten innebär inte gynnar undervisningen (NCM 2010:8). Läroplanen som kom 1994, *Lpo 94*, innebar ett förändrat fokus för matematikundervisningen. Från att tidigare ha tagit sin utgångspunkt i det innehållsliga flyttades blicken till ”den process det innebär att utöva matematik och de förmågor som behövs i denna process, d.v.s. vilka kompetenser som behövs för att framgångsrikt kunna använda matematik.” (NCM 2010:6).

I rapporten från NCM definieras matematisk kompetens som ”förmågan att förstå och använda matematik i olika situationer” (NCM 2010:10) vilket delas in i sex olika områden: problemlösningskompetens, resonemangskompetens, procedurhanterings-kompetens, representationskompetens, sambandskompetens och kommunikations-kompetens (NCM 2010:9-10). I de observationer och intervjuer som ligger till grund för rapporten framgår det att få lärare utförligt har reflekterat över relationen mellan kursplanens mål och deras undervisning i klassrummet (NCM 2010:44). Det faktum att läroböckerna i matematik starkt fokuserar på procedurhantering gör att de andra kompetenserna många gånger inte ges utrymme att utvecklas, ett problem som förstärks av att många lärare ser läroboken som grundstenen i sin planering och undervisning (NCM 2010:32,53). Som lärare måste man vara medveten om lärobokens brister och förtjänster, den är bara ett av flera verktyg i undervisningen (Skolverket 2007). Fokus på procedurhantering ökar med elevernas ålder, samtidigt som de matematiska resonemangen minskar (NCM 2010:44).

Procedurhantering är en av de sex kompetenser som behövs och är viktig för att utveckla en heltäckande matematisk kompetens, men den är inte den enda. Den överrepresentation som procedurhantering har i undervisningen ger inte en heltäckande undervisning. Eleverna ges därmed inte möjlighet att nå målen i skolan eller att förbereda sig inför framtida matematiska utmaningar i livet.

Matematiska resonemang

Ett av strävansmålen i den nu gällande *Kursplan för matematik* (Skolverket 2000a) lyder:

> Skolan skall i sin undervisning av matematik sträva efter att eleven utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang,

> dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande. (Skolverket 2000a)

Här betonas vikten av att både föra logiska resonemang och att kunna kommunicera dem. Detta mål finns med från förskolan upp till gymnasiet. Förskolan ska i sin verksamhet sträva efter att barnen ökar sin ”Förmåga att kunna kommunicera, söka ny kunskap och kunna samarbeta. […] Förskolan skall sträva efter att varje barn utvecklar ett rikt och nyanserat talspråk och sin förmåga att kommunicera med andra och att uttrycka tankar” (Skolverket 1998). ”[Gymnasie]skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt.” (Skolverket 2000b). I den läroplan som börjar gälla hösten 2011, *Lgr 11*, har Skolverket delat upp ovanstående strävansmål i två olika förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla. Det ena är förmågan att ”föra och följa matematiska resonemang”, det andra är förmågan att ”använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” (Skolverket, 2011:63). Delningen kan ses som ett förtydligande av strävansmålets två delar, nämligen först en logisk tankeprocess som eleven sedan ska kunna kommunicera till andra. Det handlar därmed om mer än att samtala om matematik. Detta motiverar att resonemangskompetens blir en av utgångspunkterna i undersökningen.

I följande avsnitt behandlas hur matematiska resonemang beskrivs i litteratur.

Skott m.fl. (2009) skriver i *Matematik för lärare* att ”En fundamental del av att sysselsätta sig med matematik är att resonera om och bevisa samband mellan tal, symboler och geometriska storheter.” (2009:127). Om skolämnet matematik inte innehåller resonemang och bevis borde det inte kallas matematik. Författarna betonar att de med resonera och bevisa inte syftar på att låta elever memorera färdiga bevis utan att det snarare handlar om ett ”angreppssätt på matematik som ska vara genomgående i alla delar av undervisningen” (Skott et al. 2009:130). Författarna tar hjälp av NCTM:s *Principles and Standards for School Mathematics* och den danska *KOM-rapporten* av Niss och Jensen när de ska definiera matematiska resonemang. NCTM delar upp matematiskt resonemang och bevis i två delar, dels en utvecklingsdel som handlar om att ”utveckla förståelse och förklaringar av sammanhang av olika slag” (Skott et al. 2009:128) och dels en kommunikationsdel som handlar om att kunna kommunicera förståelsen till andra. Även i KOM-rapporten delas definitionen av matematiska resonemang upp i två delar, en tolkande och en skapande del. Den tolkande delen handlar om att kunna följa och bedöma ett matematiskt resonemang och den skapande delen om att tänka ut och genomföra dem. Skotts m.fl. (2009:130) tolkning är att det inte nödvändigtvis är någon reell skillnad mellan definitionerna i KOM-rapporten och NCTM, i vilket fall är båda eniga om vikten av att ge eleverna möjlighet både att utveckla och kommunicera matematiska resonemang i skolan.

> I en sådan undervisning är det centralt att eleverna engageras i att *förklara* och *underbygga eller motivera* sina observationer och resultat. […] Målet är alltså att utveckla ett allmänt godtagande av att förklaringar och motiveringar av egna och andras resonemang är en viktig matematisk aktivitet, samt en förmodat gemensam förståelse av vad sådana förklaringar och motiveringar kan bestå av. (Skott et al. 2009:135)

Läraren i klassrummet sätter normen för elevernas prestationer genom de förväntningar som ställs på eleverna i undervisningen. Eftersom läraren har makten, speciellt i de årskurser där betyg utdelas, är det viktigt att läraren använder sin makt till att göra matematiska resonemang till norm i undervisningen, något som bör göras genom att utgå från elevernas arbeten. (Skott et al. 2009:152) Sociomatematiska normer kan bidra till att utveckla det matematiska resonerandet i undervisningen. Exempel på dessa normer är enligt författarna (Skott et al. 2009:152):

- Eleverna ska utveckla och formulera förmodanden om matematiska resultat och samband.
- Alla har till uppgift att förhålla sig aktivt till andras förmodanden, inbegripet att jämföra förmodanden, föreslå möjliga revisioner och undersöka förutsättningarna för att en förmodan stämmer.
- Man ska inte uteslutande referera till procedurer, utan också till procedurernas meningsinnehåll, när man argumenterar för eller emot ett resultat eller ett resonemang.
- I argumentationen ska man hänvisa till någon förmodat gemensam förståelse, d.v.s. till förståelse som accepteras av alla och som därför inte längre kräver ytterligare argumentation.

Skott m.fl. (2009:155) lyfter även fram vikten av ett korrekt och precist språkbruk som underlättar och minskar antalet missförstånd i kommunikationen om matematiska resonemang. Utan kunskap om matematikens olika begrepp får resonemangen ingen mening, förståelsen uteblir. Skolverket (2007:39) pekar på att det även finns risk för att eleverna inte förstår texten i läroböckerna om deras begreppskunskap är begränsad.

Taflin (2007) menar att ”Matematiskt resonemang innebär att matematiska idéer behandlas med hjälp av olika uttrycksformer, t.ex. muntligt, skriftligt, med hjälp av materiel, med gester eller i bild. Matematiska resonemang har som mål att man med hjälp av dem ska kunna dra logiska slutsatser om matematiska idéer och samband och kunna formulera generaliseringar.” (Taflin 2007:110).

Lithner (2007) skriver att elever idag fortfarande till stor del ägnar sig åt utantillinlärning trots de 20 år av forskning och reformering som ägnats åt att lyfta fram problemlösningens roll i matematikundervisningen. Lithner menar att ett problem är att elever får lära sig *Imitativt Resonemang* (IR) istället för dess motsats, *Kreativt Matematiskt Resonemang* (KMR), (Lithner 2007:255). Med *Imitativt Resonemang* (IR) menar Lithner (2007:258-259) ett resonerande som uteslutande handlar om avskrivning, att komma ihåg hela lösningar eller memorerade algoritmer utan bakomliggande förståelse. Motsatsen, KMR, ska uppfylla tre kriterier, nämligen (Tranbeck 2010:5-6):

1. **Nyhet**. En ny (för lösaren) sekvens av lösningsresonemang skapas, eller en bortglömd sådan återskapas.
2. **Rimlighet.** Det finns motiverande argument som stödjer strategivalets och/eller strategigenomförandets sanningsgrad och rimlighet.
3. **Matematisk grund**. Argumenten är förankrade i inneboende matematiska egenskaper hos komponenterna som ingår i resonemanget.

När Polya (1954:v-vi, x) diskuterar matematiska resonemang och bevisföring, som han anser har en given plats i matematikundervisningen, lyfter han fram gissningar som komplement till det demonstrativa resonerandet. Matematiska bevis bygger givetvis på väl underbyggda logiska resonemang, inte på sannolikhet eller gissningar. Det Polya vill lyfta fram är gissningarna som skapare av kreativa möjligheter att upptäcka nya matematiska kunskaper. Väl valda gissningar spelar en viktig roll vid problemlösning. All matematik som idag är bevisad har någon gång börjat som en gissning.

Kommunikation och samtal

Här kommer jag att belysa vad litteraturen säger om samtal och kommunikation i matematikundervisningen och hur det påverkar inlärningen.

Silver och Smith (2001:11) pekar på att matematikundervisningen högre upp i åldrarna ägnar liten uppmärksamhet åt kommunikation. ”I ett traditionellt klassrum förväntas läraren förklara och eleverna komma ihåg.” (Silver & Smith 2001:11). Undervisningen kännetecknas där av tystnad, memorering, imitation och eleverna ombeds sällan motivera eller förklara sitt tänkande. Den reformering av undervisningen som enligt författarna pågår lyfter fram matematiken som en social aktivitet, där kommunikationen spelar en väsentlig roll. Lärarens roll förändras och utvidgas till att även inkludera en samtalsroll.

> Att framställa frågor och uppgifter som väcker, engagerar och utmanar varje elevs tänkande; att noga lyssna till varje elevs idéer; att be elever klargöra och motivera sina idéer muntligt och skriftligt; att avgöra vad som ska följas upp djupare bland de idéer som elever för fram i en diskussion; att avgöra när och hur matematisk notation och språk skall fogas till elevens idéer; att avgöra när information skall tillhandahållas, när ett spörsmål skall förklaras, när man bör skapa en modell, när ledning bör lämnas och när eleven bör få brottas med en svårighet; att övervaka elevernas deltagande i diskussioner och avgöra när och hur varje elev bör uppmuntras att delta. (Silver & Smith 2001:12)

Den reformerade undervisningen ger elever en chans ”att utöva matematik snarare än att få matematik gjord åt sig.” (Silver & Smith 2001:12). Det handlar inte bara om att leverera ett rätt svar utan även att få motivera sitt tänkande, en undervisning som kännetecknas av kommunikation. Silver och Smith (2001:13-15) återger en observerad lektion i Mrs Nelsons klassrum. Mrs Nelson är en grundskollärare som försökt skapa en klassrumsmiljö rik på kommunikation där hennes elever kan lära sig matematik. Hon jobbar på en tätortskola i ett fattigt område. På den aktuella lektionen är det en sjundeklassare som ska lösa följande uppgift (Referat från lektionen se Bilaga 1.):

> Förhållandet mellan en rektangels längd och dess bredd är 4 till 3.
> Dess area är 300 kvadrattum. Vilken är dess längd och dess bredd?

