



HÖGSKOLAN
DALARNA

Examensarbete 1 för Grundlärarexamen inriktning F-3

Grundnivå 2

Praktiskt arbete med matematik i årskurs 1-3

**En litteraturstudie om hur lärare kan genomföra undervisning i
geometri**

Författare: Kajsa Ekberg
Handledare: Maria Sundberg
Examinator: Maria Bjerneby Häll
Termin: VT 14
Program: Grundlärarprogrammet
Ämne/huvudområde: Pedagogiskt arbete
Poäng: 15 hp

Högskolan Dalarna
791 88 Falun
Sweden
Tel 023-77 80 00

Sammanfattning

Syftet med studien är att undersöka om praktisk matematik ökar måluppfyllelsen för elever i årskurs 1-3 samt undersöka vad praktiskt arbete kan innebära. Syftet är även att undersöka hur läraren kan genomföra undervisningen i geometri på ett praktiskt sätt.

Som metod används en systematisk litteraturstudie. Sökning efter vetenskapliga artiklar och rapporter har gjorts i olika databaser. Databaserna som har använts är LIBRIS, Summon, Google Scholar och ERIC Proquest. Efter att ha sökt i databaserna gjordes ett urval och slutligen användes 6 artiklar till studien: två fallstudier, två beskrivande artiklar, en omfattande studie och en forskningsöversikt.

Av resultatet framgår att praktiska aktiviteter ses som naturligt i de tidiga skolåren och inom det matematiska området geometri. Matematiken kommer tidigt in i skolan, för att eleverna ska ha kvar sin nyfikenhet bör de komma i kontakt med laborativt material. I arbetet med laborativ och konkret matematik har läraren en viktig roll. Läraren behöver veta när, varför och hur materialet ska användas för att det ska ge en positiv effekt. I undervisningen är också diskussion en viktig del för att eleverna ska nå en så stor förståelse som möjligt. Praktisk matematik kan genomföras med hjälp av exempelvis play-doh, virtuella material, centimeterkuber och genom att bygga olika geometriska objekt. Detta hjälper eleverna att lättare koppla ihop det konkreta med det abstrakta och stimulerar deras livslånga lärande. Praktisk matematik är bra för att eleverna ska nå en större förståelse och skapar starka matematiska band.

Nyckelord: Praktisk matematik, konkret matematik, laborativ matematik och geometri

Innehållsförteckning

Inledning.....	3
Bakgrund	5
Lusten att lära.....	5
Varierad undervisning	5
Att arbeta praktiskt	6
Lgr 11 – Kursplanen i matematik.....	7
Geometri	7
Syfte och frågeställningar.....	9
Metod.....	10
Design.....	10
Databassökning och sökkriterier	10
Urvalskriterier.....	11
Värdering och val av sökträffar	11
Kvalitetsgranskning och presentation av de använda texterna	13
Analys av data.....	14
Beskrivning av de använda texterna	14
Etiska aspekter	15
Resultat.....	16
Lärarens genomförande av praktisk matematik med fokus på geometri.....	16
Lärarens roll.....	16
Konkreta exempel på hur praktiskt arbete kan genomföras	17
Betydelsen av praktiskt arbete för elevers matematiklärande.....	18
Diskussion.....	20
Metoddiskussion	20
Resultatdiskussion.....	21
Slutsats	22
Fortsatt forskning	22
Referenslista.....	23

Inledning

Den matematiska verksamheten är enligt läroplanen en kreativ, problemlösande och reflekterande aktivitet (Lgr 11: 62). Undervisningen i matematik ska bidra till att eleverna utvecklar ett intresse för ämnet och att de känner tilltro till sin egen förmåga att kunna använda matematiken (Lgr 11: 62). TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) visar att elever i årskurs 4 visar tilltro till sin egen förmåga genom att de har ett bra självförtroende när de ägnar sig åt matematik (Skolverket 2012: 83). Svenska elever har även en positiv inställning till matematiken efter att ha genomgått årskurs 1-3 (Skolverket 2012: 86). Trots denna positiva inställning och det goda självförtroendet har eleverna i årskurs 4 visat sämre resultat i taluppfattning, aritmetik samt geometriska figurer och mått (ibid: 9). En anledning till att eleverna visat sämre resultat i geometri kan vara att området har fått mindre plats i undervisningen (ibid: 97).

För att öka elevernas förståelse och intresse för matematik kan det vara viktigt att koppla undervisningen till en vardagsnära kontext (Skolverket, 2012: 102). Matematiklärarna i Sverige kopplar dock inte undervisningen till vardagen i lika stor utsträckning som i många andra länder. Svenska lärare är däremot bättre på att ta in relevant material in i klassrummet. Där ligger svenska lärare på samma nivå som övriga länder. TIMSS rapporten visar att 10 % av lärarna tar med sig relevant material in i klassrummet (ibid: 102).

Under mina VFU-perioder har det visat sig att flertalet elever inte har så positiv inställning till matematiken som TIMSS visar. Eleverna räknar ofta sida efter sida i sina läroböcker, de flesta elever uppfattar det som jobbigt och många av dem tappar lätt koncentrationen. Några få elever tycker däremot att det är roligt och räknar sida efter sida utan problem. VFU-perioderna har visat att läromedlet används i stor utsträckning. Även TIMSS visar att läromedlet används som basmaterial i högre grad i Sverige jämfört med andra länder (Skolverket 2012: 11).

Observationer från VFU-perioderna har visat att eleverna i liten utsträckning får arbeta praktiskt. Det kan vara uppgifter i boken som går ut på att mäta något med en linjal. Läromedlet skulle kunna kompletteras med mer konkret material och eleverna skulle kunna få använda sin kropp och diskutera mer med varandra. Matematiken erbjuder fler arbetssätt än att enbart följa läromedlet, som att arbeta med mer konkret material.

När det gäller geometri är det naturligt att upptäcka och samtala kring olika objekt och geometriska figurer (Bergius, Emanuelsson, Emanuelsson & Ryding, 2011: 151). En del av geometrin är undervisningen om geometriska former. För att utveckla ett språk för olika objekt och relationer mellan och inom objekt är det viktigt att få se, känna och beskriva olika föremål. Då undervisningen innehåller detta blir det lättare att kunna diskutera kring olika föremål (Bergius m.fl., 2011:152). För att kunna samtala om olika föremål och för att eleverna ska få kunskap om olika objekt är det väsentligt att ha aktiviteter som ger varierade och rika upplevelser (Bergius m.fl., 2011:152).

Att arbeta praktiskt innebär för mig att eleverna inte sitter vid sin plats och räknar i en lärobok. För mig handlar det mer om att använda kroppen, diskutera och reflektera. I denna studie kommer praktisk undervisning, att arbeta praktiskt med matematik, att innebära laborativ matematik och konkret matematik. För att begränsa studien fokuseras det praktiska arbetet på geometri där det kan finnas många möjligheter till att arbeta praktiskt.

Att arbeta praktiskt kan leda till mer kommunikation mellan lärare och elever, och mellan eleverna. Läroplanen beskriver att undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang (Lgr11: 62), vilket kan bli lättare med praktiskt arbete. Just inom geometrin finns fler möjligheter att arbeta praktiskt och det skulle

därför vara intressant att utforska det närmare. I det centrala innehållet för årskurs 1-3 (Lgr11: 63) ingår: konstruktion av geometriska objekt; Vanliga lägesord; symmetri; Jämförelser och uppskattningar av matematiska storheter. Detta innehåll kanske kan vara lättare att lära och förstå med hjälp av praktisk undervisning.

I USA använder lärare olika material i klassrummet och förespråkar starkt deras användning (D'Angelo & Ilviev 2012). NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) har en vision om att olika material ska användas i matematikundervisningen i alla årskurser (D'Angelo & Ilviev, 2012: 3). Användandet av olika material i klassrummet har starkt stöd från lärare i de tidiga årskurserna (Swan & Marshall, 2012: 5). Eftersom många lärare förespråkar användningen av olika material i klassrummet skulle det vara intressant att veta vilka fördelar som finns och om det ger någon effekt på elevernas lärande.

Bakgrund

I kapitlet beskrivs *lusten att lära* och *varierad undervisning* som en inledning till att arbeta praktiskt. Vidare beskrivs läroplanens riktlinjer för att arbeta praktiskt och för geometri. Praktiskt arbete i matematik beskrivs och definieras med hjälp av begreppen *laborativ matematik* och *konkret matematik*.

