HÖGSKOLAN
DALARNA

Självständigt arbete i Matematikdidaktik

Avancerad nivå

”Det vet man inte, men så tror jag!”

Om hur elever i årskurs 9 löser sannolikhetsuppgifter

Författare: Lionel Charrière
Handledare: Lovisa Sumpter
Examinator: Maria Bjerneby Häll
Termin: Vt 2014
Program: Lärarprogram
Ämne/huvudområde: Matematikdidaktik
Poäng: 15 hp

Högskolan Dalarna
791 88 Falun
Sweden
Tel 023-77 80 00

ABSTRACT
Syftet med studien är att undersöka hur några högstadieelever resonerar när de löser sannolikhetsuppgifter. Metoden som använts är kvalitativa analyser av elevers lösningar till tre olika matematiska problem: ett enkelt slumpförsök, ett flerstegsförsök med oberoende steg och ett flerstegsförsök med beroende steg. Uppgifterna handlar om att beräkna och jämföra sannolikheter i klassisk definition. Studiens resultat tyder på att elever i årskurs 9 har, i förhållande till tidigare forskning, en god förståelse för slumpens natur och för sannolikhetsbegreppet. De kan använda sig av ett relevant proportionstänkande i form av relativ frekvens. Undersökningen visar vidare att svårigheter uppstår för att beräkna sannolikheter i flerstegsförsök, framförallt med beroende steg. Att söka efter en helhetsbild av slumpsituationen tycks inte vara en vanligt förekommande strategi utan eleverna koncentrerar sig till en händelse i taget. Studien belyser slutligen att sannolikhetsproblem kräver medvetenhet om utfallens ordning samt förmågan att hantera kombinatoriska operationer.

Nyckelord: elevers resonemang, sannolikhet, slump, utfallsrum

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Bilagor:

1. INLEDNING

Under de senaste åren har sannolikhet vuxit fram som ett viktigt område i läroplaner för undervisning i matematik (Nilsson, 2006:1). Detta svarar mot ökade behov i moderna samhälle att kunna förstå och hantera slumpmässiga fenomen i en rad olika aktiviteter, alltifrån meteorologiska och ekonomiska prognoser till sociala företeelser som spel eller sökningar på internet. Modern forskning inom fysik och biologi visar också på betydelsen av sannolikhetsteori för att beskriva naturen (Bryant & Nunes, 2012:10). I dagens samhälle är dessutom förståelse för vad slumpen är nödvändig för att kunna tolka all statistisk information som tas upp både på arbetsplatser och i medierna[1].

Samtidigt som den har en stor plats i det sociala livet är sannolikhetsteori en gren av matematiken som ingen annan: dess icke-deterministiska karaktär lämnar utrymme för lösningar med varierande grad av tillförlighet. Det innebär att det kan finnas ett avstånd mellan vad teorin producerar (till exempel en prognos) och vad verkligheten visar (de faktiska resultaten av ett experiment). Sannolikhetsläran kan därför upplevas av många som beskaffad med ”undanglidande koncept” (Konold, 1991:139), någonstans mellan total ignorans och perfekt kunskap. Om man vet att sannolikheten att vinna på en lott är 0,4 och köper 30 lotter borde man förvänta sig 12 vinster. Men om man får bara 6, vad ska man tänka om den typen av kunskap som sannolikhetslära ger? Det är det paradoxala med att en prognos som slog fel ändå var rätt ställd.

1.1 Sannolikhet, en tillbakablick

Människan har antagligen mött sannolikhetsfrågan sedan en lång tid tillbaka. Det finns spår av turspelobjekt i äldre kulturer från Indien, Babylonien och Egypten (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991:27). Det äldsta kända föremålet, från cirka 3500 f.Kr., är astragalen, ett ben från fåret vars form gör det användbart som tärning. I Babylon återfinns tärningar i lera från 3000 år f.kr. som är nästan perfekta. Förståelsen för slumpen i sig är en komplex företeelse som historiskt tar lång tid att utvecklas (Ib. 1991:28). Länge tror man att slumpen inte finns utan att det bara är människan som inte helt kan förstå en värld i vilken allt är redan bestämt och händer i en kedja av orsak och verkan. För Sankt Augustinus finns det ingen tvekan om att Gud kontrollerar allting i detalj. Om händelser tycks inträffa av en slump beror det på människornas okunskap och inte på händelsernas natur.

Sannolikhetsbegreppet är svårfångat: fast det inte gör det möjligt att berätta vad som ska hända erbjuder det ändå en viss information om det. Italienaren Cardano ger i sin bok *Liber de Ludo Aleae* (Boken om hasardspelen), ca 1560, ett av de första kända försöken att teoretisera slumpen. Ett annat kapitel om sannolikhetslärans utveckling som har gått till historien skrivs runt 1654 när två franska matematiker, Pascal och Fermat, brevväxlar angående olika hasardspel med tärning. Ett av problemen handlar om hur man skulle fördela prissumman, om man blir tvungen att avbryta ett spel innan det slutförs. En rättvis lösning anses då vara att dela pengarna utifrån spelarnas respektive chanser att vinna spelet, om det hade fullföljts. Just det perspektivet leder till viktiga framsteg i sannolikhetsteori (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991:30).

[1] http://www.scb.se/sv_/Om-SCB/Ditt-svar-gor-skillnad/Statistiken-ar-en-forutsattning-for-demokratin/

Laplace, en annan fransk matematiker, publicerar 1812 boken *Théorie analytique des probabilités* och ger den första definitionen av sannolikhet, som kvoten mellan gynnsamma och möjliga utfall. Denna definition, som idag kallas klassisk och innebär att alla individuella utfall är lika sannolika, har starka historiska kopplingar till hasardspelen och till den formen av symmetri som dessa bär med sig.

Det historiska perspektivet inom sannolikhetsläran tyder på att området innehåller svåra begrepp som tog lång tid att formalisera och utveckla (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991:28).

1.2 Sannolikhet i de aktuella styrdokumenten

Räkning och geometri har länge varit framträdande i svensk folkskola. Sannolikhetslära introducerades i kursplan först 1969, då enbart på högstadiet. I läroplanen för grundskola, *Lgr 11,* har däremot "Sannolikhet och statistik" blivit ett av de sex områden som definierar det centrala innehållet för ämnet matematik. För just sannolikhet ges följande progression (*Lgr 11*, s.64-66):

> **I årskurs 1-3**
> • Slumpmässiga händelser i experiment och spel.
> **I årskurs 4-6**
> •Sannolikhet, chans och risk grundat på observationer, experiment eller statistiskt material från vardagliga situationer. Jämförelser av sannolikheten vid olika slumpmässiga försök.
> • Enkel kombinatorik i konkreta situationer.
> **I årskurs 7-9**
> •Likformig sannolikhet och metoder för att beräkna sannolikheten i vardagliga situationer.
> • Hur kombinatoriska principer kan användas i enkla vardagliga och matematiska problem.

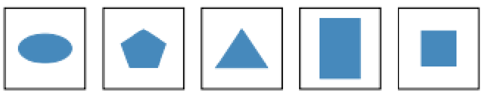
I kunskapskraven för betyget E i slutet av årskurs 9 (*Lgy 11*, s.64-66) förväntas eleven kunna välja och använda fungerande matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom sannolikhet.

I *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik* (Skolverket, 2011:22) skrivs det om området sannolikhet:

> Det handlar om att kunna förutsäga sannolikheten för att något ska hända, till exempel sannolikheten att få en dam när man drar ett kort ur en kortlek. Progressionen går från att man i de lägre årskurserna får möjlighet att resonera om sannolikhet utifrån enkla försök, experiment och observationer, till att man i de senare årskurserna möter olika metoder för att förutsäga händelser.

Det kan konstateras att styrdokumenten för den svenska skolan inte innehåller precisa hänvisningar om vilket innehåll eleverna ska arbeta med. Här återges en uppgift från *Ämnesprov Matematik, delprov B, årskurs 9*[2] (2012/2013) som får illustrera vilken typ av kunskaper som förväntas av eleverna i slutet av grundskolan.

Robin har fem kort som visar olika former. Han blandar korten och tar slumpvis ett kort.



Hur stor är sannolikheten att han tar ett kort med en fyrhörning?

Figur 1: Uppgift från Ämnesprov Matematik, delprov B, årskurs 9

[2] http://www.su.se/polopoly_fs/1.145318.1378276797!/menu/standard/file/Delprov%20B.pdf

Samtidigt som sannolikhetsteori har en viktig funktion i dagens samhälle är den relativ ny både historiskt och i skolans styrdokument (Nilsson, 2006:1). Det är en vetenskap som bär med sig kognitivt krävande begrepp. Inom skolan skapar sannolikhetsområdet stora och varierande utmaningar för både elever och lärare (Bryant & Nunes, 2012:13). I sin forskningsgenomgång konstaterar Bryant och Nunes (2012:78) att det finns förvånansvärt lite forskning över barns förmåga att systematiskt kategorisera möjliga resultat av ett slumpexperiment. Nya undersökningar behövs för att identifiera vilka de kritiska aspekterna för förståelse av sannolikhet är samt hur dessa kan hanteras didaktiskt. Den här studien avser bidra till att öka förståelsen för hur skolelever resonerar när de löser sannolikhetsuppgifter.

2. BAKGRUND

Avsikten med följande del är att presentera den teoretiska ramen som studien kommer att befinna sig i. Först definieras grundläggande begrepp, satser och teorier inom sannolikhetsläran. Därefter redogörs för forskning om elevers förståelse av slumpen och sannolikheter. Slutligen beskrivs de teoretiska ramverken som används i studien, dels för att bedöma elevers tänkande i sannolikhet, dels för att strukturera matematiska resonemang.

2.1 Sannolikhetsteori

Innebörden i sannolikhetsteori är att skapa matematiska modeller vars syfte är att beskriva slumpmässiga fenomen (Nilsson, 2006:5). Att något är slumpmässigt, med andra ord att det händer på måfå, betyder att det finns en osäkerhet i resultat som inte kan förutses exakt. Slump är dock inte synonym med kaos utan en sorts ordning som är skild från den deterministiska, som inte har några specifika händelsekedjor vi kan identifiera (Jones, Langrall & Mooney, 2007:910). I den ordningen visar de studerade fenomenen osäkra enskilda utfall men regelbundna mönster av utfall över många försök. Det handlar alltså om en oförutsägbarhet på korttid kopplad till en stabilitet på långtid. På grund av detta avser sannolikhetsmodellering att tillskriva varierande grad av säkerhet till olika möjliga resultat av ett slumpmässigt fenomen.

2.1.1 Allmänna definitioner

Följande definitioner är hämtade från Kiselman och Mouwitz (2008:264-270).

Försök

Ett försök definieras som ett experiment som sker under kontrollerade former. Ett slumpförsök, eller slumpmässigt försök, definieras då som en händelse som har minst två möjliga utfall och där det är omöjligt att i förväg säga vilket som kommer att inträffa. Ett slumpförsök ska kunna upprepas under likartade förhållanden utan att resultatet vid varje enskild upprepning ska kunna förutsägas med säkerhet.

Vidare kan vi skilja mellan enkla slumpförsök som består av ett enda försök och flerstegsförsök under vilka flera olika enkla slumpförsök genomförs, antingen samtidigt eller successivt.

Utfall

För begreppet utfall ges följande definition: möjligt resultat av ett slumpmässigt försök. Detta kan sedan kopplas vidare till begreppet utfallsrum som definieras som mängden av alla utfall som är möjliga vid ett slumpmässigt försök. Notera att utfallen som definierar utfallsrummet inte kan inträffa samtidigt samt att exakt ett av utfallen i utfallsrummet kommer att inträffa när försöket utförs. Ett gynnsamt utfall definieras som det eller de utfall av försökets möjliga utfall som man vill uppmärksamma.

Händelse

En händelse betraktas som en mängd möjliga utfall i ett slumpmässigt försök. En händelse motsvarar då en delmängd av utfallsrummet, en samling av ett eller flera utfall. Man säger att händelsen inträffar om och endast om något av utfallen i motsvarande samling av utfall inträffar. En elementarhändelse är en händelse som består av ett enda utfall. En komplementhändelse till händelsen A betecknas A^c och är mängden av utfall som inte ingår i den givna. Med sammansatt händelse menas en händelse som inträffar under ett flerstegsförsök.

Sannolikhet
Sannolikheten för en händelse är ett tal mot vilket händelsens relativa frekvens konvergerar när antalet oberoende försök växer. Det innebär att sannolikheten för händelsen A, P(A), kommer att vara ett tal mellan noll och ett. En händelse som inte kan hända är omöjlig medan en händelse som bara kan hända är säker. Vid kast med en vanlig tärning har vi:
P(att få en 7:a)=0   P(att få mindre än 7)=1

Bokstaven P i P(A) kommer från det latinska ordet för sannolikhet ”probabilitas”, vilket kan jämföras med engelskans ”probability” och franskans ”probabilité”. Sannolikheten ger ett mått på hur ofta en händelse brukar inträffa och/eller hur ofta man kan förvänta sig att den skall inträffa. I stället för ordet ”sannolikhet” kan man använda ”chans” om händelsen bedöms vara positiv eller ”risk” om händelsen bedöms vara negativ.

Med *betingad sannolikhet* menas sannolikheten för en händelse under förutsättning att en annan händelse har inträffat. Den betingade sannolikheten för B att inträffa givet att A har inträffat betecknas P(B|A).

Med *sannolikhetsfördelning* menas de olika utfall som är möjliga vid ett slumpmässigt försök tillsammans med sannolikheterna för dem. Känner man till sannolikhetsfördelning för ett försök får man en bild av slumpstrukturen som gäller för försöket och kan uttrycka sannolikheten för en godtycklig händelse. Man har då en slumpmodell, en matematisk beskrivning som säger vad som kan hända och med vilka sannolikheter detta händer.