Eleverna samarbetar för att lösa uppgiften. Efter en stund frågar Mrs Nelson om någon vill gå fram och berätta hur de tänkt. Silver och Smith (2001:15) lyfter fram tre viktiga ingredienser som de ser som förutsättningar för skapandet av en matematisk samtalsmiljö:

> För det första måste samtal och kommunikation ses som centrala i uppgiften att undervisa i och lära sig matematik. För det andra behöver eleverna förses med givande uppgifter som kan utgöra grund för en innehållsrik matematisk konversation. Det tredje draget är att läraren behöver övervaka elevernas matematiska samtal och vidta lämpliga åtgärder för att främja diskussioner som kan stödja elevernas lärande av betydelsefulla matematiska idéer. (Silver & Smith 2001:15)

Backlund (2003) har utvecklat en metod att organisera undervisningen i matematik som han kallar samarbetslärande. Metoden går, som namnet antyder, ut på att få eleverna att samarbeta med varandra i inlärningsprocessen. Backlund finner stöd för metoden i läroplanen, *Lpo94,* och i grundskolans kursplaner (Skolverket 2000a). Läroplanen säger att ”eleverna ska utveckla sin förmåga … att arbeta och lösa problem … tillsammans med andra” (Backlund 2003:21). Kursplanen säger ”att eleverna ska kunna 'redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt' och 'kommunicera om frågor med matematiskt innehåll'” (Backlund 2003:21). Metoden utvecklades efter författarens upptäckt att samtal och kommunikation skapade förståelse och befäste kunskapen, framförallt för elever med stora svårigheter i matematik. Samtliga elever i klassrummet placeras i strategiskt utvalda och kunskapsmässigt heterogena grupper som tränas i att först och främst hjälpa varandra när behov uppstår istället för att använda läraren som första hjälpinstans. Några av vinsterna med modellen är enligt Backlund (2003:22) att eleverna varje lektion, i kommunikationen med sina gruppkamrater, måste sätta ord på sitt matematiska tänkande samt att de lär sig att sortera ut det som är viktigt i kommunikationen med kamraterna. Runesson (1996:36) menar att elevers olikheter borde ses som en tillgång i undervisningen istället för att utgöra ett hinder som måste organiseras bort, där olikheten kan bli ett redskap för att utveckla elevers tänkande.

Malmer (2006:22) lyfter fram vikten av att samtala matematik och pekar på att matematik är ett kommunikationsämne. ”Matematik bygger till stor del på logiskt tänkande och detta tänkande utvecklas bäst i *samtal och diskussioner* [författarens kursivering] och i ett aktivt skapande. Att tala och göra är därför mycket viktiga inslag i inlärningsprocessen.” (Malmer 2006:22). Genom att samtala undviker man att eleverna använder sig av kopiering, en metod som fungerar till att börja med men inte när kraven på förståelse ökar. Ett sätt att undvika kopiering är enligt Malmer (2006) att använda sig mer av muntlig matematik i skolan, gärna i kombination med ett laborativt arbetssätt. Här spelar språket en stor roll. Läraren bör, gärna i samarbete med föräldrarna, arbeta för att utöka barnens ordförråd för att ge eleverna möjlighet att kommunicera sin kunskap. Malmer avslutar sin artikel med att betona vikten av att stärka lärarnas egen kompetens, både genom en bra grundutbildning men även genom kontinuerlig fortbildning.

Ledarskap och planering

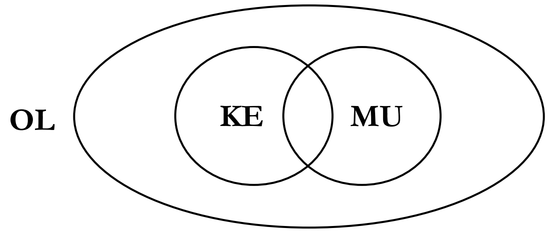
Carlsson (2008) skriver att ”Lärarkompetensen, både den pedagogiska och den ämnesdidaktiska, är den enskilt viktigaste resursen för elevernas resultat.” (Carlsson 2008:8) vilket överensstämmer med Skolverket (2007) att ”Läraren är den enskilt viktigaste faktorn för elevernas lärande.” (2007:21). Det sätter fokus på lärarens roll i undervisningen. Gustavsson och Larsson (2008:4-6) menar att matematikundervisningen behöver ha en långsiktig planering som sträcker sig över alla grundskolans år. Det mest grundläggande handlar om att bestämma målet med undervisningen men de menar även att det är viktigt att man använder matematiska begrepp och termer kontinuerligt i undervisningen. Planeringens syfte är att skapa mening och sammanhang så att eleverna får möjlighet att använda sin kreativitet och nyfikenhet. Det ligger på lärarens ansvar att planera undervisningen så att eleverna kan erbjudas den bästa möjliga situationen för lärande. Stedøy (2007:241) skriver att den höjning av undervisningens kvalitet, som sågs när lärare och forskare samverkade, kom efter fortlöpande planering och reflektion av verksamheten. Eklund och Irehjelm (2010:22, 44, 60) har studerat ett arbetslags försök att höja måluppfyllelsen hos sina elever. De konstaterar att lärarnas medvetenhet om målen i läroplan och kursplanen var hög. Detta, tillsammans med att lärarna vid intervjuer menade att styrdokumenten alltid var involverade i lektionsplaneringen, anger författarna som en av faktorerna till att arbetslaget lyckades i sina intentioner. Lärarna i studien menar att fortbildning inom sitt ämne är en viktig faktor för att öka måluppfyllelsen. För att fortbildningen ska ge någon effekt är det viktigt att ledningen är involverad i verksamheten och har en tydlig plan med vart verksamheten ska utvecklas. Ledningen behöver även skapa tid för gemensam planering och tillsätta resurser. Ett problem med extern utbildning av enstaka lärare är att de kan ha svårt att hävda sig vid återkomsten till kollegor och traditionell skolkultur.

Undervisningens triad

Jaworski (1998:97-122) har, efter att ha genomfört en studie bestående av observationer och intervjuer med erfarna lärare som arbetade utifrån ett undersökande ansats, introducerat en teoretisk konstruktion om undervisningens triad som försöker beskriva undervisningens karaktär. I denna studie har erfarna lärare som förespråkar en undersökande ansats ingått. En undersökande ansats i undervisningen innebär här att eleverna uppmuntras att ställa frågor både om matematik samt om deras egen inlärning av matematik. De tre delarna i undervisningens triad är (Jaworski 1998:117-118):

- *Organisering av Lärandet* (OL) som handlar om situationen i klassrummet såsom lärarens val av aktiviteter, attityd till arbetet med elever och förväntningar på klimatet i klassrummet.
- *Känslighet för Eleverna* (KE) som handlar om att som lärare känna sina elever på djupet och skapa sig en bild av deras behov och vilka inlärningssätt de föredrar.
- *Matematisk Utmaning* (MU) vilket handlar om att ge eleverna matematiska utmaningar som passar deras nivå, vilket gör att KE och MU är nära förknippade.

Ben, en lärare som deltog i Jaworskis studie, illustrerade sin syn på triaden med denna bild:



Figur 1. Undervisningens triad. (Jaworski 1998:119)

Jaworski (1998) vill peka på ett antal aspekter i klassrumsundervisningen som hon menar är viktiga för att elevernas kunskap i matematik ska växa. Dessa illustreras här med exempel från observationerna. Elevernas fokus inte ligger på att hitta ett enkelt svar på en uppgift utan att se mönster. Läraren uppmuntrar eleverna att resonera matematiskt och ser det som sin uppgift att möta eleverna där de är i sina resonemang och ställa frågor som för dem vidare. Detta innebär att läraren måste vara flexibel och anpassa sig efter elevernas frågor och tankegångar. Flexibilitet innebär inte att målet med undervisningen är oklart, bara att vägen dit kan se olika ut. Jaworski visar på läraren Ben som "accepterar elevernas bidrag utan att tolka så mycket själv, och försökte få fram det matematiska innehållet från eleverna" när de skulle repetera vad de lärt sig föregående vecka.

Syfte

Läraren och dennes inställning till sitt arbete och sina elever samt dennes matematikkunskaper pekas ut som viktiga faktorer för att framgångsrik undervisning ska komma till stånd. Jag utgår därmed ifrån att jag genom att studera lärare i deras arbete med elever kommer att få indikationer på hur framgångsrik undervisning bedrivs och vad den kännetecknas av.

Syftet med denna studie är att undersöka hur några lärare vars elever har hög måluppfyllelse i matematik bedriver sin undervisning. Jag vill undersöka vad lärare anser är viktigt och betydelsefullt gällande matematikundervisning för att elever ska nå goda resultat.

Frågeställningar

- Går det att finna några gemensamma drag, en röd tråd, hos de lärare vars elever har hög måluppfyllelse i matematik? Hur ser den/de i så fall ut?
- Hur tolkar och förklarar lärare matematiska resonemang?

Metod för den empiriska undersökningen

Genom att göra en kvalitativ fallstudie kommer jag att undersöka hur lärare vars elever har hög måluppfyllelse bedriver sin undervisning. Syftet undersöks genom observationer av några lärare i samspel med deras elever samt genom en intervju där läraren ges möjlighet att berätta om sin syn på undervisning. Detta avsnitt beskriver och motiverar urvalet, datainsamlingen och dataanalysen för undersökningen.

Fallstudie som verktyg

Forskningsmetod bör väljas utifrån hur forskningsproblemet är formulerat (Patel & Davidsson 2003:51). Frågeställningarna har undersökts genom att en kvalitativ fallstudie genomförts på fem skolor i fyra olika kommuner i Mellansverige. Enligt Merriam är en fallstudie ”en undersökning av en specifik företeelse” (Merriam 1994:24) och alla metoder, från test till intervjuer, kan användas för att samla in vetenskaplig information. En kvalitativ fallstudie innebär att man ”snarare inriktar sig på insikt, upptäckt och tolkning än på hypotesprövning” (Merriam 1994:25) och kan ”definieras som en intensiv helhetsinriktad beskrivning och analys av en enda enhet eller företeelse” (Merriam 1994:29). Även Wallén (2000) skriver att fallstudie som forskningsverktyg innebär ”att man studerar vad som sker under verkliga förhållanden” (Wallén 2000:115). Stensmo (2002:70) menar att just detta, att undersökningen genomförs i sitt naturliga sammanhang, är en av fallstudiens stora fördelar. En svaghet är däremot att det är svårare att generalisera svaren till att gälla andra situationer. Syftet med den här studien är däremot inte att göra generaliseringar för hela studien utan att hitta gemensamma mönster och drag hos de undervisande lärarna som därmed är möjliga att generalisera vilket gör synpunkten mindre relevant i detta fall. Även Wallén (2000:115) lyfter fram en svaghet, nämligen att det inte går att veta om det observerade tillhör vanligheterna eller om det är ett undantag i verksamheten. Eftersom observationerna är förlagda till en dag skulle Walléns synpunkt kunna vara relevant. Däremot är synpunkten mindre relevant i den här undersökningen eftersom jag utgår från att det är lärarnas samlade insats som bidrar det till den höga måluppfyllelsen hos eleverna. Varje pusselbit blir då intressant, oavsett om den är frekvent förekommande eller ej.

Urval

Vid urvalet har ingen hänsyn tagits till om skolorna som lärarna är verksamma på är kommunala eller friskolor, byskolor eller tätortsskolor. Detta för att få en stor bredd på urvalet och därmed öka reliabiliteten för undersökningen. Statistik från Skolverket, siris.skolverket.se, har använts för att hitta relevanta skolor samt jämföra skolorna inbördes och med skolor i hela landet. Samtliga skolor ingår i handledarens kontaktnät[1].

Lärarna är strategiskt utvalda utifrån sina elevers höga måluppfyllelse inom matematik. De sex utvalda lärarna kontaktades först via e-post där undersökningens syfte kortfattat presenterades, nämligen att undersöka lärarens roll i framgångsrik undervisning. I e-posten gavs även information om studiens praktiska tillvägagångssätt samt etiska övervägande. Samtliga lärare ställde sig positiva till att medverka i studien. Statistik med slutbetyg från minst tre år tillbaka ligger till grund för urvalet. Eftersom betyg ännu bara sätts i åttan och nian är samtiga observerade lärare verksamma på högstadiet.