Lusten att lära

Lusten att lära handlar om motivation och om en positiv inre drivkraft som den lärande känner (Skolverket, 2003: 9). Den lärande känner också tilltro till sin förmåga och vill forma och söka kunskap tillsammans med andra eller på egen hand. För att försöka få en bredare definition av vad som menas med lusten att lära, tillfrågades barn och lärare att beskriva när de känt lust att lära. De känner lust att lära då både kropp och själ engagerats i undervisningen (Skolverket, 2003: 8).

Läromedlet ger en begränsad bild av vad matematik är, det kan vara en anledning till att lusten att lära avtar (Skolverket, 2003:39). Skolinspektionens rapport (2009: 9) visar också att undervisningen är starkt styrd av läromedel, vilket leder till att eleverna inte utvecklar alla förmågor som tas upp i läroplanen (Skolinspektionen 2009: 9). När både kropp och själ har engagerats beskriver elever att de kan få en aha-upplevelse när de förstått ett matematiskt sammanhang (Skolverket 2003: 8). Detta kan vara en anledning till varför elever i grundskolan anser att de praktiska och estetiska ämnena får dem att känna lust att lära (Skolverket, 2003: 8). Eleverna menar att det då är varierade arbetsformer och variation i innehållet. De blir både engagerade och intresserade, vilket i sin tur leder till upptäckarglädje, engagemang och aktivitet hos både lärare och elever (Skolverket, 2003: 14). När eleverna känner detta har de också tilltro till sin egen förmåga som är en viktig del för lusten att lära. God självförtroende leder till att eleverna höjer prestationen, vilket i sin tur bidrar till en ökad måluppfyllelse (Skolverket, 2003: 27).

För att tillgodose alla elevers sätt att lära och för att de ska känna lust att lära behöver undervisningen varieras. Det leder in på nästa begrepp *varierad undervisning* (Skolverket, 2003: 8).

Varierad undervisning

Undervisningen är enligt Skolinspektionen (2009: 9) starkt styrd av läromedel, eleverna får små möjligheter till att utveckla sin förmåga att använda logiska resonemang, sätta in matematiska problem i ett sammanhang, samt små möjligheter att utveckla sin kompetens i att lösa matematiska problem (Skolinspektionen, 2009: 9). För att eleverna ska få större möjligheter att utveckla dessa förmågor kan undervisningen vara mer varierad. En god balans mellan olika arbetssätt ger en mer effektiv lärandemiljö (Pettersson, 2003: 60). Det bör också vara en god balans mellan elevernas eget utforskande och kunskapssökande för att lärandemiljön ska bli så effektiv som möjligt (Pettersson, 2003: 60).

När eleverna kommer till skolan är de nyfikna och intresserade av den nya världen de kommit till (Ahlberg, 1995: 11). Oftast förekommer en ensidig undervisning där eleverna får arbeta i läroböcker som gör att eleverna tröttnar och uppfattar matematiken som något som enbart innehåller uppgifter i en bok (ibid: 11). För att inte eleverna ska tröttna, utan istället uppfatta matematiken som rolig och spännande är ett varierat arbetssätt bra (Ahlberg, 1995: 11). Ett varierat arbetssätt stödjer alla elever som befinner sig på olika nivåer (Skolinspektionen, 2009: 9). I en varierad undervisning används olika arbetssätt, som till exempel *att arbeta praktiskt*.

Att arbeta praktiskt

Praktisk kunskap innebär att vi når en förståelse genom att göra det praktiskt i en aktivitet (Lundegård m.fl., 2010: 30). För att kunna förstå en helhet måste det utföras praktiskt. I olika undervisningssituationer i skolan är det väsentligt att levandegöra innehållet, genom att göra det praktiskt. För att inte tappa förmågan till nyfikenhet och förundran bör kreativiteten vara central i undervisningen (Lundegård m.fl., 2010: 31).

I denna studie används begreppet att arbeta praktiskt i matematik och där ingår begreppen *laborativ matematik* och *konkret matematik*.

Laborativ matematik är något som används i skolan och är en verksamhet där eleverna inte enbart deltar mentalt utan också arbetar med konkret material i aktiviteter (Skolverket, 2011: 26). Eleverna ska genom laborationer få upptäcka, återupptäcka och uppleva någon del av matematiken (ibid: 26). Det handlar om att skapa och uppleva matematiken och inte enbart få uppleva den genom en bok. Till skillnad från att arbeta i en bok blir det istället naturligt att diskutera resultat och process (ibid: 26). När elever och lärare diskuterar detta byggs ett språk upp och det blir lättare att diskutera matematiska begrepp vid kommande tillfällen. Laborativ matematik uppmuntrar inte bara till diskussion utan väcker elevernas nyfikenhet och stimulerar dem till att delta mer aktivt (Skolverket, 2011: 26). Lärare menar att laborativ matematik gynnar elevernas lärande genom ett ökat intresse och en positivare syn på matematik (Rystedt & Trygg, 2011: 4).

I engelskspråkiga länder används begreppet ”Manipulatives” om laborativt material. ”Manipulatives” kan definieras som konkret material som går att relatera till matematiska begrepp, som tilltalar flera sinnen och kan röras och flyttas av eleverna (Swan & Marshall, 2010: 1). ”Manipulatives” är objekt som kan hanteras av en individ vid tillfällen då eleven är medveten eller omedveten om sitt matematiska tänkande (Swan & Marshall, 2010: 1).

Ett annat begrepp som är nära kopplat till praktisk matematik är *konkret matematik*. En definition av vad som menas med konkret är: det som kan uppfattas med våra fem sinnen, syn, hörsel, känsel, smak och lukt (Skolverket, 2011: 28). Men för att något ska konkretiseras och för att eleverna ska nå förståelse handlar det inte om att alla sinnen används, utan ett sinne kan vara i bruk för att en elev ska nå förståelse (ibid: 28). Konkret matematik handlar om att synliggöra ett matematiskt innehåll. Då ett innehåll synliggörs eller konkretiseras handlar det om att underlätta förståelsen av det abstrakta, det som eleverna uppfattar som svårt. Det som uppfattas som svårt av eleven ska genom konkretisering knytas till något som är bekant för eleven för att kunna abstraheras (Skolverket, 2011: 28-29). När något i matematik ska konkretiseras har läraren en viktig roll. Lärarens sätt att presentera och använda materialet spelar stor roll. Det handlar om att göra det med rätt mål, metod och medel (Skolverket, 2011: 28). Det är också viktigt att inte bara belysa enstaka fenomen, utan det ska leda till abstraktion och förståelse av den matematik som konkretiseras (Löwing, 2006: 116). Matematiken ska ge generella formler och beskrivningar som är giltiga. Exempelvis uttrycket $6+2=8$ ska gälla för allt, vare sig det är glassar eller något annat (ibid: 116). Det handlar inte bara om att använda sin kropp i samband med konkretisering, det handlar också om att diskutera matematiska uttryck (Löwing, 2006: 117).

Det är alltså viktigt att låta eleverna få utforska matematiken och att läraren konkretiserar matematiken för eleverna. Läraren ska också följa läroplanen för att se vad eleverna ska lära sig och vad undervisningen ska innehålla.

Lgr 11 – Kursplanen i matematik

Undervisningen i matematik ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper i matematik samt hur den kan användas i vardagen. Eleverna ska också få möta matematiska mönster, former och samband i sin undervisning. Argumentera logiskt och kunna föra resonemang inom matematik är också en förmåga som undervisningen ska utveckla hos eleverna (Lgr 11: 62).

Geometriundervisningen ska innehålla:

- Grundläggande geometriska objekt, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt.
- Konstruktion av geometriska objekt. Skala vid enkel förstoring och förminskning.
- Vanliga lägesord för att beskriva föremåls och objekts läge i rummet.
- Symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras.
- Jämförelser och uppskattningar av matematiska storheter. Mätning av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter. (Lgr 11: 63)

I slutet av årskurs 3 ska eleverna kunna beskriva olika begrepps karaktär med hjälp av symboler, konkret material eller bilder (Lgr 11: 67). Eleverna ska också kunna använda geometriska begrepp och lägesord för att kunna beskriva olika objekts egenskaper. De ska också kunna ge exempel på enkla samband i elevnära situationer (ibid: 67). Utifrån instruktioner ska eleverna kunna avbilda och konstruera geometriska objekt. De ska också kunna göra enkla mätningar, uppskattningar och jämförelser av längder, volymer och massor. De ska då kunna använda vanliga måttenheter för att uttrycka ett resultat. Eleverna ska kunna beskriva och samtala kring olika tillvägagångssätt med hjälp av konkret material eller bilder (Lgr 11: 67). Geometri har, som framgår av Lgr 11, en ganska stor plats i kursplanen för matematik och bör därför ha lika stor plats i undervisningen.