En *likformig sannolikhetsfördelning* är en fördelning som ger samma sannolikhet till alla möjliga utfall.

Sannolikhetsläran är läran om olika modeller för slumpmässiga försök och om hur modellerna används för att räkna sannolikheter.

Oberoende/beroende, disjunkta
Oberoende händelser är händelser som bestäms av slumpen och där sannolikheten för en av händelserna inte ändras om den andra händelsen råkar inträffa. Till exempel när ett mynt kastas två gånger påverkas inte resultatet av det andra kastet av resultatet av det första (eller tvärtom). Detta måste skiljas från *disjunkta* händelser som är händelser som inte kan inträffa tillsammans. I samma exempel är ”krona på första kast” och ”klave på första kast” disjunkta händelser.

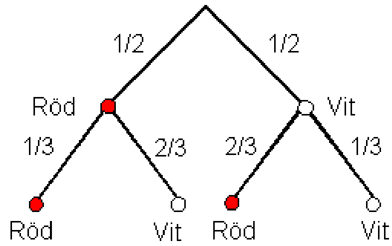
Beroende händelser däremot är händelser för vilka den ena händelsens sannolikhet påverkas av att den andra händelsen har inträffat eller ej. Till exempel händelsen att det blir en 7:a i en lottodragning (utan återläggning) påverkas av att man tidigare dragit en 7:a eller ej.

Träddiagram
Ett träddiagram är ett diagram som med hjälp av förgreningar, ibland i flera steg, visar olika utfall och deras sannolikheter. Slumpmässiga flerstegsförsök kan med fördel beskrivas med träddiagram där sannolikheter beräknas med hjälp av summa- och produktreglerna.

Summaregeln
Sannolikheterna för en händelse är summan av sannolikheterna för utfallen i händelsen.

Produktregeln
Sannolikheten för en väg är produkten av sannolikheterna längs vägen.

Till exempel, för en urna innehållande två röda och två vita kulor, med två kulor som dras upp, räknas sannolikheten för att få två kulor av samma färg som:
P(2 röda)=P(2 vita)=(1/2)*(1/3)=1/6 (Produktregel)
P(2 av samma färg)=P(2 röda)+P(2 vita)=1/3 (Summaregel)



Figur 2: Exempel träddiagram

Slumpvariabel
En variabel för vilken de utfall som observeras är resultatet av slumpmässiga försök kallas för slumpvariabel. Till exempel, slumpvariabeln X som en beteckning för antalet "kronor" på två myntkast ger följande uttryck
P(X=0)=1/4 P(X=1)=1/2 P(X=2)=1/4

Man kan vidare resonera kring flera utfallsrum och beteckna med Ωx det utfallsrummet som hör ihop med X. I exemplet ovan är Ωx ={0, 1, 2} (Nilsson 2003:12).

2.1.2 Sannolikhetslära och mängdteori

Mängdläran är mycket användbar för att skapa en sannolikhetsteoretisk modell. Exempelvis, om två olika händelser A och B betraktas som delmängder av utfallsrummet Ω som betecknar mängden av alla möjliga utfall, får man följande uttryck:

* Delmängd: A⊆Ω: händelsen A är en delmängd av utfallsrummet Ω.
* Union av A och B, A∪B: P(A∪B)= sannolikhet för att A eller B ska hända.
* Snitt mellan A och B, A∩B: P(A∩B)= sannolikhet för att A och B ska hända.
* Mängddifferens B utom A, B\A: P(B\A)= sannolikhet att B händer men inte A.
* Den tomma mängden, Ø: innehåller ingen händelse.
* A och B disjunkta, A∩B=Ø: A och B kan inte hända samtidigt, P(A∩B)=0.
* Mängden A består av utfallen "1" och "2" skrivs A={1, 2}.

För kast av ett mynt två gånger gäller exempelvis Ω={(krona, klave), (krona, krona), (klave, krona), (klave, klave)}

Utifrån mängdläran definierade den ryske matematikern Kolmogorov (1933) sannolikhetsteorin med tre axiom:

Första axiom: icke-negativitet
För en godtycklig händelse A⊆Ω gäller P(A)≥0.
Det betyder att en händelse inte kan ha en sannolikhet mindre än 0.

Andra axiomet: normalisering
För utfallsrummet Ω gäller P(Ω)=1.
Det tolkas som att det är säkert att något kommer att hända (även om händelsen skulle vara "det händer ingenting").

Tredje axiomet: ändlig additivitet
Om utfallsrummet är ändligt och om A∩B=Ø (A och B disjunkta) så är
P(A∪B)= P(A)+P(B)
Det betyder att sannolikhet för att A eller B ska hända är då summan av de respektive sannolikheterna.

Från dessa tre axiom härleds olika följdsatser:

Monotonitet: om $A \subseteq B$ gäller att $P(A) \leq P(B)$.
Eftersom då $P(B)=P(A)+P(B \setminus A)$ och $P(B \setminus A) \geq 0$ (axiom 1)

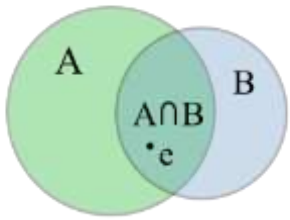
Det numeriska intervallet: för en händelse $A \subseteq \Omega$ gäller $0 \leq P(A) \leq 1$
Eftersom $A \subseteq \Omega$ ger $P(A) \leq P(\Omega)$ (monotonitet) och $P(\Omega)=1$ (axiom 2).

Komplementsannolikheten: sannolikheten för komplementhändelsen A^c till A är
$P(A^c)=1-P(A)$
Eftersom $P(\Omega)=P(A \cup A^c)=P(A)+P(A^c)$ enligt axiom 3 och $P(\Omega)=1$ (axiom 2).

Sannolikheten för den *tomma mängden*: $P(\emptyset)=0$
Eftersom $P(\emptyset)=1-P(\Omega)=1-1=0$

Sannolikhetsteorins *additionslag*: För två händelser A och B gäller
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Eftersom en händelse e som tillhör $A \cap B$ räknas två gånger i summan $P(A) + P(B)$ vilket kompenseras med termen $-P(A \cap B)$



Figur 3: Venndiagram

Den *betingade sannolikheten* för B att inträffar givet att A har inträffat
$$P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
Den här satsen kan förklaras på följande sätt. Eftersom vi vet att A har inträffat, så befinner vi oss i ett reducerat utfallsrum, händelsen A (Borovcnik m.fl., 1991:48). Den sökta sannolikheten $P(B|A)$ motsvarar då andelen av händelsen A som upptas av händelsen $B|A$, det vill säga $A \cap B$.

Om A och B är *oberoende händelser* har vi per definition $P(B|A)=P(B)$ och föregående sats ger
$P(A \cap B)= P(A)*P(B|A)=P(A)*P(B)$

Ett annat användningsområde för betingade sannolikheter gäller *satsen om total sannolikhet*:
$P(A)=P(B)*P(A|B)+P(B^c)*P(A|B^c)$

Detta tolkas som att A inträffar antingen om B inträffar först, $P(B)$, och (multiplikation) sedan A, $P(A|B)$, eller (addition) om B inte inträffar, $P(B^c)$, och (multiplikation) sedan A, $P(A|B^c)$.

I modern matematik betraktas sannolikhet som en funktion definierad kring en specifik klass av delmängder av utfallsrummet (Ib., 1991:78). Ändå kan inte en sådan funktion definieras enbart med hjälp av mängdläran utan det behövs andra perspektiv för att kunna tillskriva sannolikheter.

2.1.3 Tre perspektiv för att tillskriva sannolikheter

Det finns tre olika huvudperspektiv som kan användas när det gäller att tillskriva sannolikheter till händelser (Konold, 1991:4).

1. Klassisk sannolikhetsdefinition
Sannolikheten för en händelse är kvoten mellan antalet för händelsen gynnsamma fall och antalet möjliga fall, vilket kan skrivas som P=g/m. Alla utfall förutsätts vara lika sannolika.

Till exempel, för ett tärningskast och händelsen ”max en 2:a”, har vi två gynnsamma utfall i händelsen (1:a och 2:a), samt sex möjliga utfall:
P(max 2:a)=g/m =2/6 =1/3=0,33=33%

Detta perspektiv nämns som ”klassiskt” då det härstammar från 1600-talet när sannolikhetsläran började formuleras i samband med frågor om olika hasardspel (Batanero, Henry & Parzysz 2005:28). Andra benämningar kan också vara ”teoretisk”, ”numerisk” eller ”geometrisk” (Jones m.fl., 2007:912). Det finns i slumpförsöket en form av symmetri som gör att man kan anta att alla utfall är lika sannolika. Detta är ett krav för att definitionen g/m ska kunna användas. Exempel av symmetri är de fysiska egenskaper hos en tärning, ett mynt eller olika kulor i en påse. Den klassiska sannolikhetsdefinitionen används fortfarande inom spelområdet och i hög grad i skolundervisningen (Nilsson, 2003:12). Det finns ett cirkelresonemang i denna definition eftersom man definierar sannolikhet genom att utgå från att alla utfall är lika sannolika (Konold, 1991:4). Nästa perspektiv löser detta dilemma.

2. Frekvensdefinition
Den klassiska definitionen utgår från att alla utfall är lika sannolika och är därmed en *a priori* definition. Ett annat perspektiv handlar om att tillskriva sannolikhet utifrån det man har observerat, alltså *a posteriori*. Sannolikhet för en händelse uttrycks då som
P(A)=antalet gånger händelsen A har inträffat/ antalet försök.

Frekvensdefinitionen är användbar då symmetrin saknas eller är osäker i ett försök samt om möjligheten finns att utföra många försök under liknande villkor. Det är i detta perspektiv som sannolikheten för en händelse definieras som ett tal mot vilket händelsens relativa frekvens konvergerar när antalet oberoende försök växer. Andra benämningar kan också vara ”empirisk”, ”experimentell” eller ”statistisk” sannolikhet (Jones m.fl., 2007:912).

I exemplet ovan med ett tärningskast och händelsen ”max en 2:a”, skulle man kunna skriva P(max 2:a)=(antalet gånger man har fått 1 eller 2 under N kast)/N
Om man utförde 100 kast och då får sannolikheten 0,4 skulle man inte kunna säga att detta är ett bättre eller ett sämre resultat än med den klassiska definitionen (0,33). Man vet inte med säkerhet om 0,33 är ett bättre svar som skulle erhållas om man gjorde fler försök eller om tärningen inte är helt symmetrisk utan ”ger” lite fler 1:or och 2:or än den borde (i så fall skulle 0,4 vara ett bättre svar).

3. Subjektiv definition
Den subjektiva definitionen baseras inte (eller inte enbart) på betraktelser av försökets symmetri eller på observation av utfall, utan på uppfattningar om hur trolig en viss händelse är (Konold, 1991:4). Detta perspektiv är användbart då försöken är komplexa eller möjligen nya eller unika, utan möjlighet att upprepa dem.

Till exempel om man vill tillskriva en sannolikhet till händelsen ”läraren ger oss ett oförberett prov nu på tisdag” skulle man kunna inta de olika perspektiven:
- Klassisk: det är antingen eller, 50-50.
- Frekvensbaserad: hittills har vi haft oförberett prov 10 av 30 tisdagar, sannolikheten är då 33 %.
- Subjektiv: det är nationella prov nästa vecka, läraren har haft många utvecklingssamtal förra veckan, så risken är nog liten att hen vill/hinner lägga fram ett till prov. Sannolikheten bedöms vara 10 %.

2.2 Elevers förståelse av slumpen och sannolikheter

Pratt (2000:175) konstaterar i sin forskning att yngre barn i åldern 10-11 år identifierar försök som slumpmässiga utifrån olika aspekter. För det första ska nästa resultat inte upplevas som förutsägbart (oförutsägbarhet). För det andra tycks det inte finnas något mönster i tidigare sekvenser (oregelbundenhet). För det tredje identifieras situationen som slumpmässig om det inte går att utöva fysisk kontroll över resultatet (ostyrbarhet). Slutligen ska experimentet innehålla en form av grov symmetri (rättvisa), till exempel genom tärningens form. Även om situationer identifieras som slumpmässiga förekommer det en rad missuppfattningar gällande slumpens natur. Några av dessa missuppfattningar kommer nu att beskrivas.

2.2.1 Missförståelse av slumpen

Mycket av skolforskningen inom sannolikhet har fokuserat på elevernas missförståelse av slumpen. Tversky och Kahneman (1974:1124) beskriver två olika typer av missuppfattningar som människor visar när de ska uttala sig om slumpens utfall. Den första benämns *representativeness*, översatt här som representativitet, och handlar om hur individer bedömer vissa sekvenser som mer sannolika än andra när, i deras ögon, de bättre speglar försökets inneboende egenskaper (Nilsson, 2003:7). Till exempel, med R och B som två lika sannolika utfall i ett flerstegsförsök, tillskrivs ofta följden RRBRBB högre sannolikheten än följden BRRRRR eftersom den tycks bättre representerar faktumet att ”B” och ”R” har lika sannolikhet. Denna missuppfattning kan kopplas till en känsla av att till exempel följden BRRRRR inte verkar motsvara slumpens variation i resultat (Tversky & Kahneman, 1974:1125). Vidare leder detta till det som kallas för *gambler's fallacy*, spelarens vanföreställning, som kan vara positiv eller negativ. ”Positiv” innebär att spelaren tror att nästa resultat efter följden BRRRRR borde vara R (eftersom R är ”på gång”) medan ”negativ” motsvarar förväntningen att B ska komma (eftersom den inte har kommit på länge).