Ett argument mot att använda slutbetyg i år 9 som urvalsindikator är att dessa kan ge en felaktig bild av lärarens insats. En jämförelse av skillnaden mellan elevernas omdöme i år 7 och slutbetyg i år nio skulle ge en bättre indikator på lärarens prestation. Elever som kommer till högstadiet med goda kunskaper och inte märkbart höjer sig ger ändå goda resultat i den statistik som använts för urval till denna studie.

Sammanlagt deltog sex lärare och nio olika klasser i studien. Två av lärarna arbetade tillsammans i klassrummet. Längden på lektionerna varierade från 40 - 60 minuter. Antalet elever varierade från 13 - 32. Lärarna gavs inga instruktioner inför lektionerna för att undvika påverkan på resultatet. Förhoppningen var att få observera lektioner som var ”vanliga” för läraren för att öka studiens validitet.

Av de sex intervjuade lärarna kommer resultatet att fokusera på tre som jag bedömer vara extra intressanta. Att jag väljer att inte ta upp de tre andra lärarna beror på olika anledningar. Det visade sig i efterhand att besöket hos den ena läraren inföll vid en olämplig tidpunkt. Eleverna skulle två dagar senare åka utomlands på skolresa vilket gjorde att matematiklektionen inte var representativ på grund av den mängd tid som ägnades åt praktiska detaljer inför resan. Eleverna hade av naturliga skäl dessutom svårt att fokusera på något annat än resan. De andra lärarna, som arbetade tillsammans i klassrummet, väljer jag bort eftersom jag upplever att den väldigt positiva syn på lärande som de två lärarna förmedlade i intervjun inte gavs möjlighet att genomföra i mötet med eleverna.

[1] Eva Taflin, universitetslektor i matematikdidaktik vid Högskolan Dalarna

Datainsamlingsprocedur

De sex lärarna från fem olika skolor har observerats under en dag vardera. Observatören presenterades vid samtliga lektioner utom en och satt sedan tyst längst ner i klassrummet och antecknade det som hände. Inget observationsschema följdes men olika färger användes för att markera om den antecknade aktiviteten skedde enskilt, parvis, i grupp eller helklass. Ingen inspelning av ljud eller bild har genomförts. Eftersom läraren och dennes interaktion med eleven/eleverna stod i fokus för observationen gjordes bedömningen att skulle det vara möjligt att hinna anteckna det som hände i klassrummet utan stöd av en inspelning. En till två autentiska lektioner per lärare observerades under en dag. Efter varje observationstillfälle lästes anteckningarna igenom och kompletterades vid behov.

Intervjufrågorna testades i en pilotintervju innan fältarbetet tog sin början för att pröva formuleringarna och hur de uppfattades. Efter en viss revidering genomfördes intervjuer med samtliga lärare i anslutning till observationerna där de ombads svara på ett antal öppna frågor (Bilaga 2). I ett av fallen observerades två lärare, som arbetade tillsammans, under en lektion. Intervjun med dem påbörjades innan lektionen för att sen avslutas efter lektionen. I de övriga fallen genomfördes intervjuerna mellan de två observerade lektionerna. Stensmo (2002) definierar öppna frågor som ”frågor utan specificerade svarsalternativ …[vilka] kan ställas då man vill ha ett utförligt svar” (Stensmo 2002:63). Efter godkännande från lärarna spelades intervjuerna in för att underlätta arbetet med analysen av det insamlade materialet. Parallellt med inspelningen fördes även anteckningar av intervjuaren. En inspelning misslyckades varvid den renskrevs omedelbart efter den avslutats med hjälp av de anteckningar som fördes för att få med så mycket som möjligt. Lärarna har i efterhand givits möjlighet att läsa igenom, kommentera och komplettera de uppgifter som använts i arbetet för att minska eventuella missförstånd i kommunikationen och öka studiens reliabilitet.

Forskningsetiska överväganden

Allmänt gäller att jag följt de forskningsetiska principer som Vetenskapsrådet (1990) har tagit fram för humanistiska och samhällsvetenskaplig forskning. Det innebär att jag har följt de fyra grundkrav som ställs på modern forskning, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Informationskravet har beaktats genom att lärarna vid förfrågan om deltagande i studien har delgetts information om forskningsstudiens syfte. Samtyckeskravet har beaktats i och med att samtliga lärare vid förfrågan om deltagande informerats om möjligheten att tacka nej samt att när som helst avbryta sitt deltagande i studien. Efter samråd med lärarna har eleverna inte tillfrågats om deltagande eftersom fokus i studien ligger på läraren. Under observationerna har det inte ställts några frågor till eleverna och endast elevernas förnamn har delgetts observatören. Att lärarna har givits möjlighet att läsa igenom, komplettera och kommentera de uppgifter som använts i arbetet är även det ett beaktande av samtyckeskravet. Konfidentialitetskravet har beaktats genom att samtliga namn på skolor och lärare är fingerade. De inspelade intervjuerna och den transkriberade intervjun är märkta med de fingerade namnen och förvaras säkert så att inga obehöriga kan komma åt dem. Konfidentialitetskravet innebär även att jag inte kan lämna exakta referenser till den statistik som hämtats från siris.skolverket.se eftersom lärarnas identitet då skulle vara möjlig att spåra. Nyttjandekravet har beaktats genom att de uppgifter som lämnats inte kommer att användas i något annat syfte än att i denna studie söka svar på frågeställningarna.

Analysverktyg

Fokus i analysen av datamaterialet kommer att ligga på att besvara de frågeställningar som ställts upp. Lärarens pedagogiska grundsyn antas spela roll för inlärningen varför den kommer att redovisas i resultatet. Litteraturbakgrunden blir det raster som jag kommer att filtrera mina observationer igenom i jakt på gemensamma drag hos informanterna. Både lärarnas agerande i undervisningssituationer och deras svar i intervjuerna kommer att tolkas och analyseras i sökandet efter gemensamma drag.

Varje människa bär med sig sin unika förförståelse som bildar det raster som sinnesintryck och fakta som hon möter filtreras igenom (Merriam 1994:28). Det innebär att jag som forskare aldrig är totalt neutral vid en kvalitativ studie som denna. Min egen förförståelse påverkar analysen av resultatet redan innan sortering, urval och slutledningar påbörjas.

Resultat och analys

Presentation av skolorna

Granskolan är en kommunal förortsskola. Här går nästan 900 elever från förskoleklass till år 9. Enligt skolverket så har 68 % av eleverna föräldrar med eftergymnasial utbildning och 11 % har utländsk bakgrund. Skolan består av många byggnader. Ma/No har en egen byggnad där även lärarna har sina arbetsplatser och fikarum. Samtliga klassrum är utrustade med bildkanon och lärarna har personliga datorer. Även eleverna har egna datorer, tablet-pc, från år 1. De senaste tio åren har andelen elever som nått målen i år 9 i matematik pendlat mellan 94,3 – 99,0 %. Läraren som deltagit i fallstudien heter **Hanna** och hon har arbetat som lärare i drygt 11 år. De två klasser som är föremål för observation består av 15 respektive 13 elever.

Tallskolan är en friskola som ligger i en stor stad. Här går drygt 600 elever från förskoleklass till år 9. Enligt Skolverket har 79 % av eleverna föräldrar med eftergymnasial utbildning och 7 % har utländsk bakgrund. Skolbyggnaden är en klassisk gammal byggnad med många trappor och smala korridorer. Klassrummen är förhållandevis små. Samtliga klassrum är utrustade med Smartboard[2], lärardator och dokumentkamera. Eleverna har däremot inte fått egna datorer av skolan, något som lärarna förutspår kommer att inträffa nästa läsår. De senaste tio åren har 100 % av eleverna som gått ut nian uppnått målen. Läraren som deltagit i fallstudien heter **Catrin** och hon har arbetat som lärare i 16 år. De två klasser som är föremål för observation består av 23 respektive 26 elever.

Björkskolan är en kommunal skola i en mellanstor stad. Skolan är en högstadieskola med ca 500 elever. Enligt Skolverket så har 55 % av eleverna föräldrar med eftergymnasial utbildning och 17 % har utländsk bakgrund. Klassrummen är rymliga. Det klassrummet som jag besökt är utrustat med 4 stycken elevdatorer och en dockningsstation för lärarens personliga dator. Eleverna har inte egna datorer. De senaste tio åren har andelen elever i år 9 som nått målen pendlat mellan 84,9 – 99,2 %. Läraren som deltagit i fallstudien heter **John** och han har jobbat som lärare i 13 år. De senaste tre åren har andelen av Johns nior som klarat målen i snitt varit 96,1 %. De två klasser som är föremål för observation består av 21 respektive 23 elever.

Fallbeskrivningar

Nedan redovisas delar av observationerna och intervjuerna.

Hanna

När Hanna får frågan om hur hennes pedagogiska grundsyn ser ut svarar hon att:

> Det finns två sätt att se på inlärning. Det ena är att människan av naturen är nyfiken och det gäller för oss som lärare att locka fram den nyfikenheten. Man lär sig när man är motiverad och det är man när man är nyfiken. Den andra synen, som står emot den första, är att människan

[2] http://www.smartboard.se/skola

> av naturen är lat och måste mutas eller hotas för att lära sig och då använder man betyg i skolan för att få elever att lära sig.

Hanna ansluter sig till den första synen på inlärning. En annan sak som hon ser som en nödvändighet för god inlärning är att man som lärare tar sig tid för att knyta an till sina elever. ”Det mesta går lättare om man känner sina elever”.

Enligt Hanna innebär framgångsrik undervisning att:

> Eleverna lär sig och tycker att det är kul att lära sig och är nyfikna på att lära sig mer. En framgångsrik lektion kan exempelvis vara när eleverna säger ’Aha!’, de uttrycker därmed att de upptäckt något, förstått något. Att få följdfrågor på något jag gått igenom säger mig också att det har påverkat deras huvuden.

Att skolledningen jobbar med pedagogiska frågor och därmed visar på ett engagemang är viktig bidragande orsak till framgångsrik undervisning anser Hanna.

Hanna menar att:

> eftersom forskningen visar att man lär sig bättre när man har roligt och tycker något är intressant, så varför skulle inte skolan vara rolig. Det betyder inte att läraren ska förvandlas till clown. Men man kan till exempel använda sig av datorn för att öka variationen och för att öva på ’tråkiga’ saker som exempelvis att förkorta bråk.

Hanna använder sig av många enkla gratisprogram i undervisningen som hon har letat fram på nätet. På frågan om det tar mycket tid svarar hon att hon ser det som sin skyldighet gentemot sin arbetsgivare att hålla sig ”up to date” med verkligheten. Att vänta på att bli iväg skickad på utbildning av chefen är oansvarigt anser Hanna. Jobbet blir dessutom roligare och intressantare på det viset.

Hannas lektioner präglas av dialog med eleverna. Resonemangen går fram och tillbaka mellan elever och lärare. Hanna försöker få eleverna att svara på hennes frågor och även deras egna följdfrågor bollar hon gärna tillbaka till eleverna. Genomgången sker på datorn som är kopplad till en bildkanon. Den synkroniseras automatiskt till alla elever så att de får alla genomgångar på sina datorer. Dagens lektion handlar om diagram. Hanna ritar upp ett exempel på datorn (Bilaga 3). Under genomgången ställer hon frågor till eleverna för att repetera de begrepp som de redan gått igenom. ”Vad kallas punkten i mitten?”, ”Vad kallas axlarna?” ”Vad är det för skillnad mellan A och B?” ”Vilka bananer är dyrast, A, B eller C?” Hanna använder sig av ett matematiskt språk under lektionerna vilket enligt Skott m.fl. (2009:155) gynnar förståelsen. När det blir dags för eget arbete får eleverna välja om de vill jobba i boken, arbeta med datorprogrammet Scratch[3] eller göra egna uppgifter med anknytning till genomgången. Hanna uppmuntrar dem att göra egna uppgifter och ger tips på hur de ska komma igång.