Geometri

Geometri betyder ordagrant jordmätning men kan också definieras som den huvudgren inom matematiken som behandlar rummets natur och form samt storlek och andra egenskaper hos olika figurer (Löwing, 2011: 15). Inom geometrin studerar man figurers egenskaper i ett rum eller i rumsliga samband (Wikipedia 2014a; Nationalencyklopedin 2014a). Geometri är ett övergripande område i matematiken (Skolverket 2014: 7). I undervisningen handlar det inledningsvis om att känna igen olika figurer. I den tidiga geometriundervisningen handlar det också om att kunna klassificera geometriska figurer och känna till vissa egenskaper hos dessa (Skolverket 2014: 7).

Människan kommer tidigt i kontakt med geometri, såsom former, symmetrier och mönster (Bergius, Emanuelsson, Emanuelsson & Ryding, 2011: 151). Både former och symmetrier finns också med i det centrala innehållet (Lgr 11: 63). Vi möter geometri hemma, på arbetsplatsen, i naturen, i arkitektur och konst. Det kan vara mätning, lägesbeskrivning och formgivning. I samband med detta blir också avbildningar och konstruktioner väsentliga. Även tal och räkning spelar in vid arbetet med geometri (Bergius m.fl., 2011: 151). Även här kan en parallell till det centrala innehållet dras. Konstruktion, lägesbeskrivning och mätning ska ingå i matematikundervisningen (Lgr 11: 63).

Elevers utveckling i geometri kan beskrivas enligt fem olika nivåer, de så kallade van Hiele-nivåerna (Hedrén, 1992: 28). Forskning har visat att dessa nivåer måste passeras i tur och ordning av eleverna. Läraren bör lägga upp sin undervisning på den nivå där eleverna befinner sig (Hedrén, 1992: 28). Den första nivån är *igenkänning*, då eleven känner igen exempelvis en triangel men vet inget om dess egenskaper (Hedrén, 1992: 28). Nästa nivå är *analys*, då kan eleven analysera vissa egenskaper hos exempelvis en triangel genom att göra olika trianglar med olika

material. Eleven förstår då att alla trianglar har tre hörn och kan se olika ut. Den tredje nivån är *abstraktion*, då vet eleven t.ex. att alla kvadrater är rektanglar och att alla rektanglar inte är kvadrater. Eleven förstår sambanden mellan figurer. Den fjärde nivån är *deduktion* (Hedré, 1992: 28), som innebär att eleven förstår betydelsen av deduktion, alltså härledning och bevis med hjälp av att logiskt härleda satsur ur allmänna lagar och axiom. Den sista nivån kallas *Stringens* då eleven förstår vikten av precision, eleven kan då utveckla en teori utan att använda konkreta föremål. Denna nivå är det ytterst få elever som uppnår (Hedré 1992: 28).

Forskning pekar på att undervisning i geometri börjar alltför teoretiskt, på nivå två och tre. Lärare och elever använder olika språk och det kan därför bli svårt för eleven att förstå (Hedré 1992: 29). I nivåerna kan uttrycket ”Denna figur är en kvadrat” förstås olika (Hedré, 1992: 29). För en elev på den första nivån innebär det att den lärt sig att figuren ska kallas för kvadrat. En elev som befinner sig på den andra nivån vet att kvadraten har vissa egenskaper som t ex. att den har fyra lika långa sidor. På den tredje nivån förstår eleven olika samband mellan figurer, t ex. att alla fyrhörningar har vinkelsumman 360° (Hedré, 1992: 29).

Som lärare är det viktigt att känna till dessa nivåer och veta att eleverna går igenom dessa (Hedré, 1992: 30). Eleverna måste få utgå från den nivå där de befinner sig. Läraren måste också ta hänsyn till att eleverna kan befinna sig på olika nivåer och får då anpassa undervisningen efter det (ibid: 30).

För att möjliggöra bra övergångar mellan dessa nivåer föreslog van Hiele faser i en inlärningsprocess (Hedré, 1992:32). *Den första fasen* handlar om att eleven observerar och ställer frågor medan läraren informerar och hjälper eleven att ta till sig det ordförråd som blir nödvändigt på den aktuella nivån. Läraren och eleven samtalar om det område som ska undersökas (ibid: 32). Läraren ska se till att eleverna har material tillgängligt, som hjälper dem att förstå olika sammanhang (ibid: 34). *Den andra fasen* kallas för vägledad undersökning då läraren ger en noggrant strukturerad följd av aktiviteter. Eleven blir bekant med det som är gällande för nivån och förstår i vilken riktning undervisningen kommer att gå (Hedré, 1992: 32). Lärarens uppgift är att tillhandahålla material som hjälper eleverna att se viktiga sammanhang (ibid: 34). *Den tredje fasen* är förklaring då nivåns system och sammanhang börjar bli tydligt för eleven (Hedré, 1992: 32). Läraren bör leda en diskussion i klassen som hjälper eleverna att använda ett korrekt språk (ibid: 34). *Den fjärde fasen* handlar om fri undersökning då eleverna får mer komplicerade uppgifter (ibid: 32). Även här bör läraren tillhandahålla material och ge eleverna instruktioner som tillåter problemlösning (ibid: 34). *Den femte och sista fasen* är sammanfattning (Hedré, 1992:32). Här är det viktigt att läraren uppmuntrar eleverna att tänka över sina handlingar (ibid: 34).

I faserna kan olika material användas, t.ex. olika papper till att vika och rita. I faserna är även diskussion en viktig del (Hedré, 1992: 34). För att ge eleverna en säker grund i geometri är det bästa sättet att låta dem utforska, uppfinna och diskutera med sina egna ord (Hedré, 1992: 35).

I läroplanen finns begrepp som elever ska möta i undervisningen, t.ex. punkt, linjer, sträckor. En linje eller en rät linje har oändlig utsträckning (Wikipedia 2014b). En punkt är ett noll-dimensionellt objekt och mängder av punkter i ett rum bildar geometriska objekt (Wikipedia 2014c). En sträcka finns på en linje som begränsas av två punkter (Wikipedia 2014b). Eleverna ska också känna till olika geometriska objekt som fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock (Lgr 11: 63). Eleverna ska även känna till symmetri (Lgr 11: 63). Symmetri är två delar i en helhet som är varandras spegelbilder (Nationalencyklopedin 2014b).

Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka om praktisk matematik ökar måluppfyllelsen för elever i årskurs 1-3 samt undersöka vad praktiskt arbete kan innebära. Syftet är även att undersöka hur lärare kan genomföra undervisningen i geometri på ett praktiskt sätt.

Frågeställningarna är därmed följande:

- Hur kan läraren genomföra geometriundervisningen rent praktiskt i klassrummet med elever i årskurs 1-3?
- Hur påverkar praktiskt arbete i matematik elevers lärande i årskurs 1-3, med fokus på geometri?

Metod

I detta kapitel presenteras studiens design. Urvalskriterier och sökkriterier beskrivs. Värdering och val av sökträffar presenteras. En tabell med sökträffar visar utfall och urval av vetenskapliga artiklar och rapporter. De valda artiklarna presenteras utifrån syfte, design, etiska aspekter, resultat och slutsats.

Design

Designen för studien är en systematisk litteraturstudie (Eriksson Barjas, Forsberg, Wengström, 2013: 31). Den systematiska litteraturstudien går ut på att söka, kritiskt granska och därefter sammanställa forskning inom ämnet. Syftet med denna litteraturstudie är att försöka åstadkomma en syntes av tidigare forskning inom praktiskt arbete med matematik och området geometri. Det första steget var att motivera varför studien skulle göras (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 32). Det andra steget var att formulera frågor som går att besvara. I nästa steg formulerades en plan för studien. Efter tidsplanen identifierades och valdes litteratur och forskning. De vetenskapliga artiklarna granskades kritiskt och kvalitetsbedömdes (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 32). Nästa steg för denna studie var att analysera och diskutera resultatet. Det sista steget handlar om att sammanställa och dra slutsatser (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 32).