En annan form av missuppfattning kallas för *availability*, översatt tillgänglighet. Det handlar om hur individer tillskriver sannolikhet till händelser beroende på i vilken omfattning de har varit med om att dessa händelser har inträffat (Tversky & Kahneman, 1974:1127). Ordet ”tillgänglighet” syftar då till tillgänglighet i individens minne. Till exempel kan en person tänka att sannolikhet för att vinna i spelet A är större än sannolikhet att vinna i spelet B på grund av att hen har vunnit oftare i spelet A än i spelet B. I sin bedömning tar inte personen hänsyn till de faktiska förhållanden som råder i varje spel.

Eleverna förknippar ofta slumpförsök med att alla händelser är lika sannolika (Lecoutre, 1992:557). Denna uppfattning, som nämns ”*the equiprobability bias*”, liksannolikvinkling, leder ofta till korrekta slutsatser vid bestämmande av sannolikhet för elementarhändelser men är missvisande när det gäller sannolikhet för händelser bestående av flera utfall. Pratt (2000:602) ger exempel på liksannolikvinkling när man betraktar summan av två sexsidiga tärningar. Eleverna anser att alla summor har samma sannolikhet antagligen eftersom de uppfattar att varje tärning är rättvis och då borde deras summor också fördela sig rättvis (Callaert, 2004:2).

Konold m.fl. (1993:413) poängterar i sin forskning att eleverna kommer till klassrummet med mångfacetterade uppfattningar om sannolikhet, vilket kan vara en av anledningarna till att området anses vara svårt att undervisa i. Lärarens uppgift är för Konold inledningsvis att inta rollen av en etnograf som försöker förstå en främmande kultur (”adopting instead the ethnographer's frame, trying to understand the language and practices of a foreign culture.”, Ib., 1993:413). Eleverna har mött slumpen i sin vardag på många olika sätt och tillskrivit vissa innebörder till ord och uttryck som ”chans”, ”50-50” eller ”oberoende”. Deras vardagliga förståelse av begreppen stämmer dessvärre sällan med de matematiska definitionerna om sannolikhet, vilket leder till missförståelse (Callaert, 2004:4; Konold, 1991:144,). En möjlig missförståelse elever-lärare emellan har Konold (1989:59) definierad som ”*the outcome approach*”. En svensk översättning föreslås vara resultatfokus. För de individer som befinner sig i detta tänkande handlar sannolikhet om att förutsäga det faktiska resultatet av ett kommande enskilt försök. Dessa förutsägelser utvärderas sedan ha varit antingen rätt eller fel: om resultatet skiljer sig från det förväntade resultatet så upplevs den tillskrivna sannolikheten som för hög (Ib., 1989:90). En annan aspekt av resultatfokus är att individerna tänker att utfallet av kommande försök i princip borde gå att förutsäga med säkerhet om man var tillräckligt kunnig.

Denna uppfattning kan illustreras med följande exempel. Meteorologen sa igår att chansen för klar himmel idag skulle vara 70 %. Om det nu idag är molnigt anser individen med resultatfokus att prognosen var fel och att meteorologen inte var så kompetent. Konold (1989:91) skriver om personer med resultatfokus att “they may even believe that someone who has mastered the mathematics of probability can predict the successive results of rolling a bone”. Detta är exempel på *deterministisk tänkande* som Pfannkuch och Brown (1996:52) också kunnat konstatera hos elever. Forskarna observerade att eleverna ofta upplever en konflikt mellan sina intuitioner och sitt inlärda sannolikhetstänkande. Till exempel om de ska uttrycka sig om sannolikhet för ”klave” efter fyra kronor i rad, kan de säga att de tror att det blir klave fast de vet att sannolikheten är densamma för båda utfall. En effekt kan vara att de snabbt lär sig att misstro sina intuitioner, men förstår inte varför deras intuitiva svar är fel och därmed återvänder till sina intuitioner.

Callaert (2004:2) poängterar att ovanstående missuppfattningar i hög grad är kopplade till *kontexten*. Vid nationella lotto dragningar tror sig ingen ha 50 % chans att vinna, ändå finns det bara två möjliga utfall, vinst eller förlust. Tydligen finns inte någon liksannolikvinkling i en sådan situation, vilket beror på att man har en klar bild av vad slumpförsöket innebär (att välja rätt några få bland många andra). Däremot, när det gäller sannolikheten för summan av två tärningar, har vi ingen direkt klar och erfarenhet baserad bild av försökets innebörd. Vidare menar Callaert (2004:6) att uppgifternas formulering ska beaktas noga när man syftar till att undersöka tänkande om sannolikhet, så att eleverna svarar på samma fråga som forskaren ställer. Ordförståelsen kan vara vacklande, små ändringar i texten kan resultera i helt andra svar och resonemang, textens layout kan också påverka (Borovcnik & Bentz, 1991:80, Nilsson, 2003:22).

2.2.2 Elevers bearbetning av sannolikhet: vikten av utfallsrummet

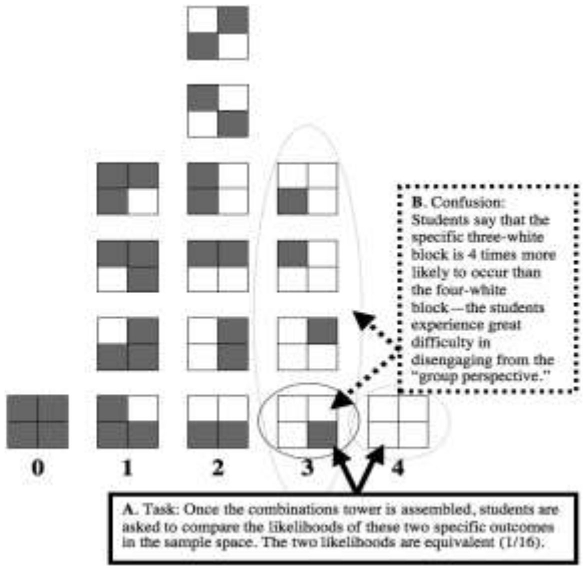
Bryant och Nunes (2012:3) anser i sin forskningsgenomgång att arbetet med sannolikhet ställer flera olika typer av kognitiva krav, vilka är:

1. Att kunna förstå slumpens innebörd.
2. Att kunna utforma och kategorisera utfallsrummet.
3. Att kunna kvantifiera sannolikheter.
4. Att kunna resonera om korrelationer.

För Langrall och Mooney (2005:106) kräver förståelse av utfallsrummet att man inser att flera olika vägar leder till samma utfall samtidigt som man har förmåga att systematiskt och uttömmande kartlägga dessa vägar. Just den kognitiva bearbetning som krävs för att analysera utfallsrummet anses vara ett centralt första steg för att lyckas lösa sannolikhetsproblem (Bryant & Nunes, 2012:29). Detta gäller framförallt när de sökta sannolikheterna består av olika elementarhändelser som ska grupperas. Att uppdela en sammansatt händelse i sina enkla element är ett kraftfullt verktyg för att härleda komplexa sannolikheter från enklare sådana (Batanero m.fl., 2005:27). Svårigheten ligger i att elementarhändelser med lika sannolikhet kombineras i nya händelser med skilda sannolikheter, alltså finns det två nivåer av tänkande som ska samarbeta (Bryant & Nunes, 2012:34, 45). I problemet om sannolikhet för ”två pojkar och en flicka” i en familj med tre barn behöver man lista 8 olika utfall med samma sannolikhet och sedan addera sannolikheten för de tre utfallen som tillhör händelsen (3/8). Detta krävs ofta en förmåga att hantera kombinatoriska operationer eller i alla fall att vara medveten om vikten av utfallens ordning (Jones m.fl., 2007:912, Nilsson, 2003:12). Vidare, för att kunna följa upp sannolikheter i sammansatta händelser, fordras en analys av huruvida händelserna år oberoende eller inte (Batanero m.fl., 2005:28).

Chernoff och Zazkis (2011:15) uppmärksammar att framställningen av utfallsrummet är för eleverna en mer komplex process än det som framstår av normativa beskrivningar. De ger exempel av detta genom problemet som nämndes precis ovan (i en familj med tre barn, vad är sannolikheten att det finns två pojkar och en flicka). En vanlig lösning som grundar sig på den klassiska metoden att lista alla möjliga utfall kommer fram till att sannolikheten är 1/4, med tanke på att ”två pojkar och en flicka” är ett alternativ av fyra möjliga alternativ (de andra tre är: ”tre pojkar”, ”tre flickor” och ”två flickor och en pojke”). Felet i resonemang ligger i att alla dessa fyra alternativ inte är lika sannolika, utan det finns olika sätt att få ”två pojkar och en flicka” (tre stycken) medan det finns bara ett sätt att få ”tre pojkar”. Den korrekta sannolikheten är därför 3/8. Forskarna menar därmed att det finns olika alternativa beskrivningar av utfallsrummet som är mer eller mindre relevanta i förhållande till den sökta sannolikheten. Chernoff (2009:656) introducerar först begreppet subjektiv utfallsrum (”subjective-sample-space”) och sedan med Zazkis (2011:18) begreppet ”sample set” (översatt utfallsset) som beskriver en uppsättning av alla möjliga utfall, till skillnad från ”sample space” (utfallsrummet) som syftar till den normativa beskrivningen av alla möjliga utfall. Forskarna (Chernoff & Zazkis, 2011:23) menar att, i exemplet ovan, en önskvärd pedagogik utgår från elevens utfallsset med fyra element och ställer frågan om alla noterade utfallen är lika sannolika (i stället av att berätta för studenten att hen inte har listat ut alla möjliga utfall). Tanken är, när möjligt, att bygga en bro från elevens naiva, ofullständiga eller felaktiga idéer mot de korrekta och konventionella, i stället för att avvisas eller överge dessa helt.

I en undersökning (Abrahamson, 2008:7, se bild) visar läraren till elever 16 olika möjliga utfall av ett slumpförsök som går ut på att lyfta fyra kulor med en speciell spade (som har fyra platser för kulor) från en urna som innehåller många svarta och vita kulor. Läraren ordnar utfallen så att det framgår tydligt att fyra utfall har ”3 vita - 1 svart”, och endast ett utfall har ”4 vita”. Sedan ber läraren eleverna att jämföra sannolikheten för ett av utfallen av ”3 vita - 1 svart” med sannolikheten för ”4 vita” (svar: 1/16 var). Trots att läraren poängterar att man menar ett visst utfall tycker ett flertal elever att sannolikheten för 3 vita är större. Detta tyder på den svårigheten som finns att skilja mellan elementarhändelse och den övre kategorin i vilken dessa kan ingå. Eller allmänt mellan ordnade och ordnade resultat.



Figur 4: Undersökning Abrahamson, 2008

Överlag tycks det vara så att eleverna ofta koncentrerar sig till en enda händelse i stället för att betrakta hela utfallsrummet när de ska behandla en slumpsituation (Batanero m.fl., 2005:27).

2.3 Studiens teoretiska ramverk

2.3.1 Ramverk för kartläggning av elevernas tänkande i sannolikhet

För att beskriva elevernas resonemang i sannolikhet kommer den här studien att använda sig av fyra nivåer av sannolikhetstänkande (Tarr & Jones, 1997:51; Tarr & Lannin, 2005:221):

• På *nivå 1* ignorerar eleven given numerisk information för att göra sannolikhetsberäkningar och baserar sig i stället på subjektiva resonemang. Olika typer av missuppfattningar framkommer i argumentation. Alla möjliga utfall i enkla slumpförsök listas inte ut. Säkra och omöjliga händelser identifieras dock. Eleven tror sig i vissa fall kunna påverka utfallet på något sätt.

• På *nivå 2* befinner sig tänkandet i övergång mellan nivå 1 och högre nivåer. Subjektivitet präglar fortfarande resonemangen men en del numerisk information används för vissa beräkningar. Alla möjliga utfall listas ut för enkla slumpförsök men inte för sammansatta händelser. Eleven visar medvetenhet om huruvida vissa sannolikheter påverkas i situationer utan återläggning, men användningen av tal för att bestämma sannolikhet är olämplig. Det finns en förståelse för sannolikhet som kvot men osäkerhet hur detta ska hanteras. Eleven distraheras av irrelevant information och visar ofta tecken på liksannolikvinkling.

• På *nivå 3* använder eleven strategier för att lista ut utfallen i sammansatta händelser och förmår delvis att följa förändringar i utfallsrummet i betingad sannolikhet. Men skillnaden mellan ”med” och ”utan återläggning" uppfattas otydligt och olika missuppfattningar framkommer i exempelvis flerstegsförsök. Eleven lyckas inte med att framställa utfallsrummet i sin helhet. Numeriska uttryck, ofta i form av kvot, används för att beskriva och jämföra sannolikheter, även om det sker på ett felaktigt sätt. Någon form av relativ frekvens används ofta för att beräkna sannolikhet.

• På *nivå 4* har eleven en klar bild av utfallsrummet, tänker numeriskt, ser om händelser är beroende eller ej samt förstår utvecklingen av resultaten om försöken upprepas många gånger. Det finns en medvetenhet att osannolika händelser inträffar, vilket gör att man inte gärna vill göra ”fasta prognoser”. Eleven tilldelar rätt numeriska värde till sannolikheter, ofta spontant, och använder dessa korrekt för att beskriva och jämföra sannolikheter. Det finns inga tecken på vanliga missuppfattningar (representativitet, tillgänglighet, resultatfokus, liksannolikvinkling).

Tabell 1: Presentation av de fyra olika nivåerna i sannolikhetstänkande

	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3	Nivå 4
Numerisk information används	inte	delvis	felaktigt	korrekt
Utfallsrummet kartläggs	inte	för enkla försök	delvis för flerstegsförsök	för flerstegsförsök
Beroendet uppfattas	inte	delvis	men otydligt	tydligt
Missuppfattningar visas	ofta	ibland	ibland i svårare fall	inte

2.3.2 Ramverk för att strukturera matematiska resonemang

För att strukturera all empirisk data kommer elevers resonemang att analyseras och presenteras utifrån Lithners teoretiska ramverk (2008). Lithner (2008:256) definierar resonemang som den tankekedja som äger rum, från det att eleven börjar lösa ett problem till att den kommer fram till en slutsats. Med problem menas en uppgift som behöver lösas utan att lösaren har någon självklar metod för det. Resonemanget bygger inte nödvändigtvis på formell logik utan på argument som den som löser uppgiften uppfattar som befogade.