När vi pratar om planeringen av undervisningen berättar Hanna att den sker tillsammans med eleverna:

[3] Dataprogram http://scratch.mit.edu/

> I augusti brukar jag ha en lektion tillsammans med eleverna och fundera i stort på hur de tycker att det ska vara upplagt, året. Vill de ha alla kapitel på hösten och bara repetera på våren? Det brukar bli så att de sprider ut bokens kapitel ganska jämt över året. Det är svårare för sjuorna för de har varken träffat på läromedlet eller mig innan, men det går bättre för åttorna och niorna. Tillsammans gör vi ett grundskelett och sen inför varje kapitel gör vi en detaljplanering där de får bestämma om de t.ex. vill gå igenom ett moment varje lektion eller om det är bättre att dra igenom några stycken och sen bara ha enskild räkning. Efter vi har diskuterat det så gör jag en detaljplanering av varje lektion, letar upp bra applikationer på nätet om t.ex. lyckohjul till kapitlet om sannolikhet.

Målet med undervisningen är klart för Hanna, men det finns många vägar dit. Elevernas egna frågor och tankar är med och väljer vägen samtidigt som Hanna hela tiden är med och styr så att de går mot målet.

Hanna säger under intervjun att hon ägnar mycket tid åt att få eleverna att förstå hur mycket de egentligen kan, att stärka deras tilltro till sig själva. Den är väldigt viktig för inlärningen menar hon. ”Jag ägnar väldigt mycket tid åt att försöka få dem att förstå att de redan kan väldigt mycket. Jag tycker att det här ’tilltro till sin egen förmåga’ är det allra viktigaste. […] Det är så många som har så dålig tilltro till sig själva, framförallt i matte.” Hanna ger ett exempel på en elev som inte anser sig vara särskilt duktig i matematik och därför inte resonerar logiskt när hon ska räkna. Hanna försöker få eleverna att koppla på ”verklighetshjärnan tillsammans med mattehjärnan” för att öka deras tilltro till sig själva. Genom att hjälpa eleverna i hur de ska tänka övar hon dem i logiskt matematiskt resonemang.

När vi diskuterar matematiska resonemang visar hon mig en film där en elev löser en uppgift. Eleverna spelar in sig själva och skriver på skärmen samtidigt som de berättar hur de tänker. Det ger läraren en unik möjlighet att få del av elevens resonemang utan att eleven försöker läsa av lärarens kroppsspråk och anpassa sig efter det som han/hon tror är ”det rätta sättet”.

Det skriftliga bedöms med vanliga matematikprov. Hanna säger att hon även på lektionerna när hon går runt och lyssnar på och pratar med eleverna får tillfälle att bedöma detta mål. ”De bästa resonemangen är mellan ett par elever som inte blivit ihoptutade utan som bara spontant börjar resonera med varandra.”

Catrin

När Catrin besvarar frågan om pedagogisk grundsyn är det med orden:

> Jag vet vad jag vill att eleverna ska lära sig, vad målet med undervisningen är. Det gäller att hitta var personen befinner sig, hur mycket de förstår. Helst ska eleverna upptäcka kunskapen själva. Jag visar på vad som finns framåt men de upptäcker själva, då lär de sig mer, det fastnar bättre än om jag berättar för dem.

Vygotskijs utvecklingszoner tycker Catrin är klockrena, det ska inte finnas något tak i undervisningen. Vidare berättar Catrin om den inspiration som hon fått av att läsa om

Maria Montessori. ”Montessori anser att läraren hela tiden ska vara närvarande och ställa den rätta frågan utan att säga svaret, frågan som får eleven att utvecklas.” Catrin nämner även Sokrates och hans öppna frågor utan ett givet svar som en förebild. Elevernas frågor och funderingar är ofta utgångspunkt för undervisningen vilket omöjliggör detaljplanering. Catrin har arbetat som lärare i 15 år, i början detaljplanerade hon men inte längre.

Viljan att ställa den rätta frågan är något som verkligen märks i interaktionen med eleverna. Catrin ställer frågor men ger väldigt sällan några svar. Det är elevernas uppgift. Nästan varje fråga som eleverna ställer till henne bollar hon tillbaka till dem, antingen till den som ställer frågan eller till någon annan elev som hon vet kan hjälpa till att hitta svaret. Det märks att Catrin är lyhörd för eleverna och plockar upp vad de kan och vad de behöver träna mer på. När vi går till den första lektionen med en sjundeklassare berättar hon om upphovet till dagens lektion:

> Jag lyssnade på några elever som skulle lösa en uppgift. De hade inte läst igenom den ordentligt och var därför inte överens om vad de skulle svara på. En av tjejerna sa då: 'Det viktiga är frågan'. Hon har rätt tänkte jag, därför har ska de idag få skriva frågor till några uppgifter (Bilaga 4).

Catrin förklarar dagens uppgift, att skriva frågor till en uppgift, för eleverna genom att gå igenom ett exempel på tavlan. Exemplet lyder: ”Priset var 820 kr. Det gick upp med 42 %. Hur lyder frågan?” Genomgången är en dialog där eleverna tillsammans med Catrin skapar sig en förståelse för uppgiften. Eleverna ger förslag på frågor, ”Vad blir det nya priset?”, Hur många kronor gick priset upp med?”, Hur många procent ska man sänka priset med för att det ska bli det gamla priset?” Catrin ber eleverna att diskutera betygsnivån på frågorna två och två. Efter genomgången delar Catrin ut lappar med uppgifterna (Bilaga 3) och eleverna börjar jobba med den en och en. När de klurat några minuter går de över till att samarbeta med sin bänkkamrat. Catrin uppmanar några elever att skriva frågor som blir riktigt svåra för deras kamrater att lösa. Efter ca 5 minuter följer en gemensam genomgång där eleverna levererar sina förslag på frågor till den första uppgiften: Mängden damm under Eriks säng ökar med 12 % om dagen. Vid ett tillfälle fanns det 4 g damm under sängen. Några exempel lyder:

1. ”Hur många dagar har gått om det nu finns 1 kg damm under sängen?”,
2. ”Hur mycket damm finns det dagen efter?”,
3. ”Hur många dagar tog det att bli 14 g om det var 2 g från början?

När Catrin frågar eleverna vilken de tycker är svårast enas de om den första frågan vilket gör att Catrin säger ”Ok, då löser vi den!” Eleverna arbetar enligt samma procedur som vid genomgången, först enskilt och sen parvis. När de nått en lösning påkallar de Catrins uppmärksamhet och förklarar sin lösning för henne. Eleverna ger intrycket av att vara vana att samarbeta och diskutera. De kommer snabbt igång med arbetet och har inte svårt att sätta ord på sina funderingar och tankar. Klassrummet är litet och eleverna är många, trots det är det en behaglig ljudnivå i klassrummet. Eleverna pratar i vanlig samtalston vilket gör att jag som observatör kan höra vad de flesta säger. De jag hör håller sig samtliga till uppgiften. Efter 13 minuter drar Catrin igång en genomgång av första uppgiften genom att låna en elevs anteckningar och lägga ut dem på tavlan med hjälp av en dokumentkamera så att alla i klassrummet kan se dem. Eleven i fråga berättar själv hur han tänkt när han löste uppgiften.

> Först räknade jag ut 14 * 12 % för att få reda på hur många gram damm det ökade med varje dag, vilket blir 1,68 g. Sen räknade jag ut 1000-14 för att få reda på hur många gram det var upp till 1 kg, 986. Sen delade jag 986 med 1,68 eftersom det ökade med 1,68 g per dag och då får jag reda på hur många dagar det tar innan det finns 1 kg damm under sängen. Det blir 587 om man avrundar till hela dagar och det ska man ju göra för de frågar efter hur många dagar i frågan.

När han är klar frågar Catrin klassen ”Stämmer det?” Några svarar ja, andra nej. Båda sidor ges tillfälle att motivera sina åsikter. En elev påpekar att ösningen inte tar hänsyn till att ökningen per dag inte är konstant. Eleverna resonerar kring hur man ska ställa upp en korrekt ekvation för att lösa problemet. Jag noterar att det mesta av resonemangen sker med ett korrekta matematiska begrepp, något som underlättar kommunikationen och förståelsen. En elev föreslår att man ska skriva: $14 * 1{,}12^x=1000$. I samma andetag frågar han om det går att lösa en sådan ekvation. Catrin bollar vidare fråga till klassen som tillsammans efter lite diskuterande kommer fram till att det borde gå att lösa ekvationen. Catrin bekräftar att det går men hinner inte gå in på hur eftersom lektionen är slut. Flera gånger under helklassdiskussionerna ställer de elever som har problem med att förstå resonemanget som förs frågor för att få hjälp att förstå. Klimatet i klassrummet är öppet och frågorna välkomnas av Catrin som oftast bollar tillbaka dem till klassen för att de, i enlighet med hennes pedagogiska grundsyn själva ska få upptäcka kunskapen.

På nästa lektion är det en sexa som ska ägna sig åt problemlösning (Bilaga 2). Eleverna inleder arbetet själva för att sen gå över till att samarbeta med sin bänkkamrat. Även grannarna bakom eller framför involveras av en del elever. När de anser sig ha hittat en lösning uppmanar Catrin dem att gå till någon annan elev i klassrummet och förklara sina tankar. En elev kommer till eleverna som sitter precis framför mig. Mitt i sin entusiastiska utläggning inser han att han har tänkt helt fel. Det som nu sker fascinerar mig. Eleven låter sig inte nedslås av sin felaktiga lösning, inte heller kamraten som är mottagare av förklaringen, tvärtom. Kamraten uppmanar honom istället ivrigt att gå tillbaka till sin plats och tänka lite till så kommer han nog på det. Inte ett uns av uppgivenhet eller känsla av misslyckande infinner sig, bara ett sug efter att hitta lösningen. Eleverna verkar ha god tilltro till sig själva som matematiker, något som Catrin under intervjun lyfter fram som viktigt. ”Man måste tro på eleverna, lyssna på dem.”

Även denna lektion sker genomgången av uppgiften genom att Catrin lägger en elevlösning under dokumentkameran så att alla kan ta del av den. Catrin ställer frågor för att hjälpa eleven att förtydliga sitt resonemang. När eleven pratat klart frågar Catrin de andra eleverna om det stämmer. De som håller med och de som inte håller med får både motivera sina svar. Catrin är neutral i sitt kroppsspråk vilket gör att eleverna inte vet om lösningen de just fått presenterad för sig är korrekt eller ej, vilket gynnar den efterföljande diskussionen. Under hela genomgången är det tydligt att det viktigaste för Catrin är tankeprocessen, hur eleverna tänker, inte bara att de ska få fram ett korrekt svar.

Framgångsrik undervisning innebär enligt Catrin:

> Undervisning som går framåt så fort som eleven/gruppen tillåter. Mycket matematikkunskaper finns med och mycket matematik-diskussioner mellan elever och lärare. Det ska vara roligt. Eleverna ska ha roligt. Allra bäst är det när det dyker upp dipeks [Catrins egen benämning på didaktisk-pedagogiska kickar], alltså när både jag och eleverna lär oss något. Jag upptäcker att jag har kommit på ett nytt sätt att förklara, eleverna visar på nya sätt att tänka som jag aldrig tänkt på förut.

Matematiska resonemang definierar Catrin som ”förmågan att utifrån en text, ett problem, plocka det som ges, informationen, förstå vad målet är, veta vägen dit och kunna förklara den strukturerat så att andra kan förstå hur man resonerar.” Catrin berättar att de på skolan har gjort en medveten satsning på matematik för att höja elevernas måluppfyllelse. Ett exempel är att alla matematiklärare gick på kurs i problemlösning. Enligt Catrin spelade det stor roll att *alla* lärare var med och att det var något som de verkligen arbetade igenom tills det verkligen var en naturlig del av verksamheten. Ett annat exempel är att de har fördelat om ma/no-tjänsterna på skolan så att en lärare bara undervisar i matematik. Denna tjänst roterar mellan alla lärarna så att han/hon har en chans att fördjupa sig i ämnet och bredda sin undervisning.