Databassökning och sökkriterier

För att få inspiration till sökord användes PICOC-modellen (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 71). *Population* (vem) består av elever i årskurs 1-3. *Intervention* handlar om vad som ska undersökas, som är praktisk matematik. *Control* eller kontrollgrupp är inte tillämpligt i detta fall, eftersom inte någon annan undervisning än praktisk som undersöks. *Outcome* handlar om vad som ska uppnås eller förbättras som då är ökad måluppfyllelse. *Context* eller på svenska, sammanhang, består av det matematiska området geometri (Eriksson Barjas m.fl., 2013:71).

Utifrån inspiration av PICOC-modellen och definitionen av praktisk matematik valdes följande sökord på svenska: *Matematikundervisning geometri*, *laborativ matematik*, *konkret matematik*, *praktisk matematik*, *praktisk geometri* och *geometriundervisning*. Sökningen började med att inte begränsas till årskurs 1-3 eftersom det var osäkert hur utforskat just detta ämne var. Eftersom tiden inte tillät en fullständig sökning begränsades aldrig sökningen till årskurs 1-3. De engelska sökorden valdes utifrån översättning och från engelska texter. De engelska sökorden blev: *concrete materials mathematics*, *concrete mathematics geometry* och *manipulatives geometry*. Den engelska sökningen fick inte lika stor plats som den svenska sökningen på grund av att tiden inte tillät det.

Sökningen efter vetenskapliga artiklar och rapporter har gjorts i flera databaser. Databaser som använts är LIBRIS, Summon, Google Scholar och ERIC Proquest. Dessa användes på grund av att de ger ett stort utbud och de föreslås i *Systematiska Litteraturstudier* (Eriksson Barjas m.fl., 2013:75-78) och av bibliotekarie. Databaserna finns tillgängliga genom Högskolan Dalarnas hemsida (Högskolan Dalarna 2014). Först användes databasen LIBRIS som söker böcker, tidskrifter, artiklar m.m. på alla svenska universitet- och högskolebibliotek (Libris 2014). Nästa databas som användes var Summon, som söker material som är tillgängligt på Högskolan Dalarnas bibliotek (Summon 2014). Nästa databas som användes var Google Scholar som finns fritt tillgänglig på Internet, där man kan söka efter vetenskaplig litteratur för olika publiceringsformat (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 78). Google Scholar användes också som komplement till ERIC Proquest, då vissa texter inte gick att öppna via ERIC Proquest. Sökningarna i ERIC Proquest och i Google Scholar gjordes enbart på engelska eftersom databasernas huvudsakliga språk är engelska (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 75). I de övriga

databaserna gjordes sökningen på svenska, förutom då Google Scholar användes som komplement till ERIC Proquest.

I vissa fall resulterade sökningarna i examensarbeten. De examensarbeten som innehöll något av sökorden användes för en manuell sökning, genom att granska examensarbetenas referenslistor.

Urvalskriterier

Sökningen efter vetenskapliga artiklar och rapporter skedde först och främst på svenska, men även sökningar på engelska gjordes. I databaser har sökningarna begränsats med *peer reviewed*, avhandlingar och artiklar från vetenskapliga publikationer. En del texter har uteslutits på grund av att de inte varit tillgängliga i fulltext eller i en sammanfattning.

Sökträffarna bedömdes i första hand utifrån titeln. De titlar som verkade intressanta och innehöll något av sökorden valdes sedan utifrån dess sammanfattning (abstract). Då sammanfattningen eller abstract bedömdes kunna svara på frågeställningen för studien lästes hela texten översiktligt. Efter en översikt över de valda texterna gjordes ytterligare ett urval grundat på om innehållet motsvarade studiens frågeställningar. Artiklarna lästes på nytt om de innehöll praktisk matematik och geometri. Vissa artiklar valdes bort på grund av att de riktade sig mot grundskolans senare år eller om innehållet inte motsvarade studiens syfte och frågeställningar.

Värdering och val av sökträffar

Sökningen efter vetenskapliga artiklar gjordes i LIBRIS, Summon, Google Scholar och ERIC-proquest. De träffar sökningarna resulterade i valdes först utifrån titel, sedan utifrån abstract och slutligen utifrån fulltext. Sedan gjordes ett urval efter om texterna kunde svara på frågeställningarna. Texterna lästes alltså utifrån studiens frågeställningar.

Nedan redovisas en tabell (Tabell 1) som visar på sökord, utfall, urval och värdering (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 82).

Tabell 1. Sökutfall

Sökord	Databas	Utfall (Titel)	Utfall (Abstract)	Utfall (Fulltext)	Urval	Värdering
Matematikundervisning geometri	LIBRIS	2	0	0	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Laborativ matematikundervisning	LIBRIS	14	1	0	0	Examensarbete. Inga funna referenser
Konkret matematik/- undervisning	LIBRIS	5	0	0	0	Endast böcker
Praktisk matematikundervisning	LIBRIS	1	1	0	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Praktisk geometri	LIBRIS	0	0	0	0	Inga träffar
Laborativ matematik	Summon	1	1	0	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Konkret matematik	Summon	10	1	1	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Praktisk matematik	Summon	15	2	0	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Praktisk matematikundervisning	Summon	3	0	0	0	Titeln innehöll inte sökorden
Matematik geometri	Summon	276	7	0	0	För stort utfall.
Praktisk geometri	Summon	4	0	0	0	Titeln innehöll inte sökorden
Laborativ matematik	Google Scholar	2	1	0	0	Examensarbete. Inga referenser funna
Konkret matematik	Google Scholar	26	2	1	(1)	1 Examensarbete, 1 funnen via referens
Geometriundervisning	Google Scholar	2	1	0	0	Examensarbete. Inga referenser funna
Praktisk matematik	Google Scholar	18	1	0	0	Motsvarade inte ämnesområdet
Geometriundervisning	LIBRIS	2	0	0	0	Titeln innehöll inte sökorden
Geometriundervisning	Summon	4	0	0	0	Titeln innehöll inte sökorden
Concrete materials mathematics	ERIC Proquest	148	2	2	2	Stort utfall. Valda innehöll ämnesområde
Concrete mathematics geometry	ERIC proquest	94	4	2	1	Stort utfall. Valda innehöll ämnesområde
Manipulatives geometry	ERIC Proquest	19	3	2	2	Valda innehöll ämnesområde

Sökningen gav totalt 646 träffar i de olika databaserna. Utfall på titel och abstract resulterade i att 8 texter lästes i fulltext. Sökningen gav många träffar på böcker och examensarbeten, vilket gjorde att många träffar valdes bort. Slutligen valdes 6 texter som data till studien, som kunde svara mot studiens syfte och frågeställningar.

Kvalitetsgranskning och presentation av de använda texterna

För att kvalitetsbedöma artiklar och rapporter användes följande punkter:

- Syftet med undersökningen?
- Vilken design har använts? Typ av artikel?
- Vilka resultat har studien gett?
- Vilka etiska aspekter förklaras?
- Vilka slutsatser drar författarna?

De artiklar som hittades och som har använts till studien har hittats genom ERIC Proquest där *peer reviewed* har använts. Genom Eric-Proquest hittades 5 artiklar, varav två fallstudier, två beskrivande artiklar och en omfattande studie med enkäter och uppföljande intervjuer. En artikel som hittades via Google Scholar hittades via referenser i ett examensarbete (Bergström, E. Hallenberg, E, 2014). Denna artikel är en forskningsöversikt. I Tabell 2 nedan presenteras de olika texterna med författare, titel, publiceringsår och språk.