Att lösa en uppgift är en process som enligt Lithner (2008:257) kan beskrivas med följande fyra steg:

1. En uppgift erhålls och identifieras som en problematisk situation (PS) om lösningsmetoden inte är uppenbar.
2. Ett strategival (SV) görs. Strategier kan variera från för uppgiften specifika procedurer till allmänna metoder. När ett val görs kan en argumentation förekomma om varför denna strategi kommer att lösa uppgiften.
3. Strategin implementeras (SI). Genomförandet kan stöttas av en argumentation om varför denna strategi löser uppgiften.
4. En slutsats (S) erhålls.

3. SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNINGAR

Syftet med studien är att undersöka hur några högstadieelever resonerar när de löser sannolikhetsuppgifter.

Undersökningen begränsar sig till den klassiska sannolikhetsdefinition för vilken olika sannolikheter kan beräknas a priori i termer av proportion i utfallsrummet.

Studien försöker finna svar på nedanstående frågeställningar:

- Vilka matematiska kunskaper från sannolikhetsläran använder sig eleverna av?
- Vilken förståelse av slumpen visar eleverna?
- Hur arbetar eleverna med utfallsrummet för att beräkna sannolikheter?

Arbetet fokuserar därmed på tre områden. Det första handlar om *användning av sannolikhetsteori*. *Förståelsen för slumpens natur* är det andra området som studeras och det sista berör hur eleverna tänker i termer av *utfallsrum* när de ska lösa uppgifter i sannolikhet.

4. METOD

I följande kapitel beskrivs tillvägagångssättet som använts för att besvara studiens frågeställningar. Rubrikerna är följande: övergripande metodval, urval, etiska överväganden, genomförande samt bearbetning och analys av materialet och slutligen utformning av studiens uppgifter.

4.1 Övergripande metodval

Studien baseras på kvalitativa analyser av elevers lösningar till tre olika matematiska problem. Dessa analyser görs utifrån en hermeneutisk ansats för vilken tolkningen av fenomen som är skapade av människor (olika former av yttrande) är central. Målet är att försöka förstå individens intentioner och skapa mening ur dess yttrande (Fejes & Thornberg, 2009:136). Valet av en kvalitativ undersökning grundas i studiens avsikt att analysera elevernas resonemang vid lösning av sannolikhetsproblem. Kvale (1997:32) betonar att tonvikten vid kvalitativ ansats läggs på undersökningspersonens uppfattning om vad den anser vara relevant och viktigt i ett ämne. Det handlar om ett försök att beskriva individernas förståelse samt att iaktta den mångfald av tolkningar som kan finnas (Ib., 1997:54). Forskaren uppmuntrar därför intervjupersonen att uttrycka sig fritt om ämnet och låter henne följa de olika spår och mångtydiga tolkningar som kan uppstå, utan att själv komma med förbestämda interpretationer. Det handlar om att forskaren håller sig i bakgrunden samtidigt som personen stödjas i sitt utforskande.

För att främja elevernas benägenhet att ”tänka högt” utan att riskera att observatören styr samtalet fick eleverna arbeta i par för att lösa uppgifterna. Detta bedömdes kunna främja den resonerande aktiviteten på ett naturligt sätt, samtidigt som eleverna möjligen får känna sig bekvämare än att vara själv med en vuxen.

4.2 Urval

Eleverna valdes i ett kommunalt högstadium i en medelstor stad i Mellansverige, vilket gör att det inte går att tillskriva dessa elever några särskilda egenskaper förutom att kunna uppfattas som ”vanliga” elever. Urvalet av elever gjordes av deras ordinarie matematiklärare utifrån fyra kriterier:

- deras kunskapsnivå i matematik skulle bedömas av läraren som ”från godkänt och uppåt”,
- läraren skulle välja jämnstarka par som är bekväma att arbeta tillsammans,
- det skulle vara en viss bredd i kunskapsnivån bland de valda paren,
- det fick gärna vara en jämn könsfördelning bland eleverna.

Antalet tillfrågade par uppgick till fyra då det bedömdes att det antalet, med tre uppgifter, skulle ge signifikanta resultat samt att fler observationer troligen inte skulle ge så mycket mer resultat i förhållande till tidsåtgången (Kvale, 1997:98).

Eleverna valdes i en årskurs 9 eftersom, vid undersökningens genomförande, det var cirka ett år sedan de hade arbetat med sannolikhet. Därmed hoppades undersökningen kunna lyfta fram deras grundförståelse av sannolikhet på ett bättre sätt än om de precis hade arbetat med området. I årskurs 8 hade klassen först arbetat med likformig sannolikhetsfördelning, enkla slumpförsök och formeln g/m. Sedan hade man introducerat träddiagram och produktregeln för att behandla flerstegsförsök med oberoende steg. Uppgifterna baserades framförallt på tärningar, mynt, kulor och olika former av lotterier.

4.3 Etiska överväganden

Vid undersökningens utformning och genomförande beaktades de fyra olika etiska huvudkrav som Vetenskapsrådet (1990) presenterar i sitt dokument ”Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning”:

> *Informationskravet*
> Forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte.
> *Samtyckeskravet*
> Deltagare har rätt att själva bestämma över sin medverkan.
> *Konfidentialitetskravet*
> Uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifter ska förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem.
> *Nyttjandekravet*
> Uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forskningsändamål.

Innan undersökningen fick samtliga elever ett informationsbrev (Bilaga 1) som synliggjorde syftet med studien, hur genomförandet skulle gå till, frivilligheten att delta, konfidentialiteten samt möjligheten att avbryta deltagandet när som helst utan motivering. Konfidentialiteten förstärks i undersökningen genom att så lite personlig information som möjligt om informanterna ges. Efter avslutad studie får samtliga deltagare möjligheten att ta del av resultaten. Nyttjandekravet beaktades genom att videomaterialet skyddades för att inte kunna användas för kommersiellt bruk eller andra icke-vetenskapliga syften.

4.4 Genomförande samt bearbetning och analys av material

Eleverna fick komma i par till ett avskilt och lugnt rum och stå vid en vit tavla med färgpennor. Studiens kontext och syfte presenterades kort samt på vilka sätt konfidentialiteten skulle garanteras. Vidare förklarades observatören vara intresserad av deras tänkande och resonemang snarare än av att få ”rätt” svar. Därför ombads de att ”tänka högt” och med varandra under lösning av uppgifter. Uppgifterna presenterades en i taget, både muntligt och på ett papper som varje elev fick. Elevernas arbete och lösningar spelades in med en videokamera.

Eleverna började med att läsa uppgiften på var sitt papper, oftast tyst. Sedan diskuterade de direkt om hur de förstod problemet och om hur det kunde lösas. De stod hela tiden framför tavlan, med pappret i handen, och började efter en kort stund med att illustrera på tavlan sina tankar och svar, oftast av sig själva, ibland efter observatörens uppmaning. Det var vanligen en elev som ledde samtalet medan den andra instämde eller uttryckte tvivel om de förslagna lösningarna. Observatören behövde oftast inte säga något utan eleverna arbetade själva tills de vände sig mot observatören för att markera att de kände sig färdiga med problemet. Papprena plockades då upp och nästa uppgift delades ut.

Efter genomförd undersökning transkriberades hela innehållet i de inspelade observationerna, inklusive beskrivningar av elevernas rörelser och anteckningar på tavlan. Analysen började med att strukturera insamlat material enligt Lithners ramverk. Detta gjorde synligt i kortfattad form de successiva problemställningar som eleverna arbetade med, samt vilka strategier och lösningar som behandlades.

Nästa steg i analysen var att beakta transversalt hur varje uppgift löstes med avseende på elevernas tänkande i sannolikhet (Tarr & Jones, 1997). Där uppmärksammades, i enlighet med Tabell 1, hur eleverna i sina argumentationer och lösningar:

- använde tillgänglig numerisk information på ett relevant sätt,
- försökte att kartlägga utfallsrummet,
- uppfattade beroendet i försöket,
- visade på missuppfattningar.

Sedan jämfördes för varje uppgift de analyserade resultaten med varandra och utdrag valdes för att representera de olika nivåerna för varje uppgift. Det betyder att en del av observationerna inte presenteras i studien då de motsvarar resultaten som liknar andra redovisade utdrag. För att läsaren ändå ska kunna få en bild av samtliga observationer redovisas alla lösningar som eleverna producerade i Tabell 2 ”Översikt av resultat”.

4.5 Utformning av studiens uppgifter

För att lyfta fram elevers föreställningar och matematisk aktivitet beaktades följande krav i utformning av studiens uppgifter (Wistedt, Brattström, & Jacobsson, 1993:15):

- uppgifterna bör handla om i grunden välkända situationer,
- uppgifterna ska samtidigt uppmana till en resonerande aktivitet över matematiska aspekter kopplade till området sannolikhet,
- de bör därtill utformas så att en variation av elevernas respons främjas.

Undersökningssituationen baseras på tre olika uppgifter. I enlighet med studiens frågeställningar fokuserar dessa på välbekanta spelsituationer där ett tänkande utifrån proportionalitet leder till slutsatser om sannolikheter.

Uppgift 1: Ett mynt har kastats fyra gånger. Man har fått krona fyra gånger i rad. Beräkna sannolikheten att få en krona på det femte kastet samt sannolikheten att få en klave? Vilken är störst?

Uppgift 1 behandlar ett enkelt slumpförsök som äger rum efter fyra liknande försök. Avsikten är att undersöka om eleverna uppfattar att utfallen på det femte försöket är oberoende av de tidigare försöken samt om de förmår identifiera utfallsrummet och tillskriva sannolikheter utifrån det. Syftet är att få en inblick i elevernas förståelse av slumpen och se om det finns uttryck för olika missuppfattningar rapporterade av tidigare forskning (representativitet, tillgänglighet, resultatfokus, liksannolikvinkling). Eleverna får också möjlighet att visa grundläggande förståelse av sannolikhet som tal mellan 0 och 1.

Lösning till uppgift 1:
$\Omega=\{krona, klave\}$ Likformig sannolikhetsfördelning
$P(krona)=P(klave)=1/2$

Uppgift 2: En påse innehåller 3 likadana kulor, 2 röda och en blå. Två kulor dras upp på måfå. Beräkna sannolikheten att få två röda samt sannolikheten att få en röd och en blå? Vilken är störst?

Uppgift 2 behandlar ett flerstegsförsök med beroende steg, en situation ”utan återläggning”. Avsikten är att undersöka om eleverna kan följa upp ändringar i utfallsrummet, kartlägga det i sin helhet samt tillskriva sannolikheter utifrån det. Svårigheten ligger i att det finns två av tre elementarhändelser som ska betraktas samtidigt för händelsen ”1 röd, 1 blå”.

Lösning A till uppgift 2:
Kulorna nämns R1, R2 och B. Oordnade par.
Ω={(R1, R2), (R1, B), (R2, B)} Likformig sannolikhetsfördelning
P(R1, R2)=P(R1, B)=P(R2, B)=1/3
P(2 röda)=1/3 P(1 röd, 1 blå)=2/3 Summaregel

Lösning B till uppgift 2: träddiagram
P(2 röda)=P(1 röd först)*P(1 röd sen)=2/3*1/2=1/3 Produktregel
P(1 röd, 1 blå)=1- P(2 röda)=2/3 Komplementhändelse
eller
P(1 röd, 1 blå)=P(röd först, blå sen)+P(blå först, röd sen) Summaregel
P(1 röd, 1 blå)=2/3*1/2+1/3*1=1/3+1/3=2/3 Produktregel

Uppgift 3: Ett mynt kastas tre gånger. Beräkna sannolikheten att få ordningen krona-krona-krona samt sannolikheten att få ordningen krona-klave-krona. Vilken är störst?

Uppgift 3 behandlar ett flerstegsförsök med oberoende steg, en situation ”med återläggning”. Syftet är att ta reda på om eleverna lyckas med att beskriva hela utfallsrummet och beräkna motsvarande sannolikheter. Ordningen krona-krona-krona ger dessutom möjlighet att se tecken på representativitet eller tillgänglighet.

Lösning A till uppgift 3: likformig sannolikhetsfördelning
Ω={(kr, kr, kr), (kr, kr, kl), (kr, kl, kr), (kr, kl, kl), (kl, kr, kr), (kl, kr, kl), (kl, kl, kr), (kl, kl, kl)}
8 utfall, alla utfall har P=1/8.

Lösning B till uppgift 3: träddiagram, oberoende händelser P(A∩B)=P(A)*P(B)
P(krona-krona-krona)=P(krona-klave-krona)=(1/2)^3=1/8

Uppgifterna presenterades i ordningen 1, 2 och 3. Avsikten var att först börja med den enklaste uppgiften (1) och sedan att fortsätta med den andra uppgiften för att ändra på kontexten, från mynt som kastas till kulor som dras upp. En variation i sammanhanget ansågs kunna öka intresset och uppmärksamheten. Meningen var också att arbetet med den första uppgiften inte skulle påverka svaren på det sista problemet som på ett liknande sätt handlade om upprepade kast av mynt.

5. RESULTAT

I resultat presenteras uppgifterna i ordningen 1, 3, 2 eftersom detta motsvarar den kognitiva progressionen: från enkelt försök till flerstegsförsök, från oberoende till beroende steg. Först ges i tabell 2 en översikt av resultat, gruppvis, med både nivå i klassificeringen (Tarr & Jones, 1997), tid för lösning av uppgiften (i minuter) och successiva svar som producerades. Sedan kommer 10 olika exempel att analyseras innan en sammanfattning görs. Namnen på eleverna är fiktiva.