Catrin understryker att man som lärare måste tro på sina elever och att man måste lyssna på dem. Annars går det inte veta vad de har förstått och vad de behöver ytterligare stöd att förstå. Hon går vidare med att säga att ”det inte finns några elever som inte kan nå målen om man jobbar målmedvetet och systematiskt med att få dem att förstå.” Skolan har valt att lägga större delen av stödresurserna på de lägre åldrarna, vilket betyder att elever med svårigheter fångas upp tidigt. Catrin och hennes kollegor på högstadiet är ense om att de goda resultaten bland högstadieeleverna är tack vare lågstadielärarnas utmärkta arbete.

John

John beskriver sin syn på inlärning och menar att:

> Inlärning kan ske när man blir stimulerad av någonting att inhämta kunskap. Den stimulansen kan komma av ett intresse, en nyfikenhet men den kan också komma av att någon tvingar dig att ta reda på något, lära dig. Den stimulansen är en första nödvändig ingrediens. Som svar på den stimulansen letar man ett svar för att tillfredställa det väckta behovet. Svaret kan fås på många sätt, genom att läsa, fråga någon, imitation m.m. Sen tar det tid för hjärnan att bearbeta kunskapen så att det blir till förståelse. När man väl har förståelsen blir den kunskapen elastisk på så vis att den kan användas för att förstå andra begrepp, processer eller kunskap.

Det övergripande målet för Johns undervisning är ”att skapa ett intresse för matematik”, vilket han menar att man uppnår ”genom att göra undervisningen rolig, stimulerande och praktiskt användbar”. Detta fokus på processer, som funnits och som ännu finns i skolans matematik, är inte stimulerande i sig anser John.

> Fokus i undervisningen ska istället ligga på förståelsen av matematiska begrepp, vad begreppen betyder och hur de fungerar. Det ger en kunskap som eleven kan applicera på bred front istället för i enstaka situationer. Man kan dela in matematisk kunskap i två olika delar. Det finns en filosofiskt tänkande del och sen finns det en praktiskt applicerbar del. De sitter ihop och man måste kunna hantera båda delarna. Jag tycker att man måste ha den filosofiska delen innan man går vidare till den praktiska delen. Jag kan lära en människa att skruva i en viss typ av skruv. Men om jag lär honom vad en skruv är, och det finns många olika sorters skruvhuvuden, då kan han skruva i vilken skruv som helst. Dit vill jag komma [med min undervisning].

Han tar upp de nationella proven som kan bli ett hinder i undervisningen eftersom lärarna är medvetna om den tyngd som läggs vid deras resultat. Frestelsen är stor att ägna mycket tid åt att träna typiska uppgifter som kommer att generera höga resultat men inte nödvändigtvis ett livslångt lärande.

John använder matematikboken som ett verktyg, men han låter den inte styra undervisningen. Han letar efter en logisk ordning bland de olika kapitlen och låter den ordningen styra planeringen av undervisningen. Varje nytt avsnitt inleds med att introducera nya begrepp och repetera gamla begrepp innan de går över till att praktisera kunskaperna. Under den första lektionen som jag observerar ska eleverna bekanta sig med begreppet vinkel. John inleder lektionen med att tillföra en person till den ”Hall of Fame” som finns uppsatt på tavlan. Arkimedes introduceras för eleverna och John motiverar hans plats vid sidan av de andra kända matematikerna. Eleverna lyssnar och ställer frågor om Arkimedes prestationer. Sen övergår John till att prata om vad en vinkel är. Undervisningen präglas av en dialog mellan läraren och eleverna och även mellan eleverna själva i form av par och grupparbeten. John plockar gärna upp elevernas följdfrågor och låter dem ta utrymme i undervisningen. Efter en repetition av förra veckans lektion talar John om att målet denna lektion, ”när ni går härifrån ska ni kunna mäta och rita vinklar.” Efter det inleds en steg för steg genomgång av hur man ritar en vinkel (Bilaga 5). Under genomgången ställer John hela tiden frågor till eleverna: ”Vad är en punkt? Definiera begreppet!”, ”Var ska jag sätta gradskivan?”, ”Hur vet jag vilken av graderingarna på gradskivan som jag ska använda?”, ”Har ni fattat?”, ”Vad gör vi sen?” När genomgången är klar ger John dem i uppgift att rita tre vinklar, a) 64°, b) 281° och c) 1043°. ”Ni måste kunna förklara för klassen hur ni gjort!” Många har problem med c) och John försöker med hjälp av frågor och påståenden hjälpa dem vidare i sitt tänkande. ”Tänk på en skateboard. Du ska snurra 281°. Är det ett helt varv?” En elev frågar om c) är som ett snabel-a vilket leder till en diskussion mellan några elever som inte förstår tankegången. John låter eleven själv förklara hur han tänkte. Lektionen fortsätter med att John talar om för klassen att ”om några minuter kommer jag välja ut några som får rita på tavlan.” De elever som ritar på tavlan får förklara hur de tänkt. John är med och ställer frågor för att förtydliga deras resonemang så att alla förstår. En elev frågar om vinkeln 1043° finns i verkligheten. ”En väldigt intressant fråga [svarar John]. Jag kan snurra 1043° men jag kan inte rita den i ett plan.” Lektionen börjar närma sig sitt slut och John uppmanar dem att plocka ihop. Eleverna ställer sig upp bakom sina stolar och John frågar dem ”Vad kan du nu som du inte kunde innan?” Några elever svarar Arkimedes, andra att rita vinklar. ”Då har inte den här lektionen varit bortslösad” avslutar John. Ett par gånger i månaden avslutar John lektionerna med att fråga eleverna vad de lärt sig för att uppmuntra dem att reflektera kring sitt eget lärande. Om han märker att eleverna börjar glida iväg under lektionerna tar han gärna till sokratiska frågor för att väcka deras intresse igen.

”Framgångsrik undervisning är undervisning som innebär att eleverna lär sig något och att de utvecklar ett intresse för matematik.” John tror benhårt på att det behövs en lärare som leder eleverna i kunskapsdjungeln. För att läraren ska kunna leda måste han/hon ha överblick över var varje elev befinner sig. Eftersom elever lära sig på olika sätt och befinner sig på olika platser blir det svårt att leda när det är så många elever i varje klass som det är i dagens skola. John anser därför att undervisningsgrupperna bör minskas drastiskt för att gynna elevernas inlärning. För att kunna leda eleverna måste läraren knyta an till sina elever. ”Det är a och o för att få till ett möte med eleverna.” En annan sak som John poängterar är vikten av att som lärare hitta sin egen stil i klassrummet. Läraren måste vara sig själv, bedriva undervisning på sitt sätt, säger han och tar en av sina kollegor som exempel. Kollegan har varit lärare länge och sitter vid katedern hela lektionerna. Enligt John lär sig eleverna massvis under kollegans lektioner, därför att läraren är sig själv. Samtidigt påpekar John att det inte alltid är så lätt att vara sig själv.

> Varje skola har sin tradition och sina oskrivna regler för hur undervisningen ska bedrivas. Det är inte enkelt att komma hit som nyanställd och säga, ’tjena, jag tänker göra så här!’ Efter tio år på skolan, när man har arbetat upp ett förtroende hos kollegor är det lättare att ta ut svängarna och undervisa på sitt eget sätt.

John menar att:

> Ju mer man lär sig, ju mer kunskap man tillägnar sig desto mer förstår man av sin omvärld. Ju mer man förstår av sin omvärld desto tryggare blir man som människa. Syftet med att gå i skolan är inte att få ett bra jobb. Syftet är att förstå sig på sin omgivning och utvecklas som människa.

Matematiska resonemang är, enligt John, resonemang som bygger på en följd av bevisade fakta. Det är i första hand en tankeverksamhet. Kommunikationen kommer in som en metod för att redovisa tankeverksamheten. John säger att ”genom att presentera matematiska begrepp i en logisk följd påvisar jag för eleverna hur ett matematiskt resonemang kan se ut.” Vidare uttrycker han att ”det är nödvändigt att eleverna kan kommunicera sina resonemang för att någon form av bedömning ska kunna komma till stånd.” John använder sig av både skriftliga prov, grupparbeten och diskussioner som underlag för bedömning.

Diskussion

Metoddiskussion

Valet av fallstudie som metod för att besvara frågeställningarna föll väl ut i den meningen att de kunde besvaras. Observationerna genomfördes enligt planerna och det visade sig att det tidsmässigt var möjligt att anteckna det som hände i klassrummet. Problem uppstod när en klass delade upp sig och det därmed inte var möjligt att observera båda grupperna samtidigt. Om jag hade valt att filma kunde jag då ha följt med gruppen som lämnade klassrummet och ändå haft möjlighet att med hjälp av filmen analysera allt som hände under matematiklektionen. Under en av intervjuerna misslyckades ljudupptagningen. Eftersom möjlighet fanns, och tillvaratogs, att renskriva anteckningarna direkt efter den var avslutad bedömer jag att underlaget till analysen av intervjun ändå kan ses som tillfredsställande. Första frågan i intervjun visade sig, trots pilotintervjun, vara för allmänt formulerad och underfrågorna fick användas vid samtliga intervjuer för att precisera vad som skulle besvaras. Att använda både intervjuer och observationer som metod för att besvara frågeställningarna visade sig fungera kompletterande vilket gjorde att frågeställningarna kunde besvaras. Urvalet av informanter kan ifrågasättas eftersom ingen hänsyn har tagits till elevernas resultat när de kom till läraren. Det skulle kunna vara så att informanterna inte bedriver framgångsrik undervisning utan helt enkelt har fått ta över elever från mellanstadiet som där haft lärare som bedrivit framgångsrik undervisning. Det bedöms emellertid som osannolikt att elever med minst godkänt i slutbetyg i matematik i nian enbart skulle få det tack vare bra lärare på mellanstadiet.

Resultatdiskussion

I följande avsnitt diskuteras undersökningens två frågeställningar:

- Går det att finna några gemensamma drag, en röd tråd hos de lärare vars elever har hög måluppfyllelse i matematik? Hur ser den/de i så fall ut?
- Hur tolkar och förklarar lärare matematiska resonemang?

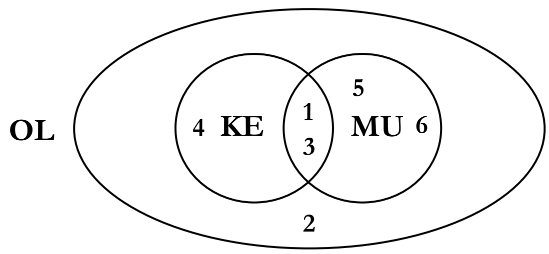
Gemensamma drag

Hos de tre lärarna går det att se vissa gemensamma drag som jag anser påverkar undervisningen positivt.

1. **Målet med undervisningen:** Det finns ett tydigt mål med undervisningen.
2. **Ledarskap och planering:** Lärarna tar på sig ledarskapet i klassrummet och ansvaret för undervisningen samtidigt som eleverna involveras i och påverkar planeringen.
3. **Vikten av en intressant och rolig undervisning:** Alla lärarna betonar att en intressant och rolig undervisning främjar elevernas lärande i matematik.
4. **Kommunikation och samarbete:** De framhåller alla vikten av att som lärare hela tiden ha en dialog och ett samarbete med eleven/eleverna.
5. **Fler frågor än svar:** Att ställa frågor, snarare än att ge svar, till eleverna är ett annat gemensamt drag hos lärarna i studien.

6. **Matematiska resonemang:** Matematisk kunskap ses som viktig av lärarna, fokus ligger inte på process utan på förståelse. Samtal och resonemang ses som ett bra verktyg för att öka förståelsen hos eleverna. Lärarna vill alla erbjuda en undervisning som leder till ett livslångt lärande.