Tabell 2. *Presentation av de valda texterna*

Författare	Titel	Publiceringsår	Språk
Paul Swan och Linda Marshall	Revisiting Mathematics Manipulatives materials	2010	Engelska
Rosemaree Casewell	Fractions from concrete to abstract using playdough mathematics	2007	Engelska
Peter Bender och Alfred Schreiber	The principle of operative concept formation in geometry teaching	1980	Engelska
Douglas C. Clements och Michael Battista	Geometry and Geometric measurement	1986	Engelska
Regina Mistretta och Joseph A. Prozio	Using Manipulatives to show what we know	2000	Engelska
Frank D'Angelo och Nevin Iliev	Teaching Mathematics to young Children through the use of concrete and virtual manipulatives	2012	Engelska

Analys av data

För att få fram ett resultat till studien har en innehållsanalys gjorts (Eriksson Barjas m.fl., 2013: 146). En innehållsanalys innebär att data tas fram från de valda texterna (ibid: 146). De valda texterna skrevs ut och lästes för att få en helhetsbild över materialet. Texterna översattes till svenska så gott det gick för att få en djupare förståelse av innehållet. Texterna läste ytterligare med fokus på den första frågeställningen som markerades med en färg. Därefter lästes de på nytt med fokus på den andra frågeställningen, som markerades med en annan färg. Frågeställningarna blev grunden för rubrikerna i resultatet. Den markerade texten sattes därefter under aktuell rubrik för att kunna se likheter och skillnader. Mycket av den markerade texten handlade om lärarens roll i undervisningen och därför skapades två underrubriker i resultatet.

Beskrivning av de använda texterna

Artiklarna som använts i detta arbete presenteras nedan och visar på vad de innehåller. När artiklarna lästes fokuserades det på vilket syfte dem hade, vilken typ av artikel det var, etiska aspekter, resultat och slutsats.

Författare, år och titel: Swan & Marshall (2010) *Revisiting Mathematics Manipulative Materials*

Syfte: Att undersöka användandet av olika material i matematik klassrummet

Typ av artikel: En omfattande studie, enkäter från 820 lärare på 250 skolor i västra Australien. Intervjuer med ett urval av lärare.

Etiska aspekter: Frivilligt och anonymt deltagande i enkäterna. Anmälan om lärare ville delta i intervju.

Resultat: Olika material gynnar elevernas matematiklärande och eleverna tycker det är roligt att använda det.

Slutsats: Olika material gynnar elevernas inläring och undervisning i matematik. Lärare kompetens i användandet av olika material behöver stärkas.

Författare, år och titel: D'Angelo & Iliev (2012) *Teaching Mathematics to Young Children through the Use of Concrete and Virtual Manipulatives.*

Syfte: Ta reda på vad forskning visar om konkreta och virtuella material i matematikundervisningen

Typ av artikel: Forskningsöversikt

Etiska aspekter: Inga namn nämns

Resultat: Ett flertal resultat från olika studier. Bl.a. att användandet av olika material är en nyckel till undervisningen i matematik för yngre elever.

Slutsats: Lärare som använder konkret och virtuellt material kan positivt påverka alla elevers matematiska kunskaper.

Författare, år och titel: Caswell (2007) *Fractions from Concrete to Abstract Using "Playdough Mathematics".*

Syfte: Ge exempel på hur eleverna kan bygga broar mellan det konkreta och det abstrakta.

Typ av artikel: Fallstudie med elever i åldrarna 9-12 år.

Etiska aspekter: Inga namn nämns. Bilder visar inte några personer.

Resultat: Eleverna stimuleras, prövar sig fram och diskuterar när de använder play-doh. Efter en tids användning av play-doh kan de göra mer abstrakta beräkningar.

Slutsats: Eleverna njuter av upplevelsen att arbeta med play-doh. Stimulerar alla elever och stödjer deras lärande i matematik.

Författare, år och titel: Clements & Battista (1986) *Geometry and Geometric Measurement.*

Syfte: Att diskutera och illustrera sund användning av olika material i geometri och geometrisk mätning.

Typ av artikel: Beskrivande artikel

Etiska aspekter: Inga namn nämns

Resultat: Riktlinjer som kan följas i arbetet med geometri

Slutsats: Eftersom geometri är baserad på studier av den fysiska världen är det absolut nödvändigt att använda olika material i undervisningen.

Författare, år och titel: Mistretta & Prozio (2000) *Using Manipulatives to Show What We Know.*

Syfte: Att eleverna med hjälp av olika material ska visa vad de kan.

Typ av artikel: Beskrivande artikel. Beskriver aktiviteter för eleverna

Etiska aspekter: Inga namn nämns

Resultat: Aktiviteter till eleverna

Slutsats: Med hjälp av olika material kan eleverna förstå och förklara matematiska begrepp. Läraren får insikter om elevernas lärande.

Författare, år och titel: Bender & Schreiber (1980) *The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching*

Syfte: Hur undervisningen i geometri kan genomföras och hur eleverna kan förstå förhållandet mellan geometri och verklighet

Typ av artikel: Fallstudie

Etiska aspekter: Inga namn nämns

Resultat: Exempel på geometri-undervisning

Slutsats: Ingen tydlig slutsats.

Etiska aspekter

Artiklarna granskades utifrån etiska aspekter, som redovisas i avsnittet ovan, Beskrivning av de använda texterna. Artiklarna har även granskats på ett så objektivt sätt som möjligt och är inte påverkade av studiens frågeställningar. Min syn och mina åsikter speglas inte i studien, utan både positiva och negativa resultat lyfts fram från de valda artiklarna. I studien har alla artiklar presenterats så att läsaren kan se urval och användning av de valda texterna.

Resultat

Kapitlet består av resultat från de valda artiklarna. Resultaten är uppdelade utifrån studiens frågeställningar som innehåller *genomförande av praktisk matematik* med underrubrikerna *lärarens roll* och *konkreta exempel*. Därefter följer betydelsen av praktiskt arbete för elevernas lärande.

Lärare anser att små barn behöver använda olika material i matematikundervisningen för att förstå matematiska begrepp, enligt en undersökning av Frank D'Angelo och Nevin Iliev. De beskriver det så här:

One hundred percent positive response to the question as to whether teachers use manipulatives in their classroom indicates that educators commonly believe that young children need manipulatives in order to grasp mathematical concepts. (D'Angelo & Iliev, 2012: 8)

Lärarens genomförande av praktisk matematik med fokus på geometri

Matematiken kommer tidigt in i skolan och enligt D'Angelo och Iliev (2012) är det viktigt att eleverna kommer i kontakt med mycket laborativt material (D'Angelo & Iliev, 2012: 9). Konkreta material såsom räknare, mönsterblock, geobräde, kuber och virtuella material (exempelvis datorer), är exempel på material som används i matematikundervisningen i USA (D'Angelo & Iliev, 2012: 2). En bra början med olika konkreta material är att låta eleverna utforska de nya "leksaker" (D'Angelo & Iliev, 2012: 5). En annan viktig del i att arbeta med laborativ matematik och konkret material är att diskutera erfarenheter och ta del av varandras idéer, för att se olika matematiska begrepp i olika perspektiv (D'Angelo & Iliev, 2012: 2).

Lärarens roll

En viktig aspekt av arbetet med laborativt material är lärarens roll. Läraren behöver veta när, varför och hur olika material används i klassrummet (D'Angelo & Iliev, 2012: 3). Lärarens mål är att underlätta förståelsen av matematiska begrepp med hjälp av konkreta föremål. Läraren kan då följa en viss ordning av aktiviteter för att eleverna ska förstå och lättare komma ihåg begrepp. Det första steget är att läraren ger exempel på hur eleverna kan använda olika material (D'Angelo & Iliev, 2012: 5). När läraren introducerar ett nytt material för eleverna bör hon också visa hur det ska användas på ett korrekt sätt. Läraren måste visa hur det ska användas så eleverna förstår hur de ska använda materialet (D'Angelo & Iliev, 2012: 5). Nästa steg är att eleverna kan övergå till att rita olika objekt och att de exempelvis inte behöver använda tredimensionella objekt. Det tredje steget handlar om att eleven kan använda sig av skriftliga förklaringar (D'Angelo & Iliev, 2012: 4).

En undersökning visar att pedagogerna förstår behovet av att eleverna får tid till att arbeta med laborativ matematik. Undersökningen visar dock att lärarna inte har en tydlig förståelse för hur eller om material förbättrar inläringen av matematik (Swan & Marshall 2010). Risken med det är att läraren inte kan övertyga eleverna om varför det används, eller överger material då läraren stöter på problem (Swan & Marshall, 2010: 3).

Swan och Marshall (2010: 3) ger förslag på hur skolor och lärare kan organisera det konkreta materialet. De menar att det ska finnas klassrumsuppsättningar som innehåller väsentligt material som finns i varje klassrum. Dessa material kan sedan roteras och bytas mellan klassrummen (Swan & Marshall, 2010: 3).

Konkreta exempel på hur praktiskt arbete kan genomföras

Ett exempel på hur man kan arbeta med konkret material beskrivs i D'Angelo och Ilviev (2012: 6). Eleverna i årkurs 1 fick en blandning av material och former. Eleverna skulle med hjälp av olika material bygga tredimensionella hus. Eleverna skulle göra kopplingar mellan dessa former och deras hus. När de hade byggt klart sina hus fick de rita på papper. Det skulle få dem att förstå förhållandet mellan tredimensionellt och tvådimensionellt (D'Angelo & Ilviev, 2012: 6).

I en artikel beskrivs hur man kan konkretisera matematiken med hjälp av play-doh (Caswell, 2007). Undervisningen innebär oftast skriftliga aktiviteter där användandet av abstrakta siffror, symboler och bilder är i fokus. Många elever som är mellan 9 och 12 år behöver fortfarande konkret material för att deras förståelse ska öka. Med ett konkret material som play-doh engageras eleverna till att koppla ihop det konkreta med det abstrakta (Caswell, 2007: 1). Denna artikel visar främst hur arbetet med play-doh och bråk kan genomföras, men visar också att eleverna uppmanas att använda former som rektanglar och trianglar. Det visade sig att eleverna blev engagerade och diskuterade om de olika formerna. Eleverna stimulerades till att mäta och jämföra olika former. Eleverna flyttade runt i klassrummet för att se varandras idéer och dela sitt eget tänkande (Caswell, 2007: 2). Efter en tids användning av play-doh behövde inte alla elever använda det längre, utan de kunde nu göra abstrakta beräkningar (Caswell, 2007: 4).

För att eleverna ska ges möjlighet att visa vad de kan och använda material ges exempel på uppgifter som kan göras enskilt eller tillsammans med klasskamrater. Detta kallas för "Månadens verksamhet" (Mistretta & Porzio, 2000). Olika material hjälper eleverna att förstå och förklara matematiska begrepp. Det ger också lärarna värdefulla insikter i elevernas kunskaper (Mistretta & Porzio, 2000: 1). Den första aktiviteten vänder sig till förskoleklass till och med årskurs 2. Eleverna ska göra sin egen uppsättning av olika material och placera dem i en påse. De ska sedan göra fyra olika former (cirkel, kvadrat, triangel och rektangel). Dessa ska också vara i fyra olika färger. Nästa aktivitet vänder sig till samma åldersgrupp, eleverna ska ta en handfull med pinnar och uppskatta antalet. De ska sedan lägga pinnarna i högar om tio, och sedan jämföra med sin uppsättning. De ska sedan förklara sitt tal (t ex. 24 är 2 tior och 4 ettor eller $20+4$). Nästa aktivitet handlar om mätning, eleverna ska då uppskatta hur långt något är och sedan mäta med ett objekt som de själva väljer. De ska sedan göra samma mätning med ett annat objekt. Slutligen ska de jämföra svaren och komma fram till att det är viktigt att använda standardenheter vid mätning (Mistretta & Porzio, 2000: 1).

Ett annat sätt att konkretisera matematiken är att använda sig av virtuellt material, t.ex. datorer eller smartboards (D'Angelo & Ilviev, 2012: 6-7). Virtuellt material kan fungera på samma sätt som fysiskt, konkret material, då datormusen blir elevens förlängda arm. Detta kan användas med hela klassen genom en smartboard. Eleverna kan också sitta tillsammans, två och två, vid en dator där de kan hjälpas åt och diskutera med varandra. En annan fördel med detta är att eleverna snabbt och enkelt kan kontrollera om de svarat rätt (D'Angelo & Ilviev, 2012: 7). Det virtuella materialet öppnar en helt ny värld för barnen att utforska. Eleverna kan även använda detta hemma vid datorn, då läraren kan förklara för föräldrarna hur det fungerar. Eleverna kan på så sätt fortsätta sitt lärande hemma. Med hjälp av både fysiskt, konkret material och virtuellt material finns ett stort utbud av metoder (D'Angelo & Ilviev, 2012: 7). I en annan artikel anses det vara bättre att vänta med virtuella material tills eleverna är bekanta med de fysiska materialerna (Swan & Marshall, 2010: 1). Virtuella material, såsom smartboards, används främst som demonstration vilket gör att eleverna får en begränsad tillgång till materialet (Swan & Marshall, 2010: 1).

Praktiska aktiviteter ses som viktiga då man arbetar med geometri. Användning av konkreta former och att jämföra geometri med verkligheten ses som ett viktigt behov i undervisningen av geometri (Bender & Shreiber, 1980: 1). En viktig del inom geometrin är att ta till sig begrepp. I

den traditionella undervisningen finns främst tre sätt att inför nya begrepp: genom definition, alltså språket; genom ett exempel; eller genom att rita. I stället för att göra raka linjer med en linjal kan ett annat sätt att illustrera en rak linje vara att vika papper eller att sträcka en tråd (Bender & Shreiber, 1980: 1).

Geometri och geometriska mätningar är baserade på den fysiska världen, undervisningen bör därför innehålla praktiska material (Clements & Battista, 1986: 4). Geometri är alltså ett studieobjekt som kan användas för att mäta saker som byggnader, bilar eller lekplatser som är bekanta för eleverna (Clements & Battista, 1986: 1). Eftersom eleverna är bekanta med och intresserade av dessa saker kan geometrin vara ett mycket motiverande ämne. Undervisningen i geometri handlar om att förbereda eleverna för den abstrakta geometrin och hjälpa dem utveckla kunskaper om sin miljö. Erfarenheter och forskning visar att det bäst kan uppnås genom att involvera eleverna i välplanerade aktiviteter med olika material (Clements & Battista, 1986: 1). Clements och Battista (1986: 1-2) har även vissa riktlinjer för geometriundervisningen. Den första är att använda klassrummets olika material. Mönsterblock, geobräder, centimeterkuber och tredimensionella former bör aktivt användas av eleverna för att bygga och utforska geometriska objekt. Eleverna bör också uppmuntras att identifiera geometriska objekt utanför klassrummet och i fotografier. Undersöka och rita diagram är också en viktig del, eleverna ska inte bara granska diagram utan också rita själva. Eleverna bör också lära sig namn, definitioner eller symboler av geometriska objekt (Clements & Battista, 1986: 1). Ett exempel som ges är att eleverna kan rita en modell av ett objekt och sedan bygga den med hjälp av sugrör och sedan ta in något som har samma form som modellen (Clements & Battista, 1986: 2). Mätning är också en viktig del av geometrin som bör innefatta en sekvens av faser (Clements & Battista, 1986: 2). Den första fasen handlar om att bli medveten om ett föremål som senare kommer mätas, bli medveten om dess längd, area eller volym. Nästa fas handlar om att eleven jämför objekt. Då eleven blir medveten om ett objekt ökar motivationen till jämförelse. Fas tre handlar om mätning med icke-standardenheter. Eleverna kan då delas in i grupper och få använda olika måttenheter som leder till diskussion. Nästa fas innehåller mätning med standardenheter. Fas fem handlar om användandet av vanliga mätinstrument. Vid införandet av mätning med linjal kan centimeterkuber användas som motsvarar ett avstånd på en linjal. Mätning med linjal kan vara svårt för många elever, då kan mätning med centimeterkuber vara en bra början. Formeln för area kan upptäckas genom att lägga centimeterkuber på en yta (Clements & Battista, 1986: 3).

Betydelsen av praktiskt arbete för elevers matematiklärande

Ju tidigare läraren inför konkret matematik, desto högre kommer barnens matematiska kompetens att vara (D'Angelo & Ilviev, 2012: 9). Då lärarna introducerar ett nytt laborativt material för eleverna kan ett sätt vara att låta dem leka med materialet, eftersom de genom lek lär sig saker om ett objekt (D'Angelo & Ilviev, 2012: 5).

Användning av olika material i klassrummet hjälper unga elever att bygga starka matematiska band (D'Angelo & Ilviev, 2012: 2). Det hjälper eleverna att nå en större förståelse och blir grunden för deras matematiska kunskap. Användandet av olika material i matematik undervisningen gör att fler barn kan förstå nya begrepp (D'Angelo & Ilviev, 2012: 4). Då den konkreta och abstrakta matematiken är länkande till varandra kommer läraren se större framgång. Eleverna kommer ha en starkare grund då förståelsen av begrepp blir påtaglig (D'Angelo & Ilviev, 2012: 8). För att eleverna ska få en stark grund att stå på kan läraren följa en viss ordning av aktiviteter; till en början använda konkret material; låta eleverna rita bilder, och göra och låta eleverna göra skriftliga förklaringar. Efter en tids användning av konkreta material, ritande av bilder och skriftliga förklaringar blir matematiska begrepp abstrakta för eleverna och de behöver inte längre använda konkret material eller rita bilder (D'Angelo & Ilviev, 2012: 4).

Unga elever bör ha många praktiska interaktioner med olika material för att ge dem möjlighet att förstå olika matematiska begrepp (D'Angelo & Ilviev, 2012: 2). Användandet av olika material i undervisningen hjälper eleverna att lättare förstå begrepp och gör undervisningen mer effektiv. Forskning har visat att eleverna får möjlighet att skapa en egen uppfattning om en matematisk teori och kan lättare behålla informationen och använda den senare, enligt D'Angelo och Ilviev (2012: 2). Att kunna röra och styra olika material gör att elevernas sinnen aktiveras, som i sin tur leder till en starkare lagring av informationen (D'Angelo & Ilviev, 2012: 2). Många elever har svårt att förstå matematikens abstrakta begrepp, då kan olika material hjälpa eleverna att klargöra dessa begrepp. Alla elever har nytta av att använda konkret material i klassrummet, speciellt gynnsamt är det för andraspråks elever, lågpresterande elever och elever i inlärnings svårigheter (D'Angelo & Ilviev, 2012: 9).

Att utforska och få många interaktioner med konkreta föremål utvecklar den rumsliga förmågan som ligger bakom geometriskt tänkande. Det handlar också om att inte bara undersöka en uppsättning av geometriska objekt, utan undersöka föremålen för att upptäcka en generalisering (Clements & Battista, 1986: 1).

Diskussion är en del av laborativ undervisning och sägs vara viktig för att lärandet ska bli så effektivt som möjligt (D'Angelo & Ilviev, 2012: 5). Språket ses som nyckeln till detta, framförallt för att utveckla en abstrakt förståelse av ett begrepp (D'Angelo & Ilviev, 2012: 6).

Lärare beskriver fördelar med att använda olika material i undervisningen (Swan & Marshall, 2012: 3). Lärarna i undersökningen menade att användandet av olika material förhöjer intresset och att det engagerar eleverna. De beskriver också fördelar som att bygga en förståelse och hjälpa barnen att förstå begrepp, eller förstärka dem (Swan & Marshall, 2012: 3). En annan undersökning visar också att lärare anser att arbetet med laborativ matematik är bra för att främja elevernas förståelse av matematiska begrepp (D'Angelo & Ilviev, 2012: 9).

Konkret material skapar en grund för förståelse hos eleverna. För att fördjupa detta kan virtuella material användas, det konkreta sker i en dator eller liknande. Det ger eleverna ett annat perspektiv på matematiken och gör att förståelse skapas och lagras för framtiden (D'Angelo & Ilviev, 2012: 8). Virtuella material aktiverar och engagerar eleverna lika mycket som fysiska material eftersom det är faktiska modeller av fysiska material. Virtuella material gör att eleverna blir bekanta med matematiska begrepp och kan diskutera med sina kamrater samtidigt som de får omedelbar återkoppling. Återkopplingen tvingar eleverna att reflektera över sina svar. Eftersom virtuellt material inte är fysiska föremål måste eleverna tänka mer abstrakt. Att använda en dator i undervisningen ökar också elevernas tekniska kunskaper, som kan vara en fördel i det tekniska samhälle som vi lever i. Att koppla ihop konkreta och virtuella material har visat ge större framgång i elevernas lärande än om eleverna enbart fått ägna sig åt virtuellt material (D'Angelo & Ilviev, 2012: 8).

Användningen av olika material ökar elevernas upplevelser i deras matematiska lärande. Det bidrar till att minska klyftan mellan det konkreta och abstrakta. Det främjar också elevernas nyfikenhet och deras livslånga lärande (D'Angelo & Ilviev, 2012: 9).

Diskussion

Diskussionen är uppdelad i två delar. I den första delen, metoddiskussion, diskuteras styrkor och svagheter i studien. I den andra delen, resultatdiskussion, diskuteras likheter och skillnader mellan resultatet och litteratur som tagits upp i bakgrunden.

Metoddiskussion

I och med att praktisk matematik definierades som konkret matematik och laborativ matematik blev det många sökord och sökorden användes inte lika i alla databaser och på svenska och engelska. Detta gjorde också att PICOC-modellen enbart användes som en inspirationskälla till sökningen. Sökningen gjordes först och främst på svenska, det visade sig svårt att hitta forskning kring praktiskt arbete i matematik. När sökningen gjordes på engelska hittades artiklar och rapporter. Sökningen på engelska fick inte lika mycket plats som sökningen på svenska. Det beror främst på tidsbrist men också på att artiklar hittades snabbt. Sökorden på engelska blev få och även det beror delvis på tidsbristen, vilket också ses som en brist i studien.

Brister finns i studien på grund av att sökorden inte är strukturerade. Många texter valdes bort på grund av titel, vilket kan ses som en brist. Texter valdes också bort på grund av att de inte hade ett lätt tillgängligt abstract eller fulltext, vilket också är en brist eftersom värdefull information kan ha valts bort. De valdes bort på grund av att tidsramarna inte tillät beställningar av artiklar. Studien fokuserar på F-3, vilket inte visas i sökningen, det gör att värdefull information kan ha valts bort eller bero på att det inte finns så mycket forskning kring detta.

Av artiklarna som valdes har 5/6 sökts med peer reviewed, vilket gör informationen tillförlitlig. Artiklarna var dock väldigt korta men gav ändå relevant information till studien. Eftersom det inte var så många artiklar och de var korta är det svårt att kunna generalisera resultatet. Artiklarna pekar dock på ungefär samma resultat, vilket gör reliabiliteten något säkrare.

Sökningarna på svenska resulterade i flertalet examensarbeten. Eftersom sökningarna på svenska inte gav värdefulla träffar kompletterades sökningen med att läsa referenslistor i examensarbetena. Det resulterade i att en artikel hittades via referens i ett examensarbete. En del sökningar gav också ett stort utfall. I vissa fall gjordes inga begränsningar, men i de allra flesta fall gjordes begränsningar till avhandlingar, artiklar från vetenskapliga publikationer, artiklar från det senaste året eller med peer reviewed. Exempelvis gav sökningen på ”matematik geometri” 276 träffar trots att den begränsades till artiklar från vetenskapliga publikationer. Då användes istället ett annat sökord, till exempel ”praktisk geometri”.

Kvalitetsgranskningen utgår från punkterna syfte, typ av artikel, etiska aspekter, resultat och slutsats. Kvalitetsgranskningen fick hållas till dessa punkter eftersom texterna inte är i form av avhandling eller en hel studie. Studierna presenteras istället i tidningsartiklar, vilket gör det svårt att ha med fler punkter i kvalitetsgranskningen. En kvalitetsgranskning har gjorts, men den skulle kunna ha gjorts mer noggrant, vilket kan ses som en brist i studien.

De exempel som finns med i resultatet på hur praktisk matematik kan genomföras visar inte alltid på hur arbetet med geometri kan gå till. Något som fortfarande är lite oklart är att de kanske inte alltid pekar på F-3. Därför kan studiens validitet ifrågasättas. Geometri är heller inte i fokus, som den är i frågeställningen, vilket också påverkar studiens validitet. Den andra frågeställningen handlar om elevernas lärande i geometri, vilket inte heller framkommer i resultatet, även detta gör att studien brister i validitet.

Resultatdiskussion

Syftet med studien var att undersöka om praktisk matematik ökar måluppfyllelsen och vad praktiskt arbete kan innebära i F-3. Det finns nästan bara positiva resultat som svarar mot syftet. Det enda negativa som lyfts fram är att lärare inte har en tydlig förståelse för hur eller om användandet av material förbättrar elevernas inläring i matematik, enligt Swan och Marshall (2010), vilket kan leda till att lärare inte kan övertyga elever eller föräldrar om varför det används eller att lärare överger material då de stöter på problem (Swan & Marshall, 2010).

Artiklarna som används i min litteraturstudie visar på liknande resultat då det gäller olika material i undervisningen. Läraren kan följa en viss ordning av aktiviteter för att eleverna ska få förståelse. Eleverna använder olika material och sedan övergår de till att rita, för att till slut kunna abstrahera ett begrepp (D'Angelo & Ilviev, 2012). I exemplet med play-doh handlar det också om att först använda material för att sedan kunna förstå begrepp abstrakt (Caswell, 2007).

Likheter mellan resultat och litteratur som tagits upp i kapitlet Bakgrund visar vikten av diskussion i arbetet med laborativ matematik. Att diskutera när man använder olika material och för att lära sig olika begrepp ses som viktigt. Klassrumsdiskussioner är viktiga för att dela sina idéer och se olika perspektiv (D'Angelo & Ilviev 2012). Diskussion är en del av laborativ matematik (D'Angelo & Ilviev 2012). Exemplet med play-doh visar också att eleverna diskuterar och jämför varandras material (Caswell 2007). I ett annat exempel delas eleverna in i grupper och får använda olika måttenheter vilket också leder till diskussion bland eleverna (Clements & Battista 1986). Här kan en parallell till bakgrunden dras där Skolverket (2011: 26) menar att det är naturligt att diskutera resultat och process i arbetet med laborativ matematik. När ett innehåll i matematiken konkretiseras är diskussion en betydande faktor för att eleverna ska nå en förståelse (Löwing 2006: 117). Även i van Hiele nivåerna anses diskussion som en viktig del. Att låta eleverna diskutera med sina egna ord är en del som kan bidra till en säker grund i matematik (Hedrén 1992: 35).

Van Hiele-nivåerna kan relateras ytterligare till resultatet. Nivåerna kan jämföras med ordningen av aktiviteter som läraren kan följa (D'Angelo & Ilviev, 2012: 4). Den första nivån *igenkänning*, kan liknas med då läraren ger exempel på hur eleverna kan använda olika material, eleverna känner då igen olika objekt men vet inget om dess egenskaper. Den andra nivån *analys* handlar om att eleverna vet något om ett objekts egenskaper, det vet de också då de övergår till att rita objekt och ger skriftliga förklaringar. Den tredje nivån är *abstraktion* som är densamma i lärarens ordning av aktiviteter, eleven kan tänka på ett objekt mer abstrakt. För att få en god övergång mellan nivåerna kan olika faser användas i undervisningen (Hedrén, 1992). Den första fasen handlar om att eleven observerar och ställer frågor. Läraren informerar och hjälper eleverna att få den kunskap som är nödvändig för tillfället. Denna fas kan jämföras med att läraren måste visa hur vissa material ska användas för att eleverna sedan ska kunna använda dem på rätt sätt. I de tidiga skolåren används material genom exempel från läraren (D'Angelo & Ilviev 2012). Den fjärde fasen som van Hiele kom fram till handlar om att få mer komplicerade uppgifter (Hedrén, 1992). Detta kan liknas med att eleverna först använder material, sedan ritat bilder, använder skriftliga förklaringar och slutligen ser ett begrepp som abstrakt (D'Angelo & Ilviev 2012). Skriftliga förklaringar och att se begrepp som abstrakt kan då kopplas till att få mer komplicerade uppgifter.

I resultatet finns exempel på hur man kan arbeta med olika material i matematikundervisningen. Den första frågeställningen kan därmed ses som besvarad, eftersom det visar hur praktisk matematik kan genomföras. I kapitlet Bakgrund finns inga tydliga exempel på hur praktisk

matematik kan genomföras, vilket heller inte var meningen eftersom det var själva frågeställningen.

Den andra frågeställningen handlar om praktiskt arbete ökar elevernas lärande i geometri. I resultatet finns en hel del positiva resultat kring elevernas lärande. Det handlar främst om att det hjälper elever att nå en större förståelse (D'Angelo & Ilviev 2012). Att använda olika material hjälper eleverna att förstå begrepp (Swan & Marshall 2012). Bakgrunden visar också på att det handlar om att nå en förståelse. Eleverna når en förståelse genom att göra något praktiskt (Lundegård m.fl., 2010: 30). Lärare menar också att laborativ matematik gynnar elevernas lärande (Rystedt & Trygg, 2011: 4).

Slutsats

Denna studie har till viss del givit en inblick i hur man kan arbeta praktiskt med geometri och vilken betydelse det har för elevernas lärande. Lärare förklarar starkt användningen av laborativt och konkret material. Litteraturstudien gav en positiv bild av praktisk matematik och geometri. Det hjälper eleverna att nå en större förståelse och de får en starkare grund i matematik och geometri. De artiklar som presenteras i resultatet har en liknande bild av arbetet med praktisk matematik. En annan slutsats som dras är att det finns en hel del exempel på hur arbetet med praktisk matematik och till viss del geometri kan genomföras. Studien belyser också lärarens roll i arbetet med praktisk matematik.

Fortsatt forskning

I studien tas till viss del virtuellt material upp. Det vore intressant att se om virtuellt material har samma effekt som det konkreta materialet. Fortsatt forskning skulle kunna vara en jämförelse av resultaten mellan två grupper som ägnar sig åt olika material. Den ena gruppen undervisas en tid med virtuellt material och den andra gruppen undervisas med konkret material.

Referenslista

- Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Bender, P. & Schreiber, A. (1980). The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. *Educational Studies in Mathematics*.
- Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelson, L. & Ryding, R. (2011). *Matematik ett grundämne*. Nämnaren Tema 8. NCM.
- Bergström, E. & Hallenberg E. (2014). *Laborativt material och taluppfattning – En litteraturstudie med fokus på de tidiga skolåren*. (Studentuppsats). Linköpings Universitet.
- Caswell, R. (2007). Fractions from Concrete to Abstract Using “Playdough Mathematics”. *Australien Primary Mathematics classroom 12.2*.
- Clements, D. C. & Battista, M. (1986). Geometry and Geometric Measurement. *The arithmetic teacher*. Vol 33. No 6. Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- D'Angelo, F. & Iliev, N. (2012). *Teaching Mathematics to Young Children through the Use of Concrete and Virtual Manipulatives*. Bloomsburg University of Pennsylvania. Online Submission, 11pp. Från <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED534228.pdf>
- Eriksson Barjas, K. Forsberg, C. & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Hedré, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen. I: Emanuelsson, G. Johansson, B. & Ryding, R. (red.). *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur
- Högskolan Dalarna 2014 <http://bibliotek.du.se/databaser/swe/index.php>
- Lgr 11 (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Libris(2014-05-24)
http://librishelp.libris.kb.se/help/about_libris_swe.jsp?redirected=true&pref_is_set=&textsize=&contrast=&language=se
- Lundegård, I., Wickman, P-O. & Wohlin, A. (2011). *Utombusdidaktik*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemma - hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: studentlitteratur
- Malmer, G. (2002) *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningsvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.
- Mistretta, R. & Prozio, J. A. (2000). Using Manipulatives to Show What We Know. *Teaching Children Mathematics*. Vol 7. No 1. Published by: National Council of Teachers of Mathematics.

- Nationalencyklopedin a (2014-06-15) <http://www.ne.se/geometri>
- Nationalencyklopedin b (2014-06-15) <http://www.ne.se/symmetri>
- Pettersson, A. (2003). *Baskunmande i matematik*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2011). *Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?*. Göteborgs universitet: NCM.
- Skolinspektionen (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innebåll och ändamålsenlighet*. Göteborg: NCM.
- Skolverket (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik*. Rapport 221.
- Skolverket (2011). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*. Rapport 366.
- Skolverket (2012). *TIMSS 2011- Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 380.
- Skolverket (2014). *Diamant- Nationella diagnoser i matematik*.
<http://www.skolverket.se/2.5248?hits=15&offset=16&page=search&q=geometri&search=S%C3%B6k&website>
- Summon (2014-05-24) <http://dalarna.summon.serialssolutions.com.www.bibproxy.du.se/>
- Swan, P. & Marshall, L. (2010). Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Primary Mathematics Classroom* 15.2.
- Wikipedia a (2014-06-15) <http://sv.wikipedia.org/wiki/Geometri>
- Wikipedia b (2014-06-15) http://sv.wikipedia.org/wiki/R%C3%A4t_linje
- Wikipedia c (2014-06-15) <http://sv.wikipedia.org/wiki/Punkt>