Tabellen 2 nedan ska läsas som att exempelvis Maria och Lisa (grupp A) löste uppgiften 1 på nivå 2 och 3, att de arbetade med problemet under 6 och en halv minuter samt att de gav under tiden följande successiva svar på uppgiften: 50 %, 40 %, 100 % och 50 %. Att deras arbete illustreras med det andra exemplet i resultat framgår av anmärkningen ”(ex. 2)”.

Tabell 2: Översikt av resultat

Nivå (se exempel)/ Tid för lösning/ Svar (successivt)	Enkelt slumpförsök Uppgift 1 Ett kast (efter fyra)	Flersteg, oberoende Uppgift 3 Tre kast	Flersteg, beroende Uppgift 2 2 av 3 kulor
Grupp A Maria och Lisa	Nivå 2-3 (ex. 2) 6´30 0,5; 0,4; 1; 0,5	Nivå 1-2 (ex. 4; ex. 3) 6´ 1,5	Nivå 1-2 (ex. 6) 6´ 0,66/1; 0,66/0,45
Grupp B Bruno och Viktor	Nivå 4 (ex. 1) 1´40 0,5	Nivå 4 (ex. 5) 3´10 0,125	Nivå 3 (ex. 9) 3´20 0,66/0,66
Grupp C David och Leo	Nivå 4 1´ 0,5	Nivå 4 1´30 0,125	Nivå 3-4 (ex. 10) 5´40 0,66/0,66; 0,33/0,66
Grupp D Louise och Maud	Nivå 4 1´ 0,5	Nivå 3 4´20 1,5; 1,25; 0,125	Nivå 2-3 (ex. 7-8) 7´30 0,66/0,66; 1,16/0,83

Tabellen visar att problemet 1 med det enkla slumpförsöket behandlades rätt och snabbt av de flesta grupperna. När det gäller uppgiften 3, om tre kast av mynt, kan det konstateras att tre grupper lyckades med att lösa problemet, dock mer eller mindre effektivt. Uppgiften 2 med beroende steg var den som visade sig svårast att hantera, med endast ett par som kom fram till en relevant lösning. Horisontellt kan det noteras enhetliga resultat: de grupperna som lyckas bäst (med avseende på erhållna svar och använd tid) gör det på alla uppgifter och tvärtom.

5.1 Enkelt slumpförsök

Uppgift 1: Ett mynt har kastats fyra gånger. Man har fått krona fyra gånger i rad. Beräkna sannolikheten att få en krona på det femte kastet samt sannolikheten att få en klave? Vilken är störst?

Tre av fyra par löste uppgiften utan tvekan på kort tid. Eleverna insåg att det femte kastet inte påverkades av tidigare kast, att krona eller klave var lika sannolika, vilket kunde uttryckas som 50 % chans för båda utfall. Här följer ett exempel, grupp B.

5.1.1 Exempel 1: uppgift 1- grupp B

> Bruno: Men om man kastar en gång, då borde det fortfarande vara lika stor chans som alla tidigare gånger. Så borde det vara alltså 50 % chans att det blir en krona.
> Viktor: Ja, 50 % chans.
> Bruno: För det borde väl inte påverka, dom tidigare gångerna.
> Viktor: Nej.
> Bruno: Vilken är störst? Det finns ingen som är större, båda är lika stora, 50 % chans.

PS (problematisk situation): Vilken är sannolikhet för en krona/klave på det femte kastet?
SV (strategival): Fokusera på det femte kastet.
SI (strategi implementering): Betraktar att krona och klave är lika sannolika på det femte kastet.
S (slutsats): 50 % chans för båda händelser.

Eleverna förstår att det femte försöket är oberoende av de tidigare, det vill säga att sannolikheter för detta kast inte påverkas av de händelser som har inträffat innan. De är vidare medvetna om utfallsrummet: mängden av alla utfall som är möjliga vid försöket identifieras som {krona, klave}. Eleverna kan spontant tilldela rätt numerisk värde till sannolikheter. De litar också på sina beräkningar, känner sig säkra i uttalandet om sannolikheter. Detta motsvarar nivå 4 i klassificeringen: eleven har en klar bild av utfallsrummet, tänker numeriskt, ser om händelser är beroende eller ej och det finns inga tecken på vanliga missuppfattningar (representativitet, tillgänglighet, resultatfokus, liksannolikvinkling).

5.1.2 Exempel 2: uppgift 1- grupp A

Ett av de fyra paren, grupp A, kom också spontant till ett tillfredställande svar men kände sig osäkra och började söka efter andra lösningar.

> Maria: Det handlar om sannolikheter… Det är ju när man delar…
> Lisa: Det är 50 % chans.
> Maria: Varför då?
> Lisa: Det är antingen krona eller klave.
> Maria: Ah just det, det är bara två grejer som kan hända.
> *En stund*
> Maria: Men jag vet inte. Hur räknar man ut det då? Är det tre gånger en tredje del?
> Lisa: Är det inte så ”lika med”?... (gör stora streck i luften med handen)
> Maria: Det är någonstans man delar… Det är typ två. Det kan ju bli två grejer (skriver 2) och sen och sen så kastar man den fem gånger… eller?
> Lisa: Man har kastat 4 gånger och varje gång blev det en krona. Då blir det så där…
> Maria: fem (skriver delad per fem under tvåan). (båda skrattar)
> Lisa: Då är det väl så här: fyra i fyra. Nej, vänta! Fyra i fem… Nej!
> *En stund. Maria kompletterar 2/5=0,40 och säger att det är 40 % chans.*
> Jag: Maria du skriver 40%. Lisa, du kände spontant att det var 50 %...
> Lisa: Ja, eller nånting sånt.
> Maria: Men det finns en formel där som man ska ta. Sannolikheten… Gånger, delad på… sannolikheten till det… Nej, utfall, typ, nej, utfall…

PS: Vilken är sannolikhet för en krona/klave?
SV: Söker efter en formel.
SI: Provar olika divisioner utifrån givna tal i uppgiften.
S: 40 % eller 50 %.

Lisa visar spontant en god uppfattning av utfallsrummet (”det är antingen krona eller klave.”) och kan tilldela ett värde på sannolikheten (”det är 50 % chans.”) utan att låta sig påverka av tidigare försök. Detta motsvarar nivå 3. Maria börjar däremot med att söka efter en algoritm att använda och verkar söka efter definition gynnsamma/möjliga. Sedan tycks hon hänga med Lisas resonemang men samtidigt uppfattar att det borde vara någon form av beräkning som ska göras. Både Maria och Lisa söker då efter en formel att använda och efter lämpliga tal från uppgiften att sätta i formeln. De kopplar sannolikhetsberäkning med division men är osäkra på vilka tal ska ingå i divisionen. De provar olika kombinationer med talen 2, 4 och 5. De uppfattar att utfallsrummet för varje försök är (krona, klave) och att sannolikheten ska beräknas i form av en kvot. De använder numerisk data från problemet men vilseleds av irrelevant information. Deras resonemang i utdraget ovan motsvarar därför nivå 2 där en del numerisk information används för vissa beräkningar och där det finns en förståelse för sannolikhet som kvot men en osäkerhet kring hur detta ska hanteras.

5.2 Flerstegsförsök med oberoende steg

Uppgift 3: Ett mynt kastas tre gånger. Beräkna sannolikheten att få ordningen krona-krona-krona samt sannolikheten att få ordningen krona-klave-krona. Vilken är störst?

5.2.1 Exempel 3: uppgift 3- grupp A- del 1

Maria och Lisa är överens om att det är 50 % eller ½ som gäller varje gång man kastar.
Maria skriver ½ ½ ½ bredvid krona-krona-krona.
Lisa: En halv! Och sen plus eller vadå?
Maria: Jag vet inte. Så tänker jag. Sen om man tar plus eller gånger…
Lisa skriver ½ ½ ½ bredvid krona-klave-krona.
Maria: Då blir det konstigt! Det är samma sak!
Lisa: Men det blir samma sak.
Maria: Ja, det blir nog faktiskt.
*En stund senare skriver Lisa ½*3=3/2=1,5=150 %*
Lisa: Det blir 150 %.
Maria: Fast det är mer än 1. Det blir jättekonstigt! Mer än 100 %!
Lisa: 150 %, det är vårt enda svar. Det är samma sak för den andra.
Jag: Är det samma chans för båda två?
Lisa: Ja, men det borde inte! Eller, jo! Eller borde det vara det? Ja, den har bara två sidor.

PS: Vad är sannolikheten för krona-krona-krona eller krona-klave-krona?
SV: Kombinera sannolikheten för varje enskilt försök.
SI: Räknar ½*3.
S: Båda ordningar har samma sannolikhet, 150 %.

Eleverna visar medvetenhet om att de tre olika kasten inte påverkar varandra, att varje försök ger 50 % chans både för krona och för klave samt att detta medför att båda ordningar har samma sannolikhet . De lyckas ändå inte att räkna ut sannolikheten för varje kombination då de adderar sannolikhet för varje händelse i stället för att multiplicera dessa (produktregeln). De visar ingen klar bild av utfallsrummet: det finns inga försök att utforska samtliga möjliga utfall. Resonemang kan därmed anses vara på nivå 2. Dialogen som följer är också en del av grupp As lösning av uppgift 3:

5.2.2 Exempel 4: uppgift 3- grupp A- del 2

Lisa: Vilken är störst?
Maria: Jag tror att det är större chans att man får så (pekar på krona-klave-krona)
Lisa: Varför det?
Maria: För att…
Lisa: Det är bara 50 % varje gång, 50 % chans.
Maria: Ja, men det känns som att du får så här (pekar på krona-klave-krona) lite mer blandat än få varje gång så här en krona (pekar på krona-krona-krona), förstår du?
Lisa: Ja, men det vet man inte.
Maria: Nej, det vet man inte men så tror jag! (skratt)

PS: Vilken ordning har störst sannolikhet krona-krona-krona eller krona-klave-krona?
SV: Utgå från sin känsla av utfallsrummet.
SI: Söker efter ordningen som visar större variation.
S: Svarar att den ”blandade” ordningen är mer sannolik.

På liknande sätt som för uppgift 1 tenderar Maria att lämna tidigare svar för att utveckla en mer komplicerad lösning. Maria baserar inte sitt resonemang på given numerisk information för att göra beräkningar utan använder subjektiva bedömningar. Detta motsvarar nivå 1. Marias tänkande illustrerar missuppfattningen ”representativitet”, att tro att ett visst utfall har högre sannolikhet för att det bättre motsvarar slumpens variation.

5.2.3 Exempel 5: uppgift 3- grupp B

Bruno: Om en krona kastas tre gånger då är det 50 % chans för dom tre… på alla tre gånger för att det ska bli krona eller klave. Så om det ska bli krona-krona-krona, då måste man ju ha 50 %...
Bruno börjar rita tre mynt och skriver ½ under varje.
Viktor skriver =1/8 efter samtidigt som Bruno säger att det borde bli 0,125.
De håller med varandra.
Bruno: Och då borde det också vara en åttondel chans för krona-klave-krona. För att det är en av de 8 kombinationer som det kan bli på dom där tre kasten.

PS: Vad är sannolikheten för krona-krona-krona eller krona-klave-krona?
SV: Multiplicera sannolikheten för varje enskilt försök.
SI: Räknar (½)^3.
S: Båda ordningar har samma sannolikhet, 1/8.

Eleverna uppfattar att de upprepade kasten är oberoende av varandra (händelsen efter påverkas inte av händelserna innan). De tilldelar rätt numeriska värde till varje kast och är medvetna om produktregeln (sannolikheten för en väg lika med produkten av sannolikheterna längs vägen). De litar på sina beräkningar och känna sig säkra kring tilldelade sannolikheter. Bruno visar dessutom att han har en klar bild av utfallsrummet då han tolkar resultatet 1/2*1/2*1/2=1/8 som att det finns 8 kombinationer. Allt detta ligger på nivå 4.

5.3 Flerstegsförsök med beroende steg

Uppgift 2: En påse innehåller 3 likadana kulor, 2 röda och en blå. Två kulor dras upp på måfå. Beräkna sannolikheten att få två röda samt sannolikheten att få en röd och en blå? Vilken är störst?

5.3.1 Exempel 6: uppgift 2- grupp A

Maria ritar två röda och en blå.
Lisa: Två röda… Ja, det är två av tre.
Maria: Aah, precis (skriver 2/3). Eftersom det är två röda…
Lisa: Ja och det är tre, det hela. Och en röd… sannolikheten för en röd… Ja, då är det också två…
Maria: Ja, det är det.
Lisa: Eller är det så här ”en-tre”…
En stund
Maria: Vad? Ja, det är ju…
Lisa: Det är samma sak! Sannolikheten att få en röd och en blå… Det är så här (skriver 2/3 + 1/3)
Jag: Hur tänker ni nu?
Lisa: Det här (pekar på 2/3 + 1/3) är för en röd och en blå. Det här (pekar på 2/3) är för två röda.
En stund
Lisa: Fast då blir det tre…
Maria: Då blir det 100! Då blir det alltid så, men det är det inte…
Lisa: Nej.
Maria: Nej.
En stund
Maria: Man kanske ska gånga eller nånting… (skratt)
*De förklarar att det blir väldigt fel med addition så vill de prova multiplikation i stället 2/3*1/3.*
De räknar en stund och kommer fram till 1/4,5=45%.
Lisa: Då blir det 45 %, då är det inte 50 % eftersom det är två röda. 66% är sannolikheten för två röda och 45% för en röd och en blå

PS: Vilka är sannolikheter ”2 röda” och ”1 röd+1 blå”?
SV: Räkna ”sannolikheten för varje färg” när första kulan dras och sedan addera dessa för att få sannolikheten för 2 kulor.
SI: Får 2/3 för två röda och 1 för en röd och en blå.
S: Inser att svaret 1 är olämpligt.
PS: Vilken är sannolikheten för ”1 röd+1 blå”?
SV: Prova att multiplicera ”sannolikheten för varje färg”.
SI: Räknar 2/3*1/3.
S: Får sannolikhet 45 %.