Jag menar att dessa sex drag som jag kunnat urskilja går att koppla till Jaworskis (1998:97-122) teori om undervisningens triad. Teorins tre delar är *Organisering av Lärandet* (OL), *Känslighet för Eleverna* (KE) och *Matematisk Utmaning* (MU). Nedan placerar jag ut dragen i den illustration som Ben gjorde av triaden (Jaworski 1998:119).



Figur 2. Undervisningens triad kompletterad med de gemensamma drag som identifierats i studien

Placeringen för **1. Målet med undervisningen**, motiverar jag med att lärarna anger att de i organiserar sin undervisning utifrån eleverna samtidigt som de vill att undervisningen ska innebära en utmaning för eleverna. **2. Ledarskap och planering** placerar jag i OL men i närheten av både KE och MU eftersom lärarna i sitt ledarskap och i sin planering fokuserar på eleverna och det matematiska innehållet i undervisningen. **3. Vikten av en intressant och rolig undervisning** placerar jag under **1.** eftersom lärarna uttrycker att det är av känslighet för eleverna som de vill organisera undervisningen så att den blir rolig samtidigt som undervisningen behöver innebära en matematisk utmaning för att vara intressant. **4. Kommunikation och samarbete** placerar jag i KE eftersom lärarna anser att en förutsättning för framgångsrik undervisning är att läraren lär känna sina elever. Kommunikation ses som ännu en förutsättning för framgångsrik undervisning. **5. Fler frågor än svar** placerar jag i MU, nära OL, eftersom det är viktigt för lärarna att undervisningen blir en utmaning för eleverna. Denna utmaning bygger de på en mängd frågor som de ställer till eleverna. Samtidigt poängterar lärarna att frågorna måste anpassas efter eleverna, därför placerar jag den närmare KE än **6. Matematiska resonemang,** som lärarna ser som en del av den matematiska kompetensen som lärarna hoppas att eleverna ska nå genom undervisningen.

Nedan skriver jag ut triadens förkortningar i anslutning till rubrikerna för att tydliggöra mina tankegångar.

1. Målet med undervisningen (OL, KE, MU)

Det första som slår mig är att de tre lärarna är helt klara över målet med deras undervisning. Både i intervjuer och under observationer förmedlar lärarna en tydlig bild av att ha reflekterat över vad de vill åstadkomma med sin undervisning, nämligen att eleverna ska ges möjlighet att lära sig så mycket matematik som möjligt. I rapporten (NCM 2010:44,48) anges att en trolig anledning till dåliga resultat är att lärare inte har reflekterat över sin undervisning och inte heller låter läroplan och kursplan påverka den. Både de stora övergripande målen undervisningen och målet för just den här lektionen, har informanterna klart för sig. John säger i inledningen av sin lektion ”När ni går ifrån den här lektionen ska ni veta hur man ritar en vinkel.” Under intervjun besvaras frågan om vad de har för pedagogisk grundsyn, hur de ser på inlärning, direkt utan någon längre betänketid vilket för mig visar att det är en fråga som är genomtänkt och som finns levande i deras dagliga arbete. Samtliga lärare citerar läroplanen eller kursplanen under intervjun. Catrin säger att ”Jag vet vad jag vill att de [eleverna] ska lära sig”. Samtliga lärare har arbetat minst 10 år som lärare och utrycker att erfarenheten ger dem en trygghet som gör detaljplanering mindre viktig. Istället öppnas möjligheter för att låta lektionen följa elevernas tankar och resonemang. Målet med undervisningen är klart, men resan dit är inte fast. Detta drag kännetecknas av både *Organisering av Lärandet* (OL), *Känslighet för Eleverna* (KE) och *Matematisk Utmaning* (MU) menar jag. Alla tre är nödvändiga ingredienser för framgångsrik undervisning.

2. Ledarskap och planering (OL)

Det är tydligt att lärarna i studien tar på sig ledarskapet i klassrummet, även det en del av triadens *Organisering av Lärandet (OL)* (Jaworski 1998:117-120). Lärarna anser sig vara ansvariga för att erbjuda eleverna en bra förutsättning för inlärning och ge eleverna den hjälp de behöver för att nå målen, vilket är en åsikt som de delar med Carlsson (2008:8) som säger att det är lärarens ansvar att planera arbetet så att bästa möjliga förutsättningar för lärande skapas. Catrin säger att alla elever kan nå målen om man jobbar målmedvetet och strukturerat. Det uttalandet lägger ansvaret hos läraren, att planera undervisningen och leda eleven genom den. Gustafsson och Larsson (2008:4) menar att matematikundervisningen behöver en långsiktig planering från år F-9, vilket ingen av lärarna i studien ger uttryck för att de gör. Däremot så uppvisar alla tre lärare en grovplanering som de arbetar efter men som ändras lite från år till år. Speciellt Hanna ger uttryck för att eleverna involveras i själva planeringen.

Precis som Eklund och Irehjelm (2010:60) anser jag att en hög medvetenhet om läroplanens och kursplanens mål är en grund till den höga måluppfyllelsen i de observerade skolorna. Lärarnas långa erfarenhet ger dem möjlighet att undvika detaljstyrning av lektionerna och istället följa de vägar som elevernas tankar och resonemang ger, samtidigt som de hela tiden styr mot målet som de har satt upp för undervisningen. Catrin menar i intervjun att det faktum att alla lärare på skolan gått på samma fortbildning i problemlösning och tillsammans arbetat med det tills det blev en naturlig del av undervisningen är viktigt. Det bekräftas av Eklund och Irehjelm (2010:22) som skriver att ett problem med att fortbilda enstaka lärare är att de kan ha svårt att hävda sig mot den traditionella skolkulturen och kollegor när de kommer tillbaka. John säger i intervjun att han i början av sin anställning arbetade enligt den rådande kulturen på skolan. Nu, tio år senare, när han har arbetat upp ett förtroende för sig själv bland kollegorna kan han undervisa på det sätt han egentligen vill.

3. Vikten av en intressant och rolig undervisning (OL, KE, MU)

Hannas uttalande om att ”man lär sig mer om man har roligt så varför skulle inte skolan vara rolig” innebär inte att hon tycker att läraren ska vara en clown. Däremot anser hon att det är viktigt att variera undervisningen och ta hjälp av exempelvis datorn för att öva på ”tråkiga” saker som att förkorta bråk. När det är dags för repetition försöker Catrin hitta nya angreppsvinklar för att hålla elevernas inspiration vid liv. Engagerade lärare är något som eleverna önskar sig enligt *Lusten att lära – med fokus på matematik* (Skolverket 2003) och det är en egenskap som präglar lärarna i studien. De är måna om att göra undervisningen intressant eftersom det gynnar inlärningen. Hanna, Catrin och John säger alla att ett kriterium för framgångsrik undervisning är att den är rolig. Skolverket (2003:15) lyfter fram flera faktorer som nycklar till framgångsrik undervisning, varav en är att eleverna får möjlighet att visa och beskriva sina lösningar. Hannas elever får genom att spela in sig själva på film en utmärkt chans att med både ord och bild förklara sitt resonemang. Catrins elever uppvisade en stor vana att dela med sig av sina tankar inför sina klasskamrater. Även Johns elever fick förklara hur de tänkte när de skulle lösa en uppgift. En annan faktor som Skolverket (2003:27) tars upp är tilltron till den egna förmågan, något som informanterna själva nämner som en viktig faktor under intervjuerna. Hanna uttrycker under intervjun att hon ägnar väldigt mycket tid åt att få eleverna att förstå hur mycket de redan kan.

De tre informanterna anser sig inte vara styrda av läroboken även om de använder sig av den i undervisningen. Catrin uttrycker att den ofta är för enkel, Hanna att hon utgår från den men väljer ut det som är relevant enligt kursplanens mål. John gör en grovplanering utifrån den ordning som han själv tycker är logisk att lära sig de olika momenten, matematikboken blir sen ett av många verktyg som används i undervisningen. Därmed undviker de en överrepresentation av procedurkompetens som NCM tillskriver läroböcker (NCM 2010:32, 53).

Att göra undervisningen rolig och intressant kan kopplas både till *Organisering av Lärandet (OL), Känslighet för eleverna (KE)* och till *Matematisk utmaning (MU)* i Jaworskis triad (1998:117-120). Utan känslighet för eleverna är det inte att möjligt att planera en undervisning som är intressant för dem samtidigt som undervisningen måste innebära en utmaning för att eleverna ska finna den stimulerande.

4. Kommunikation och samarbete (OL, KE)

Ännu en sak som de alla tre nämner är vikten av att som lärare ha tilltro till sina elever och att knyta an till dem, vilket även är en av faktorerna till lustfyllt lärande enligt Skolverket (2003:35). Mötena mellan lärare och elev präglas av respekt, vilket är ett av kännetecknen för framgångsrik undervisning enligt Stedøy (2007:242). Catrin pekar på att vägen till individualiserad undervisning är att lära känna sina elever, veta vad de kan och hur de tänker vilket kan kopplas direkt till triadens *Känslighet för Eleverna (KE)* (Jaworski 1998:117-120). Informanternas undervisning präglas av en dialog med eleverna, en dialog som inte bara går ut på att läraren ställer en fråga som eleverna svarar på och sen kommer läraren med en ny fråga. Det är istället fråga om ett samarbete. Backlund skriver att ”samtal och kommunikation i mycket hög grad bidrar till förståelse och djup i inlärningen” (Backlund 2003:20) vilket även denna studie visar.

Idén till Catrins lektion ”Hur lyder frågan?” kom från ett samtal mellan några elever som hon hörde en dag i klassrummet. Lärarna lyssnar in eleverna och låter dem både direkt och indirekt vara med och styra *Organiseringen av Lärandet (OL)* (Jaworski 1998:117-120). Det finns en *vi-känsla* i de klassrum jag besökt, där vi består av eleverna och läraren som samarbetar och tillsammans lär sig och utvecklas. Motsatsen är *jag-och-de-känslan* som finns i en del klassrum där läraren hellre talar till, istället för med, eleverna.

Malmer (2006:22-23) framhåller att matematik är ett kommunikationsämne och skriver om vikten av att använda ett korrekt matematiskt språk för att underlätta inlärningen och elevers förståelse av densamma. Även Silver och Smith (2001:12) menar att samtal och kommunikation är nödvändig i matematikundervisningen och lyfter fram läraren som samtalsledare. Det är en roll som Catrin visar att hon är medveten om och bekväm i när hon leder sina elever genom lösandet av ett problem. John är medveten om vikten av att alla ska förstå och är hela tiden beredd att gå in och förtydliga när eleverna står vid tavlan och delar med sig av sina resonemang.

Precis som Skott m.fl. (2009:155) anser de tre informanterna att ett korrekt matematiskt språkbruk underlättar inlärningen. Utan kunskap om matematikens olika begrepp får resonemangen ingen mening, förståelsen uteblir. Skolverket (2007:39) pekar på risken för missförstånd inte bara i kommunikationen mellan lärare utan även när elever ska tolka texten i läroboken kan det uppstå problem.

5. Fler frågor än svar (OL, MU)

Lektionerna som jag observerat kännetecknas av att lärarna ställer frågor. Catrin är den som starkast uttalar en utgångspunkt där frågorna är ett viktigt fundament i undervisningen, både som en del i *Organiseringen av Lärandet (OL)* men även för att undervisningen ska bli en *Matematisk Utmaning (MU)* (Jaworski 1998:117-120). Att ställa den rätta frågan så att eleven upptäcker ny kunskap är Catrins mål och det lyser verkligen igenom på hennes lektioner. Eleverna får sällan svar från henne utan svaren kommer efter resonemang dem emellan och eventuellt följdfrågor från Catrin. Hennes elever visar på en vana att både kommunicera sina resonemang till andra och att lyssna på resonemang från andra elever. Det är lätt att följa med och förstå tankegångarna när de ska förklara sina lösningar. Eleverna ger varandra kommentarer och följdfrågor. Även John pratar om att ställa frågor, gärna sokratiska som det inte finns ett givet svar på. Samtidigt uttrycker han en vilja att ge sig in i elevernas förklaringar för att förtydiga och öka förståelsen hos de som lyssnar. Det är en svår balansgång mellan att hjälpa och ta över. Catrins resonemang om att eleverna helst ska upptäcka kunskapen själva kräver att läraren vågar ta ett steg tillbaka för att ge eleverna utrymme att upptäcka. Många gånger vill eleverna hellre ha ett snabbt svar än hjälp att förstå hur de själva kan komma på lösningen på en uppgift och läraren känner av en tidspress som utgör en frestelse till snabba svar.