Eleverna förstår sannolikhet för en eller två röda som färgens ursprungliga relativa frekvens, 2/3. Likadant för sannolikhet för en blå, 1/3. De verkar inte uppfatta att dessa tal motsvarar sannolikhet för respektive färg under första dragningen. Sedan när de ska gå från ”sannolikhet för en röd” och ”sannolikhet för en blå” till ”sannolikhet för en röd och en blå” provar de först att addera elementen 2/3 och 1/3. De förstår att resultatet 1 skulle betyda att händelsen är säker och att detta är omöjligt. Varefter provar de multiplikation och får svaret 45 % som de uppfattar som rimligt. I deras resonemang visar Maria och Lisa en förståelse för sannolikhet som en kvot och kan använda den numeriska information som finns i uppgiften. De förmår dock inte att skapa en bild av utfallsrummet utan omedvetet slutligen behandlar problemet som att det handlar om att dra först en röd och sedan en blå, med återläggning emellan (2/3*1/3). Deras tänkande motsvarar därför nivå 2.

På slutet av den redovisade dialogen visar Lisa också ett resonemang på nivå 1 då hon anser att resultatet 45 % är rimligt för sannolikheten "1 röd + 1 blå". Hon tycks mena att det är logiskt att denna sannolikhet är mindre än 50 % då det finns fler röda. Lisa tänker antagligen att innehållet "två röda för en blå", alltså den högre relativa frekvensen av färgen röd, innebär att sannolikheten att få två röda är högre än sannolikheten att få en röd och en blå. Detta ser hon bekräftat i hennes resultat, respektive 66 % och 45 %. Det illustrerar ett resonemang i närheten av nivå 1 då den grundas mycket på en subjektiv tolkning av färgen röds starkare ställning.

5.3.2 Exempel 7: uppgift 2- grupp D- del 1

> Louise: Då blir det 3 stycken möjliga (skriver "3 möjliga"). Det är två delad på tre då (skriver 2/3). Det är så där antalet… sannolikhet… nej! Antalet…
> Maud: Möjliga.
> Louise: Nej, det här blir antalet möjliga, då (pekar på 3 i 2/3)
> Maud: Aah.
> Louise: Hur blir det då?
> Maud: Men eftersom…
> Louise: Antalet gynnsamma heter det.
> Maud: Aah.
> Louise: Så det måste vara gynnsamma delad på möjliga och det är sannolikheten. Men tre delad på två! Ska man ta procent då, eller? Det måste man göra. Då blir det 66%....
> *Louise förklarar för Maud som tvekar att sannolikheten för två röda är 66 % då det finns två röda, "antalet gynnsamma", av tre kulor.*
> Louise: (pekar på texten i uppgiften "sannolikheten att få en röd") Och den här, då blir det ju 30 %. Den (pekar på texten "och en blå") är också 30 %... Nej! Det där var svårt…
> Maud: Ja!
> Louise: Fast den (pekar på 2/3) har fortfarande 66 %. Fast den här har bara en tredje del (skriver 1/3)… fast det blir 33. För att det här (pekar på 2/3) delad på två är också 33 (skriver "/2" under 66 % och "=33 %").
> Maud: Då borde dom vara lika stor.
> Louise: Ja!... Ja!... Fast… Fast hur kan dom det?... Det är inte vi så jättebra på…
> Maud: Nej…

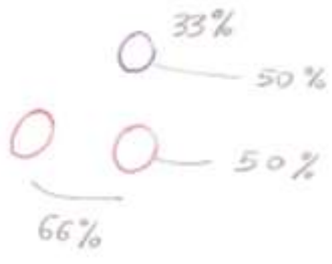
PS: Vilka är sannolikheter "2 röda" och "1 röd+1 blå"?
SV: Räkna "sannolikheten för varje kula".
SI: Räknar efter antalet dragna kulor/antalet kulor i påsen.
S: Får 1/3 för en kula och 2/3 för två kulor, oavsett färgen. Är inte nöjda med sitt svar.

Eleverna visar resonemang på nivå 2: de använder sig av numerisk information för att försöka beräkna en sannolikhet i form av kvot, men betraktar inte relevant utfallsrum.

5.3.3 Exempel 8: uppgift 2- grupp D- del 2

Efter dialogen ovan, tänker eleverna tyst en stund och verkar sedan ge upp. Jag frågar varför de delade resultatet "66 %" per två och frågan leder till att Louise förstår och förklarar att 66 % är chansen för en röd när man drar en kula. Jag undrar därefter om vad som händer om tar upp två kulor.

Maud: Om man tar en röd, om det är 66 % chans, då får man en röd… då är det väl 33 % på den här som är kvar.
Louise: Det blir 50 % chans!
Maud: Aah, 50 %. Men då är det lika på dom.
Jag frågar vilka är deras svar. Louise ritar två röda och en blå.
Louise: Då är det 33 % chans att man tar den (pekar på den blåa och skriver 33 % bredvid). Och sen 66 % på dom där (skriver 66 % under de två röda). Fast om man tar den ena (pekar på en röd till vänster) då är det fortfarande 50 % chans (drar ett streck från den röda till höger och skriver 50 %) och 50 (drar ett streck från den blåa och skriver 50 %).
Maud: Då lär det vara lika.



Figur 5: Uppgift 2, grupp D

Louise: Fast ändå, om man plussar ihop dom här (pekar på 66 % och 50 % röd), det blir 100 %, mer än 100 % .
De diskuterar att resultatet beror på om man tar en kula i taget eller två samtidigt.
Louise: Fast i för sig om tar den blåa först, då blir det fortfarande dom här två röda kvar. Om man råkar liksom får upp den först, för att det är fortfarande 33 % chans, det är inte 0 % chans.
Maud: Nej, verkligen inte.
Louise: Hur tänker vi då? (En stund) Om man tar dom här (pekar på 33 % och 50 %), plussar med varandra, då blir det 83 %. Men det här (pekar på 66 % och 50 %) är 116 %. Och är det ju inte!
Maud: Nej, det går inte.

PS: Vad händer om man drar två kulor?
SV: Rita kulorna och räkna.
SI: Ritar, väljer en röd som första kula, ser att två är kvar med 50 % chans var att bli dragna i andra draget.
S: Det är lika sannolikt för båda händelserna (50 % var).
SI: Räknar sannolikheterna genom addition av räknade tal.
S: Får svaren 83 % och 116 %. Inte nöjda med ett omöjligt svar men ser inga andra lösningar.

Louise arbetar sig fram till en högre medvetenhet av problemet. I del 1 kom hon fram till sannolikhet för dra en viss kula var 1/3 på första dragningen och fick sedan sannolikhet för två kulor genom att addera 1/3 till 1/3 (=2/3 för både ”röd-röd” och ”röd-blå”). I del 2 börjar hon med att klargöra att sannolikheten för färgen röd i första dragningen är 66 % samt sannolikheten för färgen/kulan blå är 33 %. Maud får idén att tänka sig att man har fått upp en röd och Louise kommer då fram till att det två resterande kulorna har samma chans att bli dragna. Efter det tänker sig Louise att man skulle dra den blåa först i stället. Det finns där början till en systematisk kartläggning av utfallsrummet men eleverna lyckas inte att se alla tre kombinationer (att det inte är samma sak om man dra den ena eller den andra av de röda kulorna) och förmår inte heller att kombinera olika sannolikheter. Detta motsvarar nivå 3: de kan följa upp i ett flerstegförsök och ser att sannolikheterna ändras (först 1/3 för en blå men sedan ½ om inte vald först) samtidigt som de inte lyckas att ge ett korrekt numeriskt värde till olika utfall.

5.3.4 Exempel 9: uppgift 2- grupp B

> Viktor: Först är det en tredje del chans att…
> Bruno: Att ta upp en blå?
> Viktor: Ja.
> Bruno: För att det är en av dom tre. Och då sannolikheten för att få upp två röda, det borde vara två tredjedel chans.
> Viktor: Hmm…
> Bruno: Och en blå och en röd, det borde vara… det borde vara också två tredjedel chans. Eller? Hur blir det då? För det är två av tre kulor som man kan ta upp… så det borde egentligen bli två tredjedel chans för båda. Jag tycker det låter alltså… ganska bra. Men sen, vilken är störst chans att man får? Om det är två röda och en blå, då är det väl lite större chans att man får… Man kommer att få minst en röd om man tar upp två kulor. Om båda ska vara röda, om det ska vara större chans att båda är röda då måste man ha nästan tre röda och en blå för då är det fler röda som man kan ta upp så…
> Viktor: Ja, nu är det samma chans.
> Bruno: Om du bara tar två kulor, då är det fortfarande samma chans att det blir båda tror jag. (En stund) Om man skulle ta upp bara en kula, då är det större chans att det blir en röd. Däremot om man tar upp två kulor… För den första är det ganska säker… alltså är det större chans att det blir en röd. Den andra har fortfarande 50 % chans att vara en blå också. Så det gäller alltså, om det är två röda eller en röd och en blå, så tror jag att det lika stor chans där emellan.

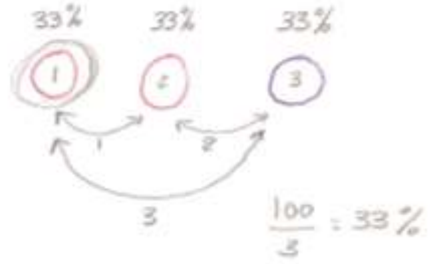
PS: Vilka är sannolikheter ”2 röda” och ”1 röd+1 blå”?
SV: Räkna antalet kulor som plockas upp jämfört med det totala antalet kulor.
SI: Betraktar först 2 röda, 2/3, och sedan en röd och en blå.
S: Får 2/3 för två kulor, oavsett färgen.

Bruno förstår att sannolikheten påverkas av den numeriska fördelningen mellan färgerna. Men, för att bestämma sannolikheten för 2 röda, förväxlar han denna med färgens relativa frekvens. När han fortsätter och ska bestämma sannolikheten för en röd och en blå övergår Bruno till att betrakta vissa kulor och inte bara deras färg. På så sätt upplever han sannolikhet för en vis kula att bli dragen som 1/3. När han ska vidare till sannolikhet för två kulor, addera han de enskilda chanserna och får 2/3, oavsett kulor eller färg. Slutligen närmar han sig kartläggning av utfallsrummet genom att betrakta fallet då första kulan blir röd (eftersom det upplevs ”ganska säkert”). Bruno kommer fram till att sannolikheter för röd-röd eller för röd-blå är lika (givet att den första kulan var röd, vilket han inte uttrycker så tydligt). Han har dessutom en känsla för att sannolikheten för två röda skulle bli större om det fanns 3 röda och en blå. Det är egentligen den fördelningen som krävs för att sannolikheter för röd-röd eller för röd-blå ska vara lika. Bruno visar därmed på resonemang som ligger på nivå 3. Han hanterar den numeriska information som finns (3 kulor, 2 färger, 2 dragningar) och relaterar den till utfallsrum och sannolikhet. Han följer delvis upp ändringar i utfallsrummet men lyckas inte se alla möjligheter. Han vilseleds till att tro att första kulan blir röd.

5.3.5 Exempel 10: uppgift 2- grupp C

Grupp C börjar ungefär där grupp B slutar: de ser direkt att en kula alltid kommer att vara röd och att det sedan är lika sannolikt att den andra ska vara en röd eller en blå. Jag ber dem att ge ett numeriskt värde till sannolikheterna.

Leo: Ja, du tar en tredje del gånger…
David: Jag måste tänka… Du får alltid en (pekar på en röd och ringar in den). Det är 33 % av alla kulor. Du får alltid den här röda (pekar på den omarkerade röda kulan) eller den här (pekar på den markerade röda kulan). Det får du alltid…
Leo: Hur stor är chansen att få just den och sen den. Det borde vara…



Figur 6: Uppgift 2, grupp C

David: 50, det är 50 % chans att du får den eller den (pekar successivt på de två olika röda kulorna). Det finns bara två alternativ.
Leo: Att få just den och den (pekar på den markerade röda kulan och den blåa) och inte den (pekar på den omarkerade röda kulan och den blåa kulan).
David: Det beror på vilken kula eller vilken färg man ska gå på…
Leo: Om man struntar i det…
David: Då är det 33 %. Sex olika… Tre olika kombinationer. Antingen dom två eller dom två eller dom två (ritar pilar som går mellan två olika kulor och numrerar pilarna 1-3).
Leo: Då är det en tredje på varje.
David: Ja. (skriver 100/3=33%)
Jag: Förklara ert svar.
David: Du kan få tre olika kombinationer med kulorna om du tar upp två stycken. Så eftersom det är 100 %, då du kan få tre kombinationer, så är det 33 % chans att du får en viss kombination… sett till vilken kula.
Leo: Om man ser det så, borde det vara större chans att få en röd och en blå än två röda i såna fall. Eftersom här (pekar på kulorna) finns det två kombinationer och här finns bara en kombination. Det borde vara större chans att du får en röd och en blå än två röda.
David: Ja…
Leo: Eftersom att få en blå är 66 % och att få två röda är bara 33 %. Så det borde…
David: För att du får alltid en röd i alla fall det är vi överens om…(tänker en stund och pekar sedan på de två pilarna som går från den blåa kulan) Ja, det stämmer, det blir nog 66 %.
Jag: Så ni ändrar era första svar att det var lika stor chans för båda situationerna.
David: Ja, det beror på hur man ser det. Ser man till vilken kula det är, om man kallar de för kula 1, 2, 3 (skriver 1, 2, 3 på kulorna) då är det 33 % chans att du får det paret, det paret, det paret. Men om du ser på färgen, så blir det däremot annorlunda…
Jag: Om man ser på färg…
David: Då är det 66 % chans att få en röd och en blå

PS: Vilka är värden för sannolikheter ”2 röda” och ”1 röd+1 blå”?
SV: Räkna sannolikheter att få vissa par.
SI: Betraktar att det finns tre olika möjliga par.
S: Liksannolikhet för paren ger 2/3 för röd-blå och 1/3 för röd-röd.

Efter att eleverna hade kommit fram till liksannolikhet för båda händelser, frågar jag om ett numeriskt värde för sannolikheterna. Intressant nog svarar de inte direkt 50 % utan börjar räkna om ”från början”. Detta tyder på att eleverna inte kopplar ihop liksannolikhet för två händelser med värdet ½ trots att det i princip har kunskap om det. Elevernas lösning av uppgiften utvecklas till en högre nivå när Leo börjar skilja på olika par: ”att få just den och den och inte den”. Först är David kvar i tänkandet ”en kula i taget” (sannolikhet för en viss röd av två) men blir ändå uppmärksammad på att den ”säkra röda kulan” som han tänker på sen början av uppgiften kan vara två olika. Efter det går eleverna tydligt över till att betrakta tre olika möjliga par av dragna kulor med liksannolikhet för varje par. De kan spontant ge värdet 33 % till varje kombination. Leo uppmärksammar då att två kombinationer ger händelsen röd-blå mot en för röd-röd och drar slutsatsen att sannolikheterna är 66 % mot 33 %. David behöver lite tid att ta till sig resonemanget men lyckas slutligen förklara det med att alla tre kombinationer är lika sannolika men att röd-blå är mer sannolikhet än röd-röd. Eleverna visar därmed en god medveten om utfallsrummet och kan spontant tilldela sannolikheter (nivå 4).

5.4 Sammanfattning av resultat

Samtliga elever visar genom uppgifterna kunskap om att sannolikhet uttrycks som ett tal mellan 0 och 1, alternativt som motsvarande %, att sannolikhet 1 betyder att händelsen är säker och därmed att en sannolikhet inte borde vara högre än 1 eller 100 %. Trots dessa kunskaper har de svårt att skapa en överblick över utfallsrummet, ställa händelserna mot varandra och betrakta om summan av sannolikhet för en händelse med sannolikhet för komplementhändelsen är 1. Detta märks framförallt i uppgift 2 då alla grupper någon gång kommer fram till sannolikheter för ”röd-röd” och ”röd-blå” vars summa överskrider 1.

Elevernas kunskaper om sannolikhetsläran gör att de sällan argumenterar på nivå 1, med resonemang baserade endast på sifferlösa subjektiva bedömningar (som i exempel 4 och 6). Det händer framförallt när de försöker uppskatta intuitivt om deras beräknade svar är rimliga, möjligen som ett sätt att rättfärdiga det de har kommit fram till.

Under uppgift 1 visade samtliga elever en klar medvetenhet om att det femte kastet inte påverkas av de fyra första (nivå 4). Förutom grupp A kunde de hålla sig till relevant utfallsrum och lätt räkna att sannolikhet var ½ för både krona och klave. Grupp A hade egentligen också spontant samma förståelse men sökte efter svårare lösningar med resonemang på nivå 2.

Flerstegsförsök med oberoende steg (uppgift 3) visade sig vara svåra att hantera för två av grupperna. Dessa elever på nivå 2 visade en förståelse för sannolikheterna under varje steg (1/2) men visste inte hur de skulle gå från ett steg till flera steg. De två andra grupperna tycktes vara medvetna om produktregeln och en elev kunde även koppla denna till antalet möjliga kombinationer, 2*2*2=8 (nivå 4). Samtliga elever höll sig till olika beräkningar utom Maria som också uttryckte en känsla av att en ordning verkade vara mer sannolik (nivå 1).

Det var uppgift 2 som gav eleverna mest svårighet. I princip började alla med att uppmärksamma färgernas relativa frekvens i påsen, 2/3 och 1/3. Eleverna med resonemang på nivå 2 (framförallt grupp A) kombinerar dessa bråk på olika sätt för att få sina svar. På nivå 3 utvecklas först tänkandet till att, mer eller mindre medvetet, tillskriva varje specifik kula en sannolikhet av 1/3 av att bli dragen (grupp B, C och D). Men eleverna missar att detta gäller endast första dragningen och räknar sannolikheterna för två kulor genom att addera sannolikhet för varje kula, vilket ger svaret 2/3 för båda händelser (1 röd 1/3 + 1 röd 1/3 eller 1 röd 1/3 + 1 blå 1/3). Två ytterligare steg tas på nivå 3 när eleverna förstår att 2/3 och 1/3 är sannolikheter för röd och blå under första dragningen (grupp D) eller att en av de två dragna kulorna alltid kommer att vara röd (grupp B och C). Dessa två insikter möjliggör sedan att börja tänka kring hur utfallsrummet ser ut, till exempel genom att föreställa sig hur påsen kan se ut under andra dragningen (grupp B och D). Eleverna på nivå 3 lyckas dock inte att kartlägga hela utfallsrummet utan vilseleds av den röda färgens starkare ställning till att tänka att den första dragna kulan är röd. Utifrån det drar eleverna logiska slutsatser om att sannolikheterna röd-röd eller röd-blå är lika.

Det är på nivå 4 (grupp C) som eleverna får en helhetsbild av utfallsrummet genom att först märka att man kan dra två kulor av tre på tre olika sätt och sedan genom att kombinera elementarhändelse och deras sannolikhet till de sökta händelserna. ”Att få just den och den”: språnget tas när Leo uppmärksammar att de är två olika utfall om man får den blåa med en viss röd eller med den andra röda.

6. DISKUSSION

I detta avslutande kapitel diskuteras först studiens metodologiska överväganden. Sedan betraktas undersökningens resultat i förhållande till dess syfte och till de teoretiska perspektiven som presenterades tidigare. Slutligen förs en reflektion kring möjliga praktiska konsekvenser för undervisning i området sannolikhet samtidigt som förslag till fortsatt forskning ges.

6.1 Metoddiskussion

Den utsträckning i vilken den valda metoden undersöker vad den är avsedd att utforska ger ett mått av arbetets *validitet* (Kvale, 1997:215). Metodvalet att basera studien på kvalitativa observationer motiverades därför med avsikten att förstå vilka matematiska resonemang och egenskaper elever använder när de löser uppgifter i sannolikhet. Den hermeneutiska ansatsen innebär ett mått av subjektivitet i alla tolkningar som görs och det kan därmed inte garanteras att resultaten inte kunde ha analyserats på ett annat sätt. För att minimera denna risk har det varit värdefullt att utgå från precisa transkriberingar och strukturera dessa utifrån Lithners ramverk (2008:257) som lyfter fram hur resonemangen utvecklas.

Undersökningens *reliabilitet* hänför sig till forskningsresultatets tillförlitlighet (Kvale, 1997:213). Konsistensen i studiens resultat beaktades under alla stadier av undersökningen. För det första, gjordes ett medvetet urval med syfte att få en variation bland valda elever. Antalet tillfrågade personer/par bedöms också ha bidragit till studiens mångsidiga resultat. Vidare försäkrades undersökningens reliabilitet under genomförandet av observationerna genom att observatören höll sig i bakgrunden och ingrep med frågor så lite som möjligt. Då det hände var det för att be om en förklaring av förslagna resultat. Kvalitén på observationerna kan bedömas som god med tanke på omfattningen av spontana och relevanta svar som erhölls från eleverna (Ib., 1997:134).

Studiens *generaliserbarhet* avser i vilken omfattning dess resultat kan generaliseras, det vill säga gälla för mer än studiens material (Kvale, 1997:209). I det avseendet kan undersökningens urval betraktas som ett underlag som väl speglar dagens elever i svensk skola. Antalet undersökningspersoner gör det däremot inte möjligt att dra allmänna slutsatser huruvida huvudparten av eleverna i Sverige skulle kunna tänkas ha kunskaper i sannolikhet som är närmare en eller en annan nivå i använd klassificering. Här kan det argumenteras att det väsentliga med en kvalitativ studie inte är sin universella generaliserbarhet utan möjligheten som skapas att lyfta fram ”kunskapens kontextualitet och heterogenitet” (Ib., 1997:261). I det perspektivet är syftet med studien att bidra till rikare bild av elevernas resonemang i sannolikhetslära snarare än att ge en allmängiltig redovisning av deras kunskaper.

Att svara spontant och på kort tid till utmanande uppgifter gör det antagligen inte möjligt för eleverna att använda alla sina förmågor i området. I det avseendet skulle det troligen ha höjt studiens kvalité att kombinera undersökningen med observationer i klassrummet.

6.2 Resultatdiskussion

6.2.1 Elevers användning av sannolikhetsteori

Undersökningens resultat tyder på att elever i årskurs 9 har en grundläggande förståelse av sannolikhetsbegreppet. De uttrycker att den sökta sannolikhet ska vara ett tal mellan 0 och 1 (det *numeriska intervallet*), ett tal som kan skrivas i procent- eller bråkform. Ett svar som överskrider 100 % fastställs som ett omöjligt resultat. Elevernas tänkande präglas av den *klassiska* *sannolikhetsdefinition* som de har mött i skolundervisning (Nilsson, 2003:12). Detta uttrycker sig, framförallt på nivå 2 och 3, när eleverna försöker att applicera formeln *gynnsamma/möjliga*. Begreppen ”*utfall*”, ”*oberoende händelser*” och ”*likformig sannolikhetsfördelning*” som eleverna mötte i årskurs 8 används inte på ett uttalat sätt. Inte heller utnyttjas på ett tydligt sätt *träddiagrammet* och *produktregeln* som också introducerades förra året. Dock, efter genomförd undersökning, skulle det kunna påstås att dessa begrepp och verktyg finns hos eleverna som använder dem på ett omedvetet sätt.

Studiens resultat bekräftar vad Nilsson (2003:57) fann, att ”eleverna inte av sig själva gör någon mer ingående systematisering av möjliga och gynnsamma fall för en händelse”. Att teckna alla möjliga utfall tycks inte vara en vanligt förekommande strategi. Eleverna söker inte efter en helhetsbild av slumpsituationen och dess *utfallsrum*, utan fokuserar på en händelse i taget. Denna strategi verkar vara fungerande i mycket enkla slumpförsök (uppgift 1) eller i flerstegsförsök som har oberoende steg och en hög grad av symmetri (uppgift 3). Men vid flerstegsförsök med beroende steg har eleverna stora svårigheter att applicera formeln g/m då de varken identifierar antalet gynnsamma eller möjliga utfall.

Att eleverna sällan betraktar hela utfallsrummet märks också på att de inte uppmärksammar summan av de beräknade sannolikheterna. Undersökningens resultat tyder på att eleverna än saknar förståelsen för att $P(\Omega)=1$ (*axiom 2*). En sådan uppfattning skulle hjälpa dem att lösa uppgifterna eller att bekräfta sina svar. På samma sätt skulle användning av *komplementhändelse* både fördjupa och förstärka deras förståelse av sannolikhet (komplementsannolikhet introduceras i slutet av årskurs 9 för dessa elever, likaså lösning av sannolikhet för beroende händelser med hjälp av träddiagram).

Studiens resultat visar också på en intuitiv känsla för *betingade sannolikheter*. Detta märks i arbetet med uppgift 2 (kulorna) på nivå 3 och 4. Flera elever resonerar om sannolikhet för den andra kulan givet att den första var röd och kommer fram till att båda färgerna får sannolikhet 1/2. Detta visar på förmågan att använda sig av ett reducerat utfallsrum (Borovcnik m.fl., 1991:48).

6.2.2 Elevers förståelse av slumpen

Eleverna visar överlag, i jämförelse med tidigare forskning, en god förståelse av slumpens natur. Under uppgift 1 visade samtliga elever en klar medvetenhet om att det femte kastet inte påverkas av de fyra första och de kunde hålla sig till relevant utfallsrum. Det går inte att urskilja tecken på missuppfattningar som tillgänglighet (Tversky & Kahneman, 1974:1127), resultatfokus (Konold, 1989:59) eller deterministisk tänkande (Pfannkuch & Brown, 1996:52). En möjlig tolkning av detta resultat är att uppgifternas slumpmässiga aspekter var relativt enkla i förhållande till elevernas ålder. Att elevernas vardagliga förståelse av sannolikhetsbegreppen sällan stämmer med de matematiska definitionerna (Callaert, 2004:4, Konold, 1991:144,) märks inte heller särskilt i undersökningen. Detta kan bero på att studien inte fokuserar på begreppsförståelse utan på elevernas lösning av uppgifter.

Missuppfattningen ”representativitet” (Tversky & Kahneman, 1974:1125) kommer fram endast hos en av 8 elever. Det är i uppgiften 3 (se exempel 4) när Maria får en känsla av att den mer blandade ordningen krona-klave-krona bättre motsvarar slumpens variation (Nilsson, 2003:7).

Liksannolikvinkling (Lecoutre, 1992:557), tendensen att tillskriva alla utfall samma sannolikhet, visar sig indirekt i uppgiften 2 (kulorna) där tre av fyra grupper kommer fram till samma sannolikhet för ”röd-blå” och för ”röd-röd”, 2/3. Eleverna tycks uppleva att det finns en ”naturlig balans” i detta resultat med vilket de känner sig direkt nöjda.

Tidigare forskning har visat att vanliga missuppfattningar kring slumpens natur i hög grad är kopplade till kontexten (Callaert, 2004:2) eller uppgifternas formulering (Borovcnik & Bentz, 1991:80, Nilsson, 2003:22). Att eleverna i studien visar på få tecken av missförståelse kan därmed hänga samman med att uppgifterna tillhör välbekanta problemsituationer som uttrycks med god tydlighet.