Det finns tydliga likheter mellan Mrs Nelson, läraren som Silver och Smith (2001:13-15 se även Bilaga 1) har observerat, och Catrin. Båda ställer många frågor och ger få svar. Mrs Nelsons och Catrins elever är alla vana att genom samarbete söka svar på problem som de ställs inför. De uppvisar även en vana att inför sina klasskamrater redovisa sina tankegångar och själva ställa frågor om de inte förstår någon annans resonemang. Polya (1954:v-vi, x) betonar gissningarnas plats i matematikinlärningen vilket både Mrs Nelson och Catrin ger utrymme för i sin undervisning. Catrin undervisar på en skola där en hög andel av föräldrarna har eftergymnasial utbildning. Mrs Nelsons (dåvarande) skola låg i ett fattigt område. För mig är det intressant att se att den höga måluppfyllelse som Catrins skola har haft, 100 % godkända i matematik i år 9 de senaste tio åren, även är möjlig att uppnå i ett fattigt område.

6. Matematiska resonemang (MU)

Skott m.fl. (2009:127) menar att om skolämnet matematik inte innehåller resonemang borde det inte kallas matematik. Framgångsrika lärare är inte inriktade på enbart processer utan även på förståelse i undervisningen (Skolverket 2003:24, 40). John menar att all undervisning måste ta sin början i den filosofiska delen av matematiken, sen kan man gå över till att applicera kunskapen. I annat fall blir det, enligt honom, väldigt svårt att bygga upp en förståelse. Hanna lyfter fram de spontana resonemangen som sker mellan elever som de bästa, vilket gör att hon tränar sina elever i att resonera med varandra under lektionerna för att öka chanserna att det sker spontant. Hon uppmuntrar eleverna att samarbeta på lektionerna för att ge dessa samtal en bra grogrund. Catrins lektioner präglas i hög grad av matematiska resonemang. Eleverna ombads flera gånger att resonera med varandra och observationerna visar att de har kunskap i att resonera logiskt och kommunicera dessa resonemang, både skriftligt och muntligt.

Lithner anger som ett av kraven på *Kreativt matematiskt resonemang (KMR)* (Tranbeck 2010:5-6) att eleverna ska möta, för dem, ny kunskap. När Catrins elever söker en lösning på problemet med Eriks damm under sängen (Bilaga 4) ”uppfinner” en av eleverna en formel som han inte ens är säker på att den är möjlig att lösa. Det hindrar inte honom från att skriva ihop det som en möjlig lösning till problemet. Tillsammans resonerar eleverna och Catrin och kommer fram till att det är möjligt att lösa den. Det visar på motsatsen till *Imitativt resonemang* som enligt Lithner (2007) är den vanligaste formen av matematiskt resonemang i skolan idag (2007:255). Catrin är under sina lektioner mån om att hela tiden använda elevernas lösningar som utgångspunkt för matematiska resonemang och uppmuntrar hela tiden eleverna att ifrågasätta om de inte håller med. Eftersom det inte råder jämvikt i maktbalansen mellan elever och lärare tvekar en del elever att ifrågasätta dennes ord. Det ökar risken för att eleverna väljer att memorera lärarens resonemang. Genom att utgå från eleverna minskar Catrin den risken.

Taflin (2007) skriver att ”Matematisk resonemang innebär att matematiska idéer behandlas med hjälp av olika uttrycksformer, t.ex. muntligt, skriftligt, med hjälp av material” (Taflin 2007:110). Under Catrins lektion illustreras de olika uttrycksformernas fördelar när en elev ska berätta för en klasskompis vad han kommit fram till. När han börjar berätta högt inser han att han tänkt fel och måste fundera lite till innan han kommer fram till en lösning, vilket ger honom en möjlighet att skapa en verklig förståelse. Lithners andra krav på *Kreativt Matematiskt Resonemang,* att det ska finnas en rimlighet i resonemanget, främjas genom att eleverna samarbetar (Tranbeck 2010:5-6). De måste då motivera inför varandra hur de tänker vilket ökar rimligheten i resonemangen.

Enligt Catrin innebär framgångsrik undervisning att eleverna ges tillfälle att lära sig mycket matematik. Lektionerna ska hela tiden vara en *Matematisk Utmaning* (MU)

(Jaworski 1998:117-120) för eleverna vilket även gör att undervisningen blir intressant.

Avslutande diskussion

Den respekt som jag sett i mötet mellan lärare och elev tror jag är en hörnsten i framgångsrik undervisning. Att bli sedd, lyssnad på och bemött med respekt kan anses vara en mänsklig rättighet. Elever säger i intervjuer (Skolverket 2003:34-35) att de vill ha lärare som visar tilltro till deras förmåga och som har en förmåga att entusiasmera dem vilket stämmer väl överens med Hannas, Catrins och Johns undervisningsfilosofi. De pratar alla om vikten av att knyta an till sina elever och lägger ansvaret för det främst på sig själva. Hanna sa under intervjun att "det finns inga elever i den här åldern [högstadiet] som inte är värda att gilla. De är inte elaka, i så fall beror det på stökiga hemförhållanden." Runessons (1996:36) ståndpunkt, att elevers olikheter borde ses som en tillgång i undervisningen istället för ett problem som måste organiseras bort, är en viktig del av den respekt som måste prägla relationen mellan lärare och elev. Om olikheterna ses som en tillgång har alla en given plats i klassrummet vilket borde vara en självklarhet i vårt samhälle. Jag har bestämt mig för att jag anser att som lärare ska man vara så professionell i sin yrkesroll att man faktiskt måste välja att gilla och respektera alla sina elever, annars försvinner en hörnsten i framgångsrik undervisning.

Stedøys (2007:242-243) konstaterande att det går att lära sig att bli en framgångsrik lärare inger hopp! Alla kan vi genom utbildning, handledning, samarbete med kollegor och övning bli framgångriska lärare och ge våra elever möjligheten att utvecklas till kompetenta matematiker .

Det har varit otroligt inspirerande att få sitta i dessa lärares klassrum och ta del av deras tankar i intervjuerna. De brinner för sin uppgift och det smittar av sig! De har arbetat tillräckligt länge för att bli bekväma i klassrummet och i mötet med eleverna. Erfarenheten är värd sin vikt i guld vilket visar på vikten av pedagogiska diskussioner lärare emellan för att kunna sprida deras lärdomar.

Jag hoppas att jag har kunnat förmedla lite av den glöd som dessa lärare bär på för att på så sätt sprida sig vidare till andra.

Referenslista

Ahlstrand, Elisabeth (2003). *Lagarbete och tidig läs- och skrivutveckling.* [Online] Tillgänglig http://www.skolverket.se/publikationer?id=1149 (2011-06-26)

Backlund, Per (2003). Samarbetslärande. *Nämnaren Nr 1, 2003.* [Online] Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2023_03_1.pdf (2011-06-13)

Carlsson, Ewa-Lotte (2008). *Undervisning för att öka elevers måluppfyllelse.* [Online] Tillgänglig: http://his.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:175152 (2011-06-13)

Eklund, Christine & Irehjelm, Jan-Olof (2010). *När matematikresultaten sjunker.* Examensarbete Malmö Högskola [Online]. Tillgänglig: http://dspace.mah.se/handle/2043/10437?show=full

Glennkommissionen (2000). [Online] Tillgänglig: http://www2.ed.gov/inits/Math/glenn/report.pdf (2011-06-13)

Gustafsson, Anna-Lena & Larsson, Sofia (2008). *Vägen till ett lyckat resultat – hur vi kan minimera antalet elever som lämnar grundskolan utan betyg i matematik.* [Online] Tillgänglig: http://his.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:174055 (2011-06-13)

Jaworski, Barbara (1998). Att undervisa i matematik: ett social-konstruktivistiskt perspektiv. I: Engström, Arne (Red.) *Matematik och reflektion.* Studentlitteratur.

Lithner, Johan (2007). *A research framework for creative and imitative reasoning.* [Online] Tillgänglig: http://www.springerlink.com/content/d143l47w1108333q/ (2011-05-01)

Malmer, Gudrun (2006). Mer muntlig matematik – bra för alla. *Nämnaren Nr 2, 2006.* [Online] Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2223_06_2.pdf (2011-06-13)

Merriam, Sharan B. (1994). *Fallstudie som forskningsmetod.* Studentlitteratur.

NCM (2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet.* [Online] Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik (UFM). Tillgänglig: http://ncm.gu.se/media/ncm/forskning/kunskapsoversikt_ncm_ufm_gr.pdf (2011-05-25)

Patel, Runa & Davidsson, Bo (2003). *Forskningsmetodikens grunder. Att planera, genomföra och rapportera en undersökning.* Studentlitteratur.

Polya, George (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton University Press.

Runesson, Ulla (1996). Olikheter i klassen – tillgång eller problem?. I: Ahlström m.fl. (red.). *Matematik- ett kommunikationsämne Nämnaren Tema*, NCM

Silver, Edward A. & Smith, Margaret S. (2001). *Samtalsmiljöer Nämnaren Nr 4, 2001.* [Online]. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1115_01_4.pdf (2011-06-13)

Skolverket (1998). *Läroplan för förskolan Lpfö 98*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1067 (2011-06-15)

Skolverket (2000a). *Kursplan matematik grundskolan*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/sb/d/577 (2011-04-20)

Skolverket (2000b). *Kursplan matematik gymnasial utbildning*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/sb/d/726/a/13845/func/kursplan/id/3202/titleId/MA1201%20-%20Matematik%20A (2011-06-15)

Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1148 (2011-05-01)

Skolverket (2007). *Matematik En samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning.* [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/publikationer?id=1884 (2011-05-25)

Skolverket (2011). *Lgr 11. Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575 (2011-06-15)

Skott, Jeppe; Hansen, Hans Christian; Jess, Kristine & Schou, John (2009). *Matematik för lärare Y Grundbok 1*. Gleerups Utbildning AB.

Stedøy, Ingvill M. (2007). Hur blir man en duktig matematiklärare?. I: Boesen, Jesper; Emanuelsson, Göran; Wallby, Anders & Wallby, Karin (Red.) *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. NCM.

Stensmo, Christer (1994). *Pedagogisk filosofi*. Studentlitteratur.

Stensmo, Christer (2002). *Vetenskapsteori för nybörjare*. Kunskapsföretaget i Uppsala AB.

Taflin Eva, (2007). *Matematikproblem i skolan– för att skapa tillfällen till lärande*. [Online] Tillgänglig: http://www.skolporten.com/art.aspx?typ=art&id=a0a200000003itneai (2011-05-25)

Tranbeck, Maria (2010). *Kreativt matematiskt grundet resonemang*. http://umu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:345025 (2011-05-25)

Wallén, Göran (2000). *Vetenskapsteori och forskningsmetodik*. Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (1990). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. [Online] Tillgänglig: http://codex.vr.se/texts/HSFR.pdf (2011-05-25)

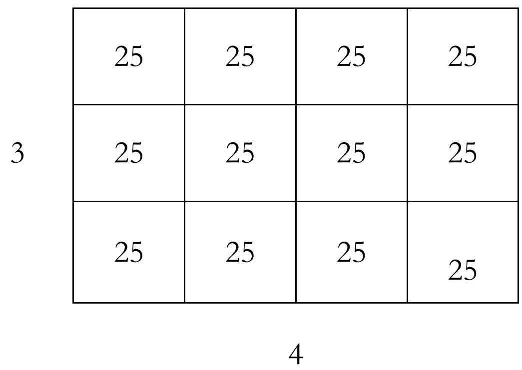
Bilaga 1

Silver & Smiths återgivning av Mrs Nelsons lektion

En titt in i Mrs Nelsons klassrum För att fullt ut inse vad den här visionen skulle kunna innebära, tar vi nu med dig till Mrs Nelsons klassrum, en grundskollärare som försökt skapa en kommunikationsrik miljö i vilken hennes elever kan lära sig matematik. Skolan där Mrs Nelson undervisar ligger i en fattig tätort och i hennes klass finns elever av blandad ras- och etnisk tillhörighet. I det här exemplet på klassrumsaktivitet möter vi Mrs Nelson och hennes sjundeklassare när de sysslar med ett problem som är relaterat till två matematiska nyckelbegrepp för grundskoleelever: förhållande och area. Mrs Nelson bad sina elever att samarbeta i par för att lösa följande problem:

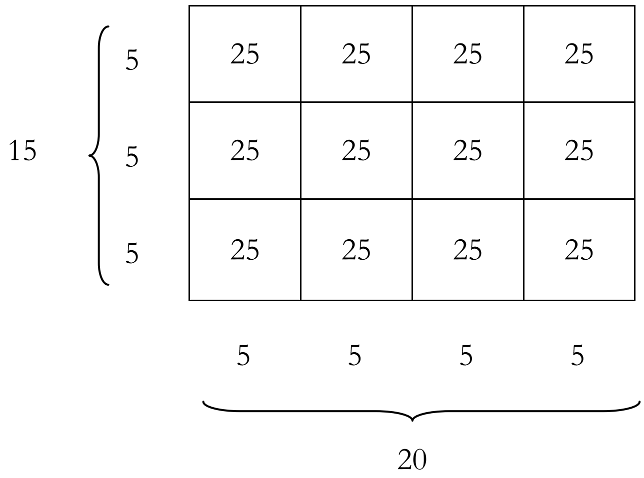
> Förhållandet mellan en rektangels längd och dess bredd är 4 till 3. Dess area är 300 kvadrattum. Vilken är dess längd och dess bredd?

Eftersom samarbete vid problemlösning var vanlig i hennes klassrum började eleverna genast arbeta tillsammans – de läste problemet, gjorde skisser för att få hjälp till att förstå problemet och diskuterade möjliga strategier för att lösa det. Under tiden de arbetade uppmanades några elever två och två att förklara den logiska grunden för en speciell ansats, att föreslå andra ansatser eller att lägga fram övertygande bevis för att en föreslagen lösning svarade mot villkoren som fastlagts i problemet. När tillräcklig tid gått för att eleverna skulle kunna försöka ge en lösning på problemet, så frågade Mrs Nelson efter frivilliga att komma fram till arbetsprojektorn och presentera sin lösning för klassen. Eftersom detta var vanlig praxis i klassrummet, så erbjöd sig ett antal samarbetande par att dela med sig av sin lösning. Ur gruppen av frivilliga valde Mrs Nelson Lee och Randy. Efter att kortfattat ha återgivit informationen som givits i uppgiften så påpekade Lee att 3gånger 4 är 12 och att de behövde ”ett tal som både 3 och 4 kunde på upp i”. När Mrs Nelson frågade varför de hade multiplicerat 3 och 4 så påpekade paret att förhållandet mellan längden och bredden ursprungligen var givet som ”4 till 3”. Lee och Randy (med Lee som den som stod för det mesta av pratet för paret) fortsatte med att säga att de hade fastslagit att ”3 går i 15fem gånger och att 4 går i 20 fem gånger också”. Eftersom 15 gånger 20 är 300, arean av den givna rektangeln, så drog de slutsatsen att dessa tal representerade bredden respektive längden av rektangeln. Vid slutet av deras presentation frågade Mrs Nelson klassen om de hade några frågor till Lee och Randy. Mrs Nelsons fråga under presentationen efterliknades av en kommentar från en av eleverna att han inte förstod lösningen, i synnerhet inte varifrån talet 12 hade kommit. Varken Lee eller Randy kunde förklara varför de hade multiplicerat 3 och 4 eller hur resultatet av den multiplikationen hängde samman med deras tänkande för att nå lösningen. Mrs Nelson antydde då att hon också undrade hur de hade fått fram talen 15 och 20. Lee och Randy förklarade att de hade tittat efter ett tal ”som både 3 och 4 gick upp i”, varefter Mrs Nelson och en annan elev samtidigtfrågade hur pojkarna hade fått fram talet 5. Lee och Randy replikerade med att 5 varvad ”3 och 4 går i”. I detta läge frågade en av eleverna i klassen ”Gissade ni bara eller kontrollerade ni?” till vilket pojkarna samfällt svarade ”Ja! Fast Lee och Randys svar på problemet var korrekt så hade den förklaring till ”gissa och kontrollera”-strategin som de framfört tydligt gjort deras kamrater konfunderade översambandet mellan den information som givits i problemet, den använda strategin och det uppnådda svaret. Mrs Nelson var bekymrad över att eleverna var förvirrade av den presenterade lösningen men hon föredrog att inte gå in och själv förklara lösningen. Istället frågade Mrs Nelson klassen om någon hade ett annat sätt att se på problemet som de skulle vilja dela med sig. Rachel och Keisha anmälde sig frivilligt till att presentera sin lösning vid arbetsprojektorn. Efter att ha läst upp problemet högt för att på nytt göra klassen bekant med villkoren som fastställts i problemet, så gjorde Keisha en skiss av en rektangel och betecknade längden 4, bredden 3 och arean 300 kvadrattum. Hon förklarade att 3:an och 4:an representerade förhållandet mellan längden och bredden snarare än den verkliga längden och bredden av rektangeln. Rachel fortsatte presentationen och angav att där skulle finnas 12 kvadrater i rektangelns inre (som framgår av Figur 1) eftersom 3 gånger 4 är lika med 12. Därför, slutade paret, måste de 300 kvadrattum som utgör rektangelns area vara jämnt fördelade på de 12 kvadraterna. Genom att dividera 300 med 12 bestämde de att vardera av de 12 kvadraterna skulle innehålla 25 kvadrattum. På förslag av Mrs Nelson skrev Rachel 25 i varje kvadrat (som framgår av Figur 1) för att klargöra just detta.



Figur 1. Uppdelning av rektangeln i 12 kvadrater, vardera med en area av 25 kvadrattum.3

I detta läge protesterade en av eleverna i klassen mot den föreslagna uppdelningen och argumenterade istället för att 25 gånger 12 är 400. Som svar menade Keisha att25 gånger 12 är 300 och hon utförde multiplikationsalgoritmen som stöd för sin åsikt. Trots detta var flera elever fortfarande aven annan åsikt. Med hjälp av ett förslag från Mrs Nelson utnyttjade Keisha rektangeln för att påvisa att i den fanns fyra 25:or i varje rad vilket innebar att varje rad hade en summa av 100. Eftersom det fanns tre rader skulle alltså summan för hela rektangeln bli300. Denna alternativa förklaring till 25gånger 12 verkade övertyga de elever i klassen som inte hade accepterat den tidigare förklaringen som byggde på multiplikationsalgoritmen. Rachel förklarade sedan att för att finna längden och bredden av den ursprungliga rektangeln så måste man bestämma sidans längd i varje inre kvadrat. Om arean av varje kvadrat var 25 så skulle, menade hon, sidan i varje kvadrat vara 5 tum. Medan honhänvisade till diagrammet som visas i Figur2 förklarade hon att längden av hela rektangeln på så vis skulle vara 20 tum, eftersom den innehöll sidorna av fyra kvadrater, och att rektangelns bredd skulle vara 15 tum eftersom den innehöll sidorna i tre kvadrater.



Figur 2. Användning av delkvadraterna för att bestämma rektangelns dimensioner.

När deras presentation var avslutad beskreven av eleverna lösningen och strategin som Keisha och Rachel hade visat som ”cool ”.En annan elev påpekade att deras svar var identiskt med det som Lee och Randy hade givit. Som genmäle till denna kommentar noterade Mrs Nelson att deras svar förvisso var det samma men att de hade använt en annan ansats för att lösa problemet

Bilaga 2

Frågor till intervjuerna:

1. Vad har du för pedagogisk grundsyn?
   (Hur sker inlärning? Hur lär man sig? Hur sker kunskapsinhämtning?)
2. Påverkar den din undervisning? Om ja, hur?
3. Hur går du till väga när du planerar? (termin, område, dag)
4. Hur skulle du definiera framgångsrik undervisning?
5. Hur definierar du matematiska resonemang?

Visa en lapp med målet från kursplanen: ”Skolan skall i sin undervisning sträva efter att eleven utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande.”[4]

6. Är det någon skillnad på matematiska, logiska, resonemang och att muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande? I så fall vad?
7. Hur arbetar du för att ge eleverna möjlighet att nå målet?
8. Hur sker bedömningen rent konkret kring detta mål?

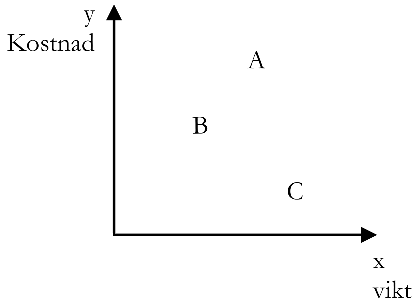
---

[4] Kursplan för matematik 2000
http://www.skolverket.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleId/MA1010%20-%20Matematik

Bilaga 3

Hannas lektion om diagram

Priset på bananer.



Bilaga 4

Catrins matematiklektion i år 7

Syfte: att uppmärksamma eleverna på frågans betydelse i en uppgift.

Mängden damm under Eriks säng ökar med 12 % om dagen. Vid ett tillfälle fanns det 14 g under sängen.

Antalet råttor på en soptipp ökar med 18 % per månad. Vid ett tillfälle fanns det 1500 råttor på soptippen.

En björk växer så att höjden ökar med 1,4 meter per år. Det motsvarar en ökning med 11,2 %.

Vid årets stora bokrea var priset på en viss bok nedsatt med 40 %. Tyvärr gick försäljningen av just den här boken inte lika bra som väntat. Den såldes därför i slutet av reaperioden till 50 % av reapriset. Det var då som matematiklärare Sture Smart slog till. Han räknade ut att boken nu var 126 kronor billigare än när den såldes till fullt pris.

En vara gick ner med 20 % och sedan upp med 65 %. Nu kostar varan 680 kronor.

Sexans problemlösningslektion

Rita en rektangel 2*3 cm.
Undersök hur omkretsen och arean förändras om sidorna görs

1. a) dubbelt så långa
   b) 3 gånger så långa
   c) 4 gånger så långa
   d) x gånger så långa

2. Vad blir skalan i a)-d)?

3. Skriv en slutsats som sammanfattar allt du undersökt i 1 och 2.

Bilaga 5

Johns lektion i hur man ritar en vinkel

Samtliga steg tas fram i en dialog mellan eleverna och John som vill att de ska själva ska komma på vad som kommer härnäst. Eleverna uppmanas att skriva ner metodbeskrivningen i sina anteckningsböcker. John frågar efter varje steg om de förstår vad de gör.

Steg 1: Rita en punkt.

Steg 2: Rita dit ett vinkelben.
Rita en rak linje från punkten.

Steg 3: Sätt gradskivans mittpunkt på din ritade punkt.

Steg 4: Sätt gradskivans baslinje på den ritade linjen.

Steg 5: Sätt en punkt vid 95º.
(Diskussion om vilken av graderingarna som ska användas utifrån att vinkeln är större än 90º)

Steg 6: Dra en linje mellan punkterna.