6.2.3 Elevers bearbetning av sannolikhet

Undersökningens resultat bekräftar forskningen som hävdar att eleverna, när de ska behandla en slumpsituation, ofta koncentrerar sig till en enda händelse i stället för att betrakta hela utfallsrummet (Batanero m.fl.,2005:27). För två av tre av studiens uppgifter tillfrågas eleverna att uttrycka sig om sannolikheter för två olika händelser som tillsammans bildar hela utfallsrummet. Ändå försöker de inte att relatera dessa sannolikheter till varandra. Där finns en intressant diskrepans mellan forskningsrapporter (i.e. Bryant & Nunes, 2012:29) som lägger stor vikt vid kartläggning av utfallsrummet och elevpraxis som, antagligen till följd av rådande undervisning, håller sig till enskilda händelser.

Studiens resultat tyder på att behovet av att kartlägga hela utfallsrum (Langrall & Mooney, 2005:106) framförallt uppstår när de sökta sannolikheterna består av olika elementarhändelser som ska grupperas. Detta visar sig i uppgiften 2 när händelsen ”1 röd och 1 blå” kan erhållas på två olika sätt. I uppgiften 1 är utfallsrummet så enkelt, krona eller klave, att det uppfattas spontant av eleverna. I uppgiften 3 lyckas flera grupper med att svara rätt utan att ta hänsyn till hela utfallsrummet, vilket beror på att de använder produktregeln. Endast Bruno visar att han har en klar bild av utfallsrummet då han tolkar resultatet 1/2*1/2*1/2=1/8 som att det finns 8 kombinationer. Om man hade gjort om uppgiften 3 till att fråga om sannolikheten för att få två kronor och en klave vid tre kast av mynt, oavsett ordningen, hade eleverna varit tvungna att betrakta hela utfallsrum och de 8 kombinationerna. Utifrån resultaten på uppgiften 2 kan man ana att detta hade varit en svår utmaning. Studien bekräftar att liknande problem kräver medvetenhet om betydelsen av utfallens ordning och hantering av kombinatoriska operationer (Jones m.fl., 2007:912, Nilsson, 2003:12).

Undersökningen illustrerar också hur eleverna arbetar med alternativa beskrivningar av utfallsrummet som är mindre relevanta i förhållande till den sökta sannolikheten (Chernoff & Zazkis, 2011:15). Begreppet utfallsset (Ib., 2011:18) exemplifieras i uppgiften 2 när utfallsrummet indirekt beskrivs som bestående av endast två elementarhändelser, ”röd, röd” eller ”röd, blå”. De flesta elever tycks, antagligen utifrån den beskrivningen, vara bekväma med att deras svar, 66 %, är samma för varje händelse. I undersökningen belyses den svårigheten som finns att skilja mellan elementarhändelser, som R1B och R2B, och den övre kategorin i vilken dessa kan ingå, ”1 röd - 1 blå”(Abrahamson, 2008:7).

Studiens resultat tyder vidare på att elever i årskurs 9 möter svårigheter för att beräkna sannolikheter i flerstegsförsök. De kommer ofta fram till sannolikheter för ett steg men vet sedan inte hur de ska fortsätta. På nivå 2 försöker eleverna helt enkelt att komma till ett svar genom att kombinera olika bråk (i.e. 1/2, 1/3, 2/3…). När det gäller oberoende steg (uppgift 3), syns en osäkerhet i hur man övergår från sannolikheterna under varje steg till sannolikheterna för ”hela vägen” (addition, multiplikation?). Även när produktregeln används tycks det sällan såsom att eleverna förstår dess innebörd, utan resultatet upplevs som rimligare än med addition som ger ett svar högre än 100 %. Flerstegsförsöket med beroende steg (uppgift 2) gav inte möjligheten att identifiera en sannolikhet för varje steg och vållade därmed störst svårighet. Flera elever försökte att gå runt denna osäkerhet genom att anta att första kulan skulle vara röd eller genom att fokusera på att en kula alltid skulle vara röd. Detta är intressanta strategier men sannolikhetsberäkningarna stämde inte när en del av utfallsrummet ignorerades. Undersökningen tyder på att det är endast de elever (grupp C) som får en helhetsbild av utfallsrummet (genom att märka att man kan dra två kulor av tre på tre olika sätt) som lyckas med att tillskriva rätt sannolikhet i uppgiften 2.

Elevernas resonemang lyfter också fram oväntade föreställningar. Detta gäller när de tillskriver en sannolikhet till varje kula (i uppgiften 2) såsom det var en fysisk egenskap som skulle ”följa med” kulan. Sannolikheten sätts till vara 1/3 (en kula av tre) och motsvarar då sannolikheten att just den kulan blir tagen i första dragningen, vilket eleverna i regel eller till en början inte är medvetna om. När de sedan ska ange sannolikhet för två kulor, adderas sannolikheten för varje kula, 1/3+1/3=2/3. Detta förklarar varför så många får 66 % som enda svar på uppgiften. Ett sådant resonemang kan möjligen förstås med tanke på att dessa elever har arbetat med sannolikheter framförallt i form av relativ frekvens i enkla slumpförsök, en kontext som skapar starka kopplingar till formeln gynnsamma/möjliga. Just viljan att hitta tillbaka till formeln g/m märks genom hela undersökningen (förutom när det förs resonemang på nivå 4). Ett exempel på det är när Louise uppskattar sannolikheter genom att betrakta ”gynnsamma” som två kulor och ”möjliga” som tre kulor, vilket också ger svaret 2/3 (exempel 7).

6.3 Praktisk tillämpning och förslag till fortsatt forskning

Undersökningen lyfter fram några kritiska aspekter för elevers förståelse av sannolikheter som skulle kunna vara värdefulla att uppmärksamma för lärare i matematik. Det tycks vara så att sannolikhetsläran ofta introduceras i skolan med en stark prägling av spelbaserade likformiga sannolikhetsfördelningar och med betoning av formeln g/m. De flesta av elevuppgifterna fokuserar på enskilda sannolikheter som kan räknas ut utan att relateras till andra sannolikheter. Inom den klassiska sannolikhetsdefinitionen lär sig eleverna framförallt att använda formeln g/m i enkla slumpförsök och att utnyttja träddiagram med summa- och produktregeln för flerstegsförsök. De har en god känsla för att ett proportionstänkande behövs men vet inte riktigt var det ska appliceras. Trots att mycket av forskningen poängterar vikten av utfallsrummet i sannolikhetsproblem är antagligen detta inte ett begrepp som lyfts fram i skolundervisningen.

För att låta eleverna arbeta också med problemlösning inom sannolikhetsområde, alltså med uppgifter som inte kan mötas med standardalgoritmer, vore det förmodligen intressant att introducera och betona vikten av begreppet utfallsrum. Det handlar först om att förstå att uttalanden i sannolikhet kräver att man tar hänsyn till alla möjliga resultat av ett slumpförsök. Vidare finns det ett behov av att värdera dessa olika utfall mot varandra. För att undvika problemen som forskningen lyfter fram om att eleverna tror sig ha listat alla utfall fast ändå inte, skulle man kunna ta för vana att fråga sig om alla utfall är lika sannolika. Eller med andra ord om de kan fås på flera olika sätt. Eleverna behöver en starkare förståelse för att, inom den klassiska sannolikhetsdefinitionen, formeln g/m enbart kan appliceras då alla betraktade möjliga utfall är liksannolika. Utfallsrummet skulle kunna presenteras som listan av alla möjliga utfall som kan hända på bara ett sätt. Och sannolikheten beräknas då som kvoten mellan antalet utfall som motsvarar den sökta händelsen och antalet element i listan. Att betona sannolikhet som direkt kopplad till en relation i utfallsrummet skulle möjligen hjälpa till att undvika att eleverna associerar sannolikhet enbart till fysiska objekt (såsom 1/3 till varje kula i uppgift 2). Att därmed lyfta fram vikten av att få en helhetsbild av slumpförsöket skulle också fördjupa elevernas förståelse av sannolikhetsläran. Det finns fortfarande en ”risk” att eleverna, i sökning efter utfall som ”bara kan hända på ett sätt”, skulle komma fram till en onödig komplicerad beskrivning av utfallsrummet, exempelvis genom att betrakta kulornas ordning i uppgiften 2 (vilket ger 6 utfall i stället för 3). Men detta känns inte så problematiskt då resonemanget håller på samma sätt och sannolikhetsberäkning blir korrekt (2/3=4/6).

För att få en djupare inblick i hur elever löser sannolikhetsproblem i klassisk definition skulle det vara relevant att komplettera den här studien med en liknande undersökning som fokuserar på flerstegsförsök med beroende steg. En variation av uppgifter i det området skulle kunna synliggöra hur elever, med grundläggande kunskaper i sannolikhet, lyckas med att ta sig an komplexa händelser där elementarhändelser ska grupperas. Ett annat forskningsområde kunde vara att försöka testa om introduktion av utfallsrumsbegreppet i skolundervisning skulle kunna förbättra elevernas arbete med sannolikhet. Ett första steg i den riktningen vore möjligen att undersöka hur verksamma lärare, utifrån sina erfarenheter, ställer sig inför ett sådant förslag.

REFERENSER

Abrahamson, D. (2008). Bridging theory: Activities designed to support the grounding of outcome-based combinatorial analysis in event-based intuitive judgment – A case study. In M. Borovcnik & D. Pratt (Eds.), *Proc Probability Topic Study Group, International Congress on Mathematical Education (ICME 11).* Monterrey: ICME.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer Science +Business Media.

Borovcnik, M. & Bentz, H.-J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Netherlands, Kluwer.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J., & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Netherlands, Kluwer.

Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understandling of probability [Elektronisk resurs] : a literature review (full report).* London: Nuffield Foundation.

Callaert, H. (2004). In search of the specificity and the identifiability of stochastic thinking and reasoning. In Mariotti M.A. (ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Pisa, Pisa University Press, 2004.

Chernoff, E. J. (2009). The subjective-sample-space. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the Thirty-First Annual Meeting of the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 628-635). Atlanta, GA: Georgia State University.

Chernoff, E. J., Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: From sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), 15–33.

Fejes, A., Thornberg, R. (2009). *Handbok i kvalitativ analys.* Stockholm: Liber.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909-955), Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc..

Kahneman, D., Tversky, A. (1974). Judgement under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, New Series, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: NCM/Göteborgs universitet.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin: Julius Springer.

Konold, C. (1989). Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Holland, Kluwer.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A.D., Lohmeier, J., and Lipson, A. (1993), "Inconsistencies in Students' Reasoning About Probability," *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 392-414.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Langrall, C. W., Mooney, E. S. (2005). Characteristics of Elementary School Students' Probabilistic Reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). Springer Science +Business Media.

Lecoutre, M-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-569.

Lgr 11. Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011. Stockholm: Skolverket.

Lithner, J. (2008) A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67:255-276.

Nilsson, P. (2003). *Elevers förståelse av en slumpsituation: en fallstudie av hur elever i årskurs 7 tolkar och hanterar aspekter av sannolikhet aktualiserade i ett tärningsspel*. Lic.-avh. Växjö: Växjö Universitet, 2003.

Nilsson, P. (2006). *Exploring probabilistic reasoning: a study of how students contextualise compound chance encounters in explorative settings*. Diss. Växjö: Växjö universitet, 2006.

Pfannkuch, M., Brown, C. (1996). Building on and Challenging Students Intuitions about Probability: Can We Improve Undergraduate Learning? *Journal of Statistics Education*. v.4, n.1 (1996)

Pratt, D. (2000). Making Sense of the Total of Two Dice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31, 602-625.

Skolverket. (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 39–59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York: Springer.

Vetenskapsrådet. (1990). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.*

Wistedt, I., Brattström, G. & Jacobsson, C. (1993). *Att använda barns informella kunskaper i matematikundervisningen*. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

Bilaga 1: Informationsbrev

Informationsbrev till deltagare i studien

Hej!

Mitt namn är Lionel Charrière. Jag läser vid Högskolan Dalarna för att få behörighet att undervisa i matematik. Inom ramen för mina studier ska jag nu skriva ett examensarbete om hur elever resonerar när de ska beräkna sannolikheter. För att jag ska kunna genomföra min undersökning behöver jag ett antal videoobservationer när elever löser olika sannolikhetsuppgifter. Jag planerar att genomföra 4 stycken observationer med för varje tillfälle två olika elever i årskurs 9. Varje elev deltar vid ett tillfälle, ca 30 minuter.

Ni tillfrågas härmed om att låta ert barn delta i studien.
/Alternativ: Du tillfrågas härmed om att delta i studien./

Deltagandet i undersökningen är frivilligt och kan avbrytas när som helst utan motivering.

Det är endast jag och min handledare, Lovisa Sumpter från Högskolan Dalarna, som kommer ha tillgång till videomaterialet. Jag utgår vid genomförandet av studien från Vetenskapsrådets forskningsetiska principer som ges av Codex. Videoinspelningen kommer genomföras på så sätt att inga ansikten kommer att visas. Eleverna är anonyma och kommer inte att kunna identifieras. Materialet kommer efter genomförd uppsats att arkiveras. Vid intresse kan man få ta del av de slutgiltiga resultaten.

/Alternativ: Eftersom du har fyllt 15 år får du bestämma själv om ditt deltagande i studien. Det är ändå bra att informera vårdnadshavare om du deltar i studien./

Har du frågor är du välkommen att höra av dig.

Med vänliga hälsningar

Lionel Charrière
Tel: XXX
lionelcharriere@hotmail.com

Handledare från Högskolan Dalarna:
Lovisa Sumpter
lsm@du.se

Jag har tagit del av ovanstående information och godkänner att mitt barn deltar/vill delta/ i studien.
Barnets/ namn:

Målsmans underskrift:

Namnförtydligande: