HÖGSKOLAN
DALARNA

Självständigt arbete i Matematikdidaktik

Avancerad nivå

Hur löser gymnasieelever ett rikt problem?

En undersökning om vilka uttrycksformer gymnasieelever använder när de löser ett rikt matematiskt problem

Författare: Noelle Pettersson
Handledare: Lovisa Sumpter
Examinator: Maria Bjerneby Häll
Termin: vt-13
Program: Lärarprogram
Ämne/huvudområde: Matematikdidaktik
Poäng: 15

Högskolan Dalarna
791 88 Falun
Sweden
Tel 023-77 80 00

Sammanfattning

I denna uppsats lägger jag fokus på att undersöka de olika matematiska uttrycksformer som eleverna tillämpar när de löser ett rikt problem. Svaret söks med hjälp av empirisk data. Syftet med arbetet är att undersöka hur några elever som går första året på gymnasiet löser ett rikt problem. Två grupper elever som går i två olika program deltar i undersökningen. Analysen gjordes med hjälp av ”KLAG-matrisen”, dvs. en matris som innehåller uttrycksformerna Konkret, Logisk/språklig, Algebraisk/aritmetisk samt Grafisk/geometrisk. Resultatet av litteratur- och empiristudien visar att oavsett hur eleverna uttrycker sig i sina lösningsförslag innehåller det alltid någon form av algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Detta kan bero på att det för dessa elever är lättare att kommunicera med algebraisk/aritmetisk uttrycksform än med någon annan. Resultatet visar också vikten av att använda problemlösning som ett medel i en lärandeprocess även för att utveckla andra förmågor. Eleverna har olika uppfattningar och gör olika tolkningar av problemet. De har olika förutsättningar och använder varierande lösningsmetoder. Detta skulle kunna vara en förklaring till varför deras användning av uttrycksformer är olika.

Sökord: Matematisk problemlösning, gymnasienivå, uttrycksformer.

Innehållsförteckning

Inledning

Jag har alltid varit intresserad av att lösa problem av olika former; som t.ex. sudoku och gåtor. I tidigare matematikkurser har jag läst om problemlösning. Under en av dessa kurser läste jag om rika matematiska problem. Jag fick – för första gången – i uppgift att lösa ett rikt problem på fyra olika sätt. Problemet i sig var inte svårt men att hitta fyra olika sätt att lösa det på var verkligen en utmaning för mig. Jag blev fascinerad av uppgiften. Jag var tvungen att tänka i nya banor och komma på andra sätt för att kunna använda mig av olika uttrycksformer för att lösa uppgiften. Genom att lösa detta problem känner jag att jag har blivit mer kreativ i mitt tänkande. Sedan dess har jag alltid försöka titta på olika problem från olika aspekter innan jag löser ett problem eller en uppgift.

Enligt den nya läroplanen för gymnasieskolan 2011 har problemlösning en central plats (Skolverket 2011a, s.93), detta eftersom eleverna får möjligheter att utveckla olika förmågor, som t.ex. kommunikationsförmåga. Dessutom ska undervisningen ge eleverna möjligheter att utveckla förmågan att sätta in matematiken i olika sammanhang. Eleverna ska förstå vad olika matematiska begrepp innefattar, kunna kommunicera med olika matematiska uttrycksformer och kunna tillämpa sina matematiska kunskaper för att lösa t.ex. ett problem med vardagsanknytning (Ibid., s.90).

Forskning visar vikten av problemlösning och varför elever ska lära sig problemlösning. Att enbart arbeta med rutinuppgifter kan förstöra eleverna intresse, hindra deras intellektuella utveckling och försumma deras möjligheter (Polya 1957, s.v). Problemlösning väcker intresse hos eleverna och är stimulerande. Genom problemlösning får eleverna möjlighet att använda matematik och att kunna utveckla sitt självständiga tänkande när de löser problem. Det allra viktigaste är att problemlösning ger möjligheter för eleverna att kunna förstå matematik som ämne och att upptäcka olika sidor av matematiken (Ibid., 1957 s.v-vii).

Syfte och frågeställningar

Som blivande matematiklärare är det av intresse att ta reda på elevers användning av olika matematiska uttrycksformer när det löser ett problem. Syftet i denna undersökning handlar om hur elever, som går i första året på gymnasiet, löser ett rikt matematiskt problem. Studien handlar framför allt om de olika matematiska uttrycksformer som elever tillämpar när de löser ett rikt matematiskt problem.

Den övergripande frågan är 'Hur löser gymnasieelever ett rikt problem?' och mer specifikt 'Vilka uttrycksformer använder gymnasieelever när de löser ett rikt matematiskt problem?'.

Bakgrund

I detta kapitel behandlas styrdokument i matematik för gymnasieskolan, forskning och annan litteratur om problemlösning. Koppling mellan problemlösning och olika matematiska förmågor tas upp särskilt.

Vad är problemlösning?

Många forskare har skrivit om problemlösning. Framförallt har det varit många diskussioner om matematikundervisning som har koppling till problemlösning (Lester & Lambdin 2007, s.100). Enligt Schoenfeld (1992) har problemlösning åtskilliga betydelser och har använts inom många olika områden; därför är det svårt att definiera begreppet problemlösning:

> Problem solving has been used with multiple meanings that range from "working rote exercises" to "doing mathematics as a professional;" /…/ which make it difficult to use as a concept. (s. 2)

Polya beskriver t.ex. problemlösning som en praktisk verksamhet:

> Problem solving is a practical skill like, let us say swimming. We acquire any practical skill by imitation and practice. (1957, s. 4)

Lester och Lambdin (2007, s.98) beskriver problemlösning som ”aktivitet som kommer efter att eleverna studerat begrepp och färdigheter.” och ”betraktas som ett hjälpmedel för att utveckla nya kunskaper i matematik.” Denna beskrivning är lik Skolverkets formulering, ”problemlösning ses som ett *medel* för att utveckla övriga matematiska förmågor” (Skolverket 2012, s.2).

Taflin (2007) sammanfattar problemlösning som en process ”att kunna lösa det genom att välja lämplig matematik och lämpliga metoder för att slutligen nå ett bestämt mål. Dessa verktyg kan vara val av räknesätt men också olika representationsformer som t.ex. att rita, skriva med vanliga ord, arbeta konkret eller använda sig av matematiska symboler” (s.36). Det innebär att ”individen ska vilja finna en lösning och vilja anstränga sig samt inte ha en given lösningsmetod” (s.37).

Styrdokument om matematiska förmågor och problemlösning

Målen i matematikämnesplanen kan uttryckas i sju matematiska förmågor: begreppsförmåga, procedurförmåga, problemlösningsförmåga, modelleringsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga samt relevansförmåga (Skolverket 2012, s.1). I undervisningen ska eleverna få möjlighet att utveckla problemlösningsförmågan med hjälp av olika metoder och strategier (Skolverket 2011a, s.90). Med andra ord menar man att eleverna antingen skriftligt eller muntligt ska kunna forma sitt tänkande och argumentera för sitt val av metod och lösningsförslag. Eleverna ska ”analysera och tolka problem vilket inkluderar ett medvetet användande av problemlösningsstrategier som att till exempel förenkla problemet, införa lämpliga beteckningar, ändra förutsättningarna” (Ibid., s. 2).

Tidigare har undervisningen i matematik lagt fokus på att utveckla färdigheter genom olika rutinuppgifter som t.ex. att utföra beräkningar, förenkla algebraiska uttryck och lösa ekvationer. I de senaste läroplanerna har problemlösningsförmåga fått betydligt större fokus i undervisningen i matematik (Skolverket 2003, s.11). Enligt det nya läroplanen för gymnasieskolan 2011 har problemlösning en betydande roll och ingår som en av de centrala delarna i ämnet matematik. Detta för att ”problemlösning ses som ett *medel* för att utveckla övriga matematiska förmågor” (Skolverket 2012, s.2).

Ett av ämnets syften är att eleverna ska kunna arbeta matematiskt. Men vad innebär det egentligen att kunna arbeta matematiskt? ”Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer” (Skolverket 2011a, s.90). Dessutom ska undervisningen ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Eleverna ska få utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär i matematikundervisningen. Ett utdrag från kursplan (Skolverket 2011a, s.93) om vad som ska behandlas i centralt innehåll, problemlösning för Matematik 1a, är följande:

- Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- Hur matematiken kan användas som verktyg i behandlingen av omfångsrika problemsituationer i karaktärsämnena. Matematikens möjligheter och begränsningar i dessa situationer.
- Matematiska problem av betydelse för privatekonomi, samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Forskning och annan litteratur om matematiska förmågor och problemlösning

Enligt Niss (2002, s.7-9) finns det åtta matematiska förmågor eller kompetenser. Även om dessa åtta kompetenser hänger samman med varandra, kan de dock delas i två olika grupper. De första fyra kompetenserna handlar om förmåga att kunna tänka matematiskt; formulera/lösa båda rena matematiska problem och tillämpa matematik i en verklig situation; genomföra matematisk modellering som t.ex. i problemlösning; och att resonera matematiskt.

> The first group of competencies are to do with the ability to ask and answer questions in and with mathematics:
> - Thinking mathematically
> - Posing and solving mathematical problems
> - Modelling mathematically
> - Reasoning mathematically.
>
> (Niss 2002, s. 7)

De fyra andra kompetenserna handlar om förmåga att hantera matematiskt språk och matematiska verktyg. Det vill säga förmågan att kunna använda/växla och förstå relationen mellan olika matematiskuttrycksformer; att kunna hantera/översätta matematiska symboler; att kunna förstå/uttrycka sig matematiskt med hjälp av olika matematiska uttrycksformer; samt att kunna hantera/använda olika verktyg och hjälpmedel i matematik.

> The other group of competencies are to do with the ability to deal with and manage mathematical language and tools:
> - Representing mathematical entities (objects and situations)
> - Handling mathematical symbols and formalisms
> - Communicating in, with, and about mathematics
> - Making use of aids and tools (IT included).
>
> (Niss 2002, s. 8-9)

Även om matematiska kunskaper inte alltid behöver ”kopplas ihop med företeelser i vardagslivet” (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005 s. 37) krävs det en variation av olika matematiska aktiviteter, t.ex. genom problemlösning. Annars är det omöjligt att ha ett arbetssätt för att uppnå alla kompetenser. “A Mathematical competency is activated in situation which contain actual or potential mathematical challenges“ (Niss 2002, s.10). Men hur? Jo, då när vi löser problem upptäcker vi olika sidor av matematiken. Det finns två sidor av matematik: en systematisk, deduktiv vetenskap och en experimentell, induktiv vetenskap, som Polya (1957) understryker.

> Mathematics presented in the Euclidean way appears as a systematic, deductive science; but mathematics in the making appears as an experimental, inductive science. (Polya 1957, s.vii)

Vad menas med att ha problemlösningsförmåga? Med problemlösningsförmåga ”menas att kunna lösa uppgifter där uppgiftslösaren inte har någon färdig lösningsmetod tillgänglig innan uppgiftslösningen börjar” (Bergqvist et al., 2009, s.9). En annan definition, enligt Niss (2002), om problemlösningsförmåga är att problemlösare har förmåga att identifiera/framställa olika variationer av problem och kan lösa olika typer av problem på olika sätt:

- identifying, posing, and specifying different kinds of mathematical problems – pure or applied; open-ended or closed;
- solving different kinds of mathematical problems (pure or applied, open-ended or closed), whether posed by others or by oneself, and, if appropriate, in different ways. (Niss 2002, s. 7)

Problemlösning ses som ett ”medel” (Skolverket 2012, s. 98; Lester 2007, s. 98) för att eleverna ska kunna utveckla andra förmågor. Enligt Silver och Smith (2002) kan problemlösning t.ex. utveckla elevernas kommunikationsförmåga. Detta då problemlösning kräver ”motiveringar och inte bara svar” (Silver & Smith 2002, s. 42). Genom problemlösning får eleverna möjlighet att muntligt eller skriftligt argumentera för sina lösningsförslag. Det innebär att man ska kunna genomföra ett resonemang ”där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt. Det ingår att värdera både resonemanget och resultatet” (Skolverket 2012, s. 2).

Detta medför att eleverna genom problemlösning får möjligheter att antingen muntligt eller skriftligt utveckla sin resonemangsförmåga genom att kommunicera med olika uttrycks-former. ”När man löser ett problem, kan de begrepp och procedur som kommer till användning representeras på olika sätt” (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005 s. 32). Olika matematiska uttrycksformer används för att kommunicera kring olika matematiska begrepp. Detta medför också att eleverna genom problemlösning får möjligheter att utveckla sin begreppsförmåga.

Eleverna analyserar och använder olika matematisk formulering när de beskriver en företeelse utifrån ett verkligt problem eller en situation. ”Matematisk modellering är när man med hjälp av matematik försöker beskriva ett fenomen som till en början inte nödvändigtvis är beskrivet i matematiska termer” (NCM, 2010). Det innebär att man med problemlösning - utifrån en verklig situation - via kommunikation utvecklar elevernas modelleringsförmåga.

Enligt Hagland, Hedrén och Taflin (2005) kan problemlösning ge ”eleverna motivation och möjligheter att bygga upp och utvidga sina kunskaper i matematik.” (s. 7) För elevernas som har lyckats hitta egna lösningsmetoder medför detta naturligtvis att deras självförtroende stärks. Enligt Polya (1957) behöver problemet i sig inte vara stort, men det ska skapa nyfikenhet hos eleverna så att de vill sätta igång och arbeta med det. Om man löser problem utan hjälp, kan man dessutom uppleva den spänning och triumf som är kännetecknande för varje ny upptäckt.

> Your problem may be modest; but if it challenges your curiosity and brings into play your inventive faculties, and if you solve it by your own means, you may experience the tension and enjoy the triumph of discovery. (Polya 1957, s. v)

Om en elev löser ett problem med hjälp av tydligt resonemang och korrekt resultat så ingår i detta både värdering av resonemanget och resultatet. Detta medför att varje elev får möjligheter att utveckla både procedurförmåga och relevansförmåga.

> Ibland behöver man utföra olika procedurer. I problemlösning ingår också att själv och i samspel med andra aktivt kunna formulera och uppmärksamma egna relevanta matematiska problem och vidareutveckla andras. (Skolverket 2012, s. 2)

Hagland, Hedrén och Taflin (2005) menar också att både eleverna och läraren behöver ett varierande arbetsätt och att problemlösning kan fungera som en omväxling i undervisningen. Samtidigt kan läraren under lektionerna få reda på vad eleverna kan och inte kan. Genom att lösa problem kan eleverna också utveckla sin förmåga att tänka kreativt och självständigt; även elevens lust att arbeta med matematik kan enligt författarna öka (2005 s.13). Detta kan vara en anledning till varför problemlösning ”uppskattas av många elever” och många ”har önskat mer av” (Skolverket 2003, s. 24). Men det finns bakomliggande förklaringar till varför en elev har lyckats eller misslyckats att lösa ett problem; bl.a. vad det gäller problemlösningsstrategier och kunskap. Enligt Schoenfeld (2012) finns det fyra företeelser som kan vara avgörande för problemlösningsförmågan.

> ... it is possible to explain someone's success and failure in trying to solve problems on the basis of four things:
> - Knowledge (or more broadly, resources)
> - Problem solving strategies, also known as heuristics.
> - “Metacognition,” or “Monitoring and self-regulation”
> - Beliefs
>
> Schoenfeld (2012, s. 3-4)

Som framgår av citatet är kunskap och resurser, problemlösningsstrategier, metakognition samt föreställningar avgörande för om någon lyckas eller misslyckas med att lösa problem.

Att lösa problem

Polya (1957, s. 5) beskriver problemlösningsprocessen i fyra faser. Detta är en generell beskrivning (som inte enbart gäller matematik) av lösningsprocessen.

- Understanding the problem - Att förstå problemet
- Devising a plan - Att göra upp en plan
- Carrying out the plan - Att genomföra planen
- Looking back - Att se tillbaka

Lester (1996) har en annan beskrivning som är speciell för matematiska problem. Han beskriver tankeprocesser i problemlösning enligt följande:

1) Förstå/formulera frågan i problemet/situationen.
2) Förstå villkoren och variablerna i problemet.
3) Välja/finna data som behövs för att lösa problemet.
4) Formulera delproblem och välja lämpliga lösningsstrategier.
5) Använda lösningsstrategi korrekt och nå delmål.
6) Ge svar i termer av de data som ges i problemet.
7) Värdera rimligheten i svaret.
8) Göra lämpliga generaliseringar.
   (efter Lester, 1996, s. 89)

Dessa två beskrivningar har likheter. Polyas beskrivning är allmän och Lesters beskrivning är mer ingående och detaljerad för just matematiska problem. Att förstå problem är viktigt. Det handlar om att problemlösaren/eleven har förstått frågan i problemet. Det är meningslöst att svara på en fråga som man inte har förstått.

> It is foolish to answer a question that you do not understand. It is sad to work for an end that you do not desire. (Polya 1957, s. 6)

Förstår man inte frågan kan man inte veta vad det är man ska söka svar på. Det är svårt att hitta en god anledning att ens försöka lösa problemet. Att ha förstått frågan innebär att man vet vad det är som saknas och söks. ”En kompetens vid problemlösning är att den som ska lösa problemet måste ha förmåga att tolka problemet och veta vad som ska lösas” (Taflin 2007, s. 11). Man tar hänsyn till t.ex. vilka villkor som gäller, vilken information eller data som är givna i frågan. Enligt Lester (2007), medför förståelse att motivationen och viljan hos eleven ökar. Eleven vill därmed lära sig mer och ”en inre önskan att fördjupa förståelsen” (s. 98) skapas. Tvärtom är det om eleven inte förstår; då uppstår det frustration vilket kan påverka engagemanget och lusten hos eleven.

Den första fasen i problemlösningsprocessen påverkar hur eleven ska ta sig genom den andra fasen. Detta då den andra fasen handlar om att komma på en idé för att kunna göra en plan, en lösningsmetod. Om man inte har förståelsen, kan man inte skapa förutsättningar för djupare insikt. När vi ställs inför ett matematiskt problem, försöker vi använda och utnyttja de idéer, begrepp och lösningsmetoder som vi använt oss av tidigare (Lester 2007, s.98). Detta innebär att man analyserar med hjälp av tidigare erfarenheter och kunskaper för att söka sambandet mellan den givna informationen. Man tar hänsyn till villkoren för att komma på idéer och metoder som kan leda till en giltig lösning och korrekt resultat. För att lösa ett problem behöver vi ha en viss mängd tidigare förvärvade kunskaper (Polya 1957, s.150).

Vilken lösningsmetod eleverna väljer kan variera – eftersom den är beroende på vilka tidigare erfarenheter och kunskaper eleverna har. Om eleven har begränsad erfarenhet, blir valet naturligtvis ensidigt och eleven kan uppleva problemlösning som svårt.

En orsak till varför elever har svårt för problemlösning är enligt Lester (1996) att de inte har fått lära sig använda speciella problemlösningsstrategier. ”Många elever får bara undervisning om en strategi” (s. 88). På detta sätt kan eleven få uppfattningen att det endast finns ett korrekt sätt för att lösa problemet. Det är viktigt att undervisa eleverna i varierande metoder att lösa en problemtyp. Om elever får träna i att välja metod, t.ex. rita en bild, lösa med ekvation, etc., kan de sedan söka alternativa lösningsstrategier istället för att lägga ”ner all sin kraft” (Taflin 2007, s. 63) på att lösa problemet med hjälp av *en* metod.

Elevens ”humör” spelar också en viss roll när han eller hon ska lösa ett givet problem. Den vanligaste orsaken till varför en elev gör oförklarliga misstag eller inte kommer någon vart är för att eleven inte har lust att varken förstå eller lösa problemet.

> When a student makes really silly blunders or is exasperatingly slow, the trouble is almost always the same; he has no desire at all to solve the problem, even no desire to understand it properly, and so he has not understood it. (Polya 1957, s. 94)

Lärare påverkar elevernas val av lösningsmetod. Om t.ex. läraren ger eleverna olika förslag vid presentation av problemet eller har med sig hjälpmedel som t.ex. sax och papper, kan det indirekt påverka elevens val av lösningsmetod (Taflin 2007, s. 151).

När eleven väl har bestämt lösningsmetod i fas två fortsätter han/hon att hantera problemet. Detta sker under tredje fasen. Under den tredje fasen kontrollerar eleven varje steg som tas under problemlösningen. Eleven redovisar lösningen steg för steg med hjälp av olika uttrycksformer för att så småningom komma fram till sin lösning.

Den fjärde och sista fasen: att titta tillbaka betyder att eleven i fråga granskar lösningen till problemet. Detta innebär att man tittar tillbaka för att analysera och kontrollera de steg man tagit samt även då själva resultatet. Man värderar rimligheten i resultatet. Det är under denna fas eleven utvecklar sin problemlösningsförmåga (Polya 1957, s. 36).

Definitioner

Här presenteras några definitioner - från olika källor - som har anknytning till problemlösning i ämnet matematik.

Problem

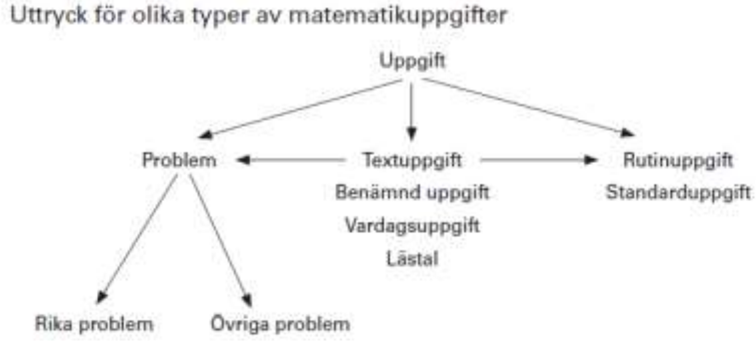
Skolverket (2012) beskriver ett problem som en uppgift som inte är av normaltyp och kan lösas med hjälp av bestämda regler. Detta innebär också att eleven som ska lösa ett problem inte känner till någon lösningsmetod på förhand. Definition enligt Skolverket:

> Ett problem är en uppgift som inte är av standardkaraktär och kan lösas på rutin. Det innebär att varje frågeställning där det inte på förhand för eleven finns en känd lösningsmetod kan ses som ett problem. (Skolverket 2012, s. 2)

Dessutom ska problemen innehålla många kvalitativa nivåer. Problemet ska ge en utmaning och det ska vara oberoende av elevens kunskapsnivå. Ett sådant problem medför ”att alla elever oberoende av kunskapsnivå, har möjlighet att utmanas och utveckla sina matematikkunskaper” (Skolverket 2012, s. 2) i undervisningen.

Enligt Lester (2007) är ett problem ”en situation som skapar mental obalans, förvirring etc. – man vet inte vad man ska göra. /.../ individer som ställs inför problem tvingas in i ett mentalt tillstånd där de behöver förstå hur man kan koppla ihop olika slag av kunnande” (s. 98).

Enligt Taflin (2007, s. 30) finns det olika uttryck för olika typer av problem. Figuren nedan visar skillnaden mellan olika typer av matematikuppgifter.



Figur 1. Skillnaden mellan olika typer av matematikproblem (Taflin 2007, s. 30)

Rika problem

Rika problem är skilda från andra problem och ska uppfylla följande kriterier (Taflin 2007, s. 56):

- Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
- Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
- Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
- Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
- Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
- Problemet ska kunna fungera som brobyggare.
- Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Uttrycksformer/representationer

Matematiska uttrycksformer och representationer är två viktiga begrepp i ämnesplanen för matematik. Enligt Skolverket (2011a s. 90-91) ska undervisningen ge eleverna möjlighet att bl.a.

- kommunicera med olika uttrycksformer
- beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen
- kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling

Ofta låter vi de två begreppen, matematiska uttrycksformer och representationer, stå för samma sak trots att man kan skilja dem åt. Av denna anledning har författarna Gustafsson m.fl. (2011, s. 38) diskuterat just dessa två begrepp. Författarna enas om att det är enklast att låta uttrycksformer och representationer få stå för samma sak eftersom båda begreppen ”går naturligt in i varandra och det är i många fall enklare att tänka på dem som ett begrepp med både innehåll och form. Oavsett vilket synsätt vi har så är representationer och uttrycksformer till för att vi skall få möjligheter att tänka på, använda och kommunicera matematiska begrepp på olika sätt.” (Ibid., s. 38)

Det matematiska språket har olika uttrycksformer. Dessa behövs för att man ska kunna beskriva implikationen av vad de olika matematiska begreppen representerar. Vi kan alltså förklara definitioner, egenskaper och relationer hos begrepp med hjälp av konkreta medel, verbala ord, symboler, grafer/bilder och tabeller. Matematiken har genom åren utvecklat ett eget symbolspråk (Mouwitz, 2004). De matematiska tecknen symboliserar begrepp som gör att symbolspråket i hög grad blir internationellt. Med symbolspråk som ett kommunikationsverktyg görs det möjligt för oss att uttrycka idéer och matematiska tankar; något som annars skulle ha varit omöjligt.

> Från början var all matematisk text retorisk; den skrevs med vanligt skriftspråk och ofta i jag-form. Under renässansen började italienska matematiker använda förkortningar, vilket sedan spreds. Det finns flera skäl till att symbolspråket vunnit hävd. Från början var det kanske framför allt tidsbesparande. Numer finns ett annat och mycket starkare motiv, nämligen att det är tankekraftsbesparande. (Mouwitz 2004, s. 34)

Gustavsson m.fl. (2011) skriver också: ”den som har tillgång till flera olika representationer för att beskriva samma matematiska begrepp har en rikare och mera funktionell begreppskunskap” (s. 36). Enligt definitionen i Gustavsson m.fl. (2011) kan matematiska begrepp uttryckas på fem olika sätt: Fysisk, verbal, symbolisk, numerisk och bildlig eller grafisk.

Enligt Hagland, Hedrén och Taflin (2005, s. 32) finns det fyra matematiska uttrycksformer KLAG. (KLAG sammanfattas med hjälp av begynnelsebokstäverna).

- Konkret uttrycksform – där eleven sorterar något slag av materiel för att lösa uppgiften. Ett exempel på detta är att klippa papper.
- Logisk/språklig uttrycksform – där eleven enbart förklarar med hjälp av språket. Som t.ex. då eleven beskriver sin förklaring till uppgiften med hjälp av ord utan att använda några förkortade ord eller matematiska symboler.
- Algebraisk/aritmetisk uttrycksform – där eleven t.ex. använder sig av matematiska symboler (bokstäver/förkortade ord)
- Grafisk/geometrisk uttrycksform – där eleven redovisar lösningen i form av att t.ex. rita bilder, grafer eller göra en tabell.

Dessutom tillägger författarna att det är viktigt att eleverna växlar mellan dessa uttrycksformer därför att det är ”viktigt att uttrycksformer fungerar som redskap och stimulans för tankearbete och kommunikation” (Ibid., s. 33). I detta arbete väljer jag att definiera uttrycksformer enligt Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Empirisk studie

Ordet empirisk definieras som ”grundad på erfarenheten” (Kiselman & Mouwitz 2008, s.129). Det innebär att ”vi får kunskap genom våra sinnen och vår erfarenhet” (Patel & Davidson 2003, s.17). Undersökningens två frågeställningar är: Hur löser gymnasieelever ett rikt problem? Vilka uttrycksformer använder gymnasieelever när de löser ett rikt matematisk problem?. Svaret söks med hjälp av empiriska data. Fokus kommer att läggas på uttrycksformer i elevernas lösningar av problemet.

Metod

Två grupper av elever som går första året på gymnasiet tilldelas ett rikt problem att lösa en och en. Eleverna går på samma gymnasium men läser olika program och har olika lärare. Elevernas lösningar samlades in, sorterades och analyserades med utgångspunkt från undersökningens frågeställningar.

Urval och avgränsning

Undersökningen gjordes i en ort i Västsverige. Eleverna går första året i olika program på samma gymnasium. Eleverna har läst minst en termin matematik 1. Den ena gruppen elever är från yrkesprogram (Barn- och fritidsprogrammet) och den andra gruppen från högskoleförberedande program (Naturvetenskapsprogrammet). Detta urval gjordes för att ha en heterogen respondent-grupp. Syftet med undersökningen är inte att påvisa skillnader mellan dessa grupper utan urvalet gjordes för att få en rikare datamängd. Enligt läroplanen ska eleverna dessutom kunna ”använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. /.../ utveckla att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang” (Skolverket 2011a, s.90) oavsett vilket utbildningsval eleverna har.

Sammanlagt har 52 elever var närvarande vid undersökningstillfällena. Det blev 26 elever från varje grupp. Av dessa togs sex bort då de inte skrev något alls på det papper de fick, varav följer att det fanns det 46 lösningsförslag som ingår i analysen.

Val av problem

Det finns många typer av rika problem. En del problem innehåller en algebraisk cykel eller generalisering och kräver matematiska kunskaper som t.ex. att eleverna ska känna till en viss formel. Problemet "Klippa gräs" (Fig. 2) kan lösas med alla fyra olika uttrycksformer enligt boken Rika matematiska problem (Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s.123-124) och innehåller inte algebraisk cykel eller kräver att eleverna ska känna till någon formel för att kunna lösa det.

Klippa gräs

(Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s. 123)

Jenny klipper gräsmattan hos Bosse på 2 timmar.

Mona gör det på 4 timmar.

a) Hur lång tid tar det om de hjälps åt?

b) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Figur 2. Klippa gräs

Problemet "Klippa gräs" valdes eftersom det är lätt att förstå innebörden (att hjälpas åt) samt att problemet kan lösas på många olika sätt vilket erbjuder till att både flera strategier och uttrycksformer kan användas. Denna typ av problem har funnits i flera tusen år (Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s. 124). Det handlar ofta om att några personer ska utföra ett arbete tillsammans. Eleverna får information om hur lång tid det tar för varje person som ska klippa gräs. De ska ta reda på hur lång tid det tar om personerna hjälps åt. Formuleringen av frågan har inte ändrats eftersom originalformuleringen är lätt att förstå och inte innehåller för mycket text.

Enligt kriterierna, ska ett rikt problem vara lätt att förstå och utgångspunkten är att alla elever ska ha möjlighet att arbeta med problemet. Enligt Hagland, Hedrén och Taflin (2005) kan man också behöva förtydliga att Jenny och Mona "inte klipper var sin halva av gräsmattan utan att de arbetar med var sin gräsklippare exakt lika länge" (Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s.124). Originalbilden från boken förtydligar villkoren för frågorna. Med hjälp av bilden minskar risken för att eleverna ska missuppfatta och tro t.ex. att Jenny och Mona ska klippa varsin bit en i taget med en gräsklippare (Ibid., s.124).

De matematiska kunskaper som eleverna kan använda sig av och utveckla under lösningen av problemet är t.ex. tal i bråkform, enhetsbyte, proportionalitet, tabell, area och ekvation. Dessa matematiska kunskaper ingår redan i de centrala innehåller för ämnet under årskurs 7-9 (Skolverket 2011b, s. 65-67). Det övergripande kunskapsmålet efter årskurs 9 är bl.a. att eleverna "kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet" och "kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt" (Skolverket 2011b, s.13). Dessutom har eleverna som ska lösa problemet läst minst en termin matematik 1. En följdfråga delades ut när eleverna var klara med själva problemet. Syftet med frågan var att eleverna skulle få möjligheter att argumentera för den valda strategin och berätta hur de tänkte.

> Tack för att du ville delta! Nu är det bara en fråga kvar.
> Beskriv hur du har tänkt och varför du valde den strategi du gjorde?
> Argumentera för ditt val av strategi!

Genomförande

När problemet var bestämt, förberedde jag ett missivbrev (Bilaga 1). Jag tog kontakt med skolans VFU-samordnare via telefon och via e-mejl. Jag bifogade missivbrev samt en kopia av problemet via e-mejl. Det fanns två tillgängliga grupper. Jag fick låna två grupper elever som läser två olika program för att genomföra den empiriska studien. Varje elevgrupp fick jag disponera under en matematiklektion som var ca en timme lång. Någon pilotstudie kunde inte genomföras på grund av tidsbrist och dessutom är problemet väl beprövat i tidigare forskning (Hagland, Hedrén & Taflin 2005).

Alla elever informerades tydligt om att undersökningen var helt anonym och att deltagande var helt frivilligt. En kort muntlig introduktion gjordes i samband med att problemet delades ut. Alla elever fick hela lektionstiden på sig att lösa problemet och de fick lösa problemet och svara på följfrågan utan någon specifik tidsram. Alla lösningar och svaret till följdfrågan samlades in innan lektionen avslutades. Båda grupperna av elever uppmanades att ställa frågor om något uppfattades som oklart med problemet som de skulle lösa. Trots detta ställde ingen någon fråga under någon av lektionerna.

Forskningsetiska principer

Denna undersökning gjordes enligt Forskningsetiska anvisningar för examens- och uppsatsarbeten vid Högskolan Dalarna (2008). Egen etisk granskning gjordes enligt anvisningen och det visades att ingen etisk ansökan behövdes (Ibid., s.3). Skolan och lärare informerades via missivbrev. Alla elever som deltog i undersökningen informerades tydligt muntligt om arbetets syfte samt att deras deltagande var helt anonymt och frivilligt. Samtliga elever var över 15 år varför ingen begäran om målsmans samtycke behövdes (Ibid., s.2).

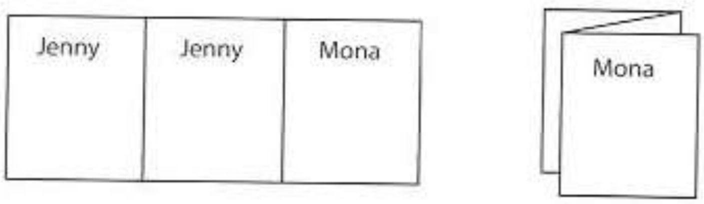
Analysmetod
Lösningarna som samlades in sorterades – utifrån syfte och frågeställningar – ett antal gånger innan analysen. Genom sorteringen upptäcktes att data var tillräckliga för att analyseras med fokus på uppgift a. Däremot hade mer än 25 procent av eleverna inte påbörjat uppgift b och av de som påbörjat uppgift b hade inte alla löst den helt. Eftersom syftet i denna studie främst är att undersöka elevernas användning av matematiska uttrycksformer analyserades därför data enbart utifrån uppgift a.

Analysen av data är gjord enligt KLAG-matrisen. Innan analysen genomfördes, sorterades data för att separera användbara och oanvändbara data. Därefter sorterades data mer noggrant med hjälp av några frågor. Dessa frågor ställdes för att sortera matematiska uttrycksformer:

- Finns matematiska uttrycksformer med i lösningen? Och i så fall vilka? Dessa sorterades enligt KLAG-matrisen.
- Hur kombinerar eleverna uttrycksformer i sina lösningar?

Här presenteras hur lösningen till problemet kan se ut enligt KLAG-matrisen.

Konkret uttrycksform - Man använder konkret material som t.ex. att man klipper ut en rektangel som får föreställa gräsmattan. Eftersom Jenny är dubbelt så snabb, klipper hon dubbelt så mycket som Mona på samma tid.



När Jenny och Mona hjälps åt tar det alltså bara $\frac{1}{3}$ så lång tid som när Mona klipper själv eller

$\frac{4}{3}$ h $= 1\frac{1}{3}$ h $=$ 1 h 20 min

Figur 3. Klippa gräs, konkret uttrycksform (Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s. 127)

Logisk/språklig uttrycksform
Efter en timma har Jenny klippt halva gräsmattan och Mona en fjärdedel. Tillsammans klipper de en trefjärdedel av hela gräsmattan på en timma. Det betyder att tillsammans klipper de en fjärdedel av gräsmattan på tjugo minuter. Sammanlagt tar det en timma och tjugo minuter att klippa gräsmattan om de hjälps åt.

Algebraisk/aritmetisk uttrycksform

Jenny : 2 timmar

Mona : 4 timmar

På en timma klipper de ¾

$$\frac{3}{4} : 1$$

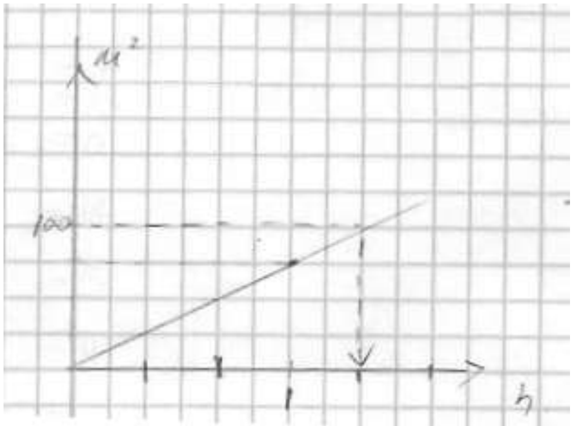
$$1 : x$$

$$x = \frac{4}{3} h$$

Svar: 4/3 h = 1h 20min

Grafisk/geometrisk uttrycksform

Efter en timma har Jenny klippt halva och Mona en fjärdedel gräsmattan. De klipper ¾ delar av gräsmattan på en timme. Man kan rita en graf och läsa av att de klipper hela gräsmattan på 1 timma och 20 minuter. $y = 75$ när $x = 1$. Antar att gräsmattan är $100m^2$, där $y = m^2$ (gräsmattans area) och $x = h$ (tid).



Svar: 1 timma och 20 minuter.

Figur 4. Klippa gräs, grafisk uttrycksform (egen figur)

Resultat

Elevernas lösningar sorterades och analyserades utifrån studiens syfte och frågeställningar med hjälp av de frågor som redovisats i tidigare avsnitt: Finns matematiska uttrycksformer med i lösningen? Och i så fall vilka? Hur kombinerar eleverna uttrycksformer i sina lösningar? Elevernas lösningar sorterades enligt KLAG-matrisen. Eleverna har olika uppfattningar om problemets villkor, därför delades elevlösningarna i grupperna A och B. Först presenteras elevlösningar från Grupp A och sedan elevlösningar Grupp B. Därefter redovisas några tabeller för att visa antal deltagande i analysen och sammanfattning utifrån olika grupper.

Grupp A - lösningar med orimligt, otydligt eller inget villkor alls

Sammanlagt var det 16 lösningar till problemet ”Klippa gräs” (Figur 2) där villkoret till lösningen är orimligt, otydligt eller inget alls trots att eleverna uppmanades att argumentera för sina lösningsförslag. Tre av dessa lösningar argumenteras inte alls; eleven svarar enbart ”3 tim”, ”3 timmar” eller något liknande. Några av elevernas argument för sina lösningar redovisas här nedan:

1. ... för det blir ju halva tiden var och då blir det 6/2=3
2. Jag tänkte att dem var två så jag delade bara på timmarna som det tog för dem.
3. Jag adderade Jennys och Monas timmar tillsammans och sedan dividerade jag med 2 eftersom att det var två personer som det handlade om. Det är så som jag har lärt mig och tror att det blev rätt.
4. Jag räknade ut timmarna och plussade sen tog jag svaret dividerat med 2 så fick jag svaret.
5. Jag tänkte att om de hjälps åt så borde det gå dubbelt så snabbt och då leder det till att båda klippningarna halveras. Det blir då 4/2 och 2/2 = 2 + 1 timmar är lika med 3 timmar.
6. Jag valde att dela mina svar i 4 med 2 för att sen lägga ihop svaren. Dock tror jag inte att detta var det rätta sättet att lösa frågan/problemet.
7. Jag tänkte eftersom man är 2 så blir ju tiden hälften av vaderas tid och då blir det ju 3 timmar.
8. Jag la ihop 4 +2 och delade det på hur många dom va som skulle göra det.

Kommentarer: Talen togs direkt ur problemformuleringen och eleverna försöker lös uppgiften utan att ha några tydlig eller rimlig villkor; precis som en rutinuppgift ur läroboken. Det finns en elev (6) som var tveksam till om svaret var korrekt.

Grupp B - lösningar med tydligt villkor

Det finns två korrekta svar till problemet beroende på elevernas egna tolkningar av villkor för att lösa problemet. Villkor I – Jenny och Mona ska klippa gräsmattan samtidigt med två gräsklippare. Villkor II – Jenny och Mona ska klippa hälften av gräsmattan var. Tabell 1 visar en sammanfattning av lösningar för dessa två.

Tabell 1. *Översikt av elevers typ av lösningar utifrån villkor.*

	Villkor I (två gräsklippare)	**Villkor II** (hälften var)
Löste uppgift a med korrekt svar	11	8
Löste uppgift a med rimligt uppskattning som svar	6	-
Löste uppgift a med fel svar	3	2
Totalt	**20**	**10**

Kommentarer: Tabellen visar att 11 av elevlösningarna där villkor I använts har gett korrekt svar. Nästan alla elever som använder villkor II, 8 av 10, har svarat korrekt. Tabellen visar också att 11 (6 + 3 + 2) av de 30 eleverna i denna grupp inte har besvarat uppgiften med det exakt sökta svaret. Nästan hälften av eleverna som använder villkor I har inte löst uppgiften med ett korrekt svar.

Uttrycksformer

Tabell 2 redovisar alla möjliga uttrycksformer som förekommer i elevernas lösningar:

- Logisk/språklig uttrycksform – där eleven enbart förklarar med hjälp av språket. Som t.ex. då eleven beskriver sin förklaring till uppgiften med hjälp av ord utan att använda några förkortade ord eller matematiska symboler.
- Algebraisk/aritmetisk uttrycksform – där eleven t.ex. använder sig av matematiska symboler (bokstäver/förkortade ord)
- Grafisk/geometrisk uttrycksform – där eleven redovisar lösningen i form av att t.ex. rita bilder, grafer eller göra en tabell.

Tabell 2. *Översikt av elevers typ av lösningar utifrån uttryckformer.*

Uttrycksformer	**Antal lösningar villkor I**	**Antal lösningar villkor II**	**Sammanlagt**
Algebraisk/aritmetisk	2	1	3
Algebraisk/aritmetisk och Logisk/språklig	7	5	12
Algebraisk/aritmetisk och Grafisk/geometrisk	4	3	7
Algebraisk/aritmetisk och Logisk/språklig och Grafisk/geometrisk	7	1	8
Sammanlagt	**20**	**10**	**30**

Kommentar: Det finns ingen lösning som uttrycks enbart med hjälp av konkret uttrycksform, logisk/språklig uttrycksform eller grafisk/geometrisk uttrycksform. Däremot finns det tre lösningar som utrycks enbart med hjälp av algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Majoriteten av lösningarna uttrycks med en kombination av minst två olika uttrycksformer. Det vanligaste alternativet är en kombination av logisk/språklig och algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Alla lösningar innehåller någon form av algebraisk/ aritmetisk uttrycksform.

Olika uttrycksformer ur några lösningar

Här presenterar några exempel på lösningar där de olika uttrycksformerna som redovisats i Tabell 2 förekommer. En del av lösningarna skannades och redovisas i form av bilder och en del kopierades för att visa uttrycksformerna tydligare. Dessa lösningar är valda för att eleverna tydligt har besvarat följdfrågan. Jag väljer att benämna alla elever som "han" oavsett deras verkliga kön. Jag känner ju inte heller till om det är en pojke eller en flicka som löst problemet.

Algebraisk/aritmetisk uttrycksform

Lösning 1a

$$2 \text{ tim} + 4 \text{ tim} = 6 \text{ tim}$$
$$\frac{6 \text{ tim}}{2} = 3 \text{ tim}$$

Elevens argument för lösningsstrategin:

> "Det tog 1 tim att springa och klippa halva och 2 timmar att gå och klippa halvan. Tillsammans är det 3 timmar och då är hela gräsmattan klippt."

Kommentarer: Eleven använder sig av olika symboler, tecken och förkortade ord som uttrycksformer. Han beskriver situationen och väljer först att summera de två olika tiderna - 2 timmar och 4 timmar – för att sedan dividera med två. Bilden till problemet (Figur 2) kanske har påverkat elevens uppfattning om hur arbetet ska utföras. Den ena ska "springa" och den andra ska "gå" när de klipper gräsmattan. Eleven väljer att arbeta med flera operationer.

Lösning 1b

$$0{,}5/\text{h} \qquad 0{,}25/\text{h}$$
$$1\text{h} \rightarrow 0{,}75 = 75\ \%$$
$$60 = 75\ \%$$
$$\frac{60}{3} = \frac{75}{3}$$
$$20 = 25\ \%$$
$$25\ \% + 75\ \% = 100\ \% = \text{hela gräsmattan}$$
$$60 + 20 = 1\text{h } 20 \text{ min}$$

Elevens argument för lösningsstrategin:

> Jag tänkte först:
> Hur mycket har de gjort på 60 min? Jo, 0,5 gräsmatta + 0,25 gr...
> 0,5 + 0,25 = 0,75 = 75 %
> Sedan räknade jag därifrån ut hur mycket 100 % var.
> Om 75 % = 60 min

Kommentarer: Eleven använder sig i *Lösning 1b* av olika symboler och förkortade ord. Han använder likhetstecken på fel sätt. Han förklarar sina tankar och resonerar med en blandning av skrivna ord och symboler. Eleven väljer att arbeta med flera operationer; lösa ett enklare problem genom att hitta hur mycket som är gjort på en timme.

Logisk och Algebraisk/aritmetisk

Lösning 2a

På tiden Jenny klipper $\frac{1}{2}$, klipper Mona $\frac{1}{4}$ (1 timme)

Då återstår $\frac{1}{4}$. Jenny klipper $\frac{1}{8}$ till på 15 min. Mona klipper $\frac{1}{16}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ Det återstår $\frac{1}{16}$

Det tar 7,5 min för J att klippa $\frac{1}{32}$ och för M att klippa $\frac{1}{64}$ Det återstår $\frac{1}{64}$

Känns som att det håller på för alltid, som att det alltid finns en del kvar...

Svar: uppskattar till ca 1 h 25 min.

Elevens argument för lösningsstrategin:

Min strategi var inte särskilt bra eftersom jag inte får fram ett exakt värde.

Kommentarer: Eleven använder sig i *Lösning 2a* av olika symboler och förkortade ord. Han resonerar med en blandning av skrivna ord och symboler. Eleven är medveten om sitt val av lösningsmetod och tyckte inte att den var ”särskilt bra”. Han har verkligen ”ansträngt” sig för att lösa uppgiften. Han söker mönster för att få fram svaret men kommer inte fram till det sökta svaret utan gör istället en uppskattning.

Lösning 2b

80min. Eftersom Jenny är dubbelt så snabbt som Mona så får hon gjort 2/3 av gräsmattan på samma tid som Mona hinner klippa 1/3.

2 timmar = 120 min

$120 \cdot \frac{2}{3} = 80$

Elevens argument för lösningsstrategin:

Jag valde den eftersom den är den simplaste jag kom på.

Kommentarer: Eleven resonerar logiskt med skrivna ord. Han använder sig av olika symboler. Uttrycket ”den simplaste” antyder att eleven kan lösa uppgiften på andra sätt men väljer det enklaste alternativet. Han tar reda på hur stor andel av gräsmattan som Jenny och Mona klippt när de är klara. Sedan räknar han ut tiden som de tar på sig när de hjälps åt.

Algebraisk/aritmetisk och grafisk/geometrisk uttrycksform

Lösning 3a

	2h	1h	1min	10min
Jenny:	100%	50%	0,83%	8,3%
Mona:	50%	25%	0,42%	4,2%
			1,25	

	1h	1,5h	1h 15min	1h 20min
Jenny:	50%	75%	62,5%	66,6%
Mona:	25%	37,5%	31,25%	33,4%
	75%	112,5%	93,75	100%

1h 10min = 87,5%

$\frac{12{,}5\%}{1{,}25} = \frac{1{,}25x}{1{,}25}$ (x=min)

$10 = x$

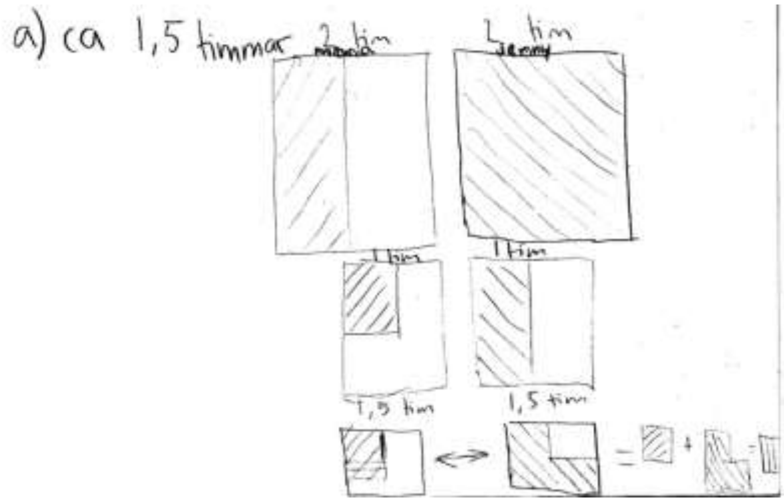
SVAR: 1h 20min.

Elevens argument för lösningsstrategin:

> Jag började att prova mig fram med olika timmar och kom fram till att 1 timme och 15 minuter var väldigt nära. Jag ställde sedan upp i en tabell hur många procent de hann var för sig och tillsammans i timmar och minuter. På 1 h 10 min hann de 87,5% då saknas det 12,5%. På 1 min hinner de 1,25 % och då skrev jag det som en ekvation: 1,25x=12,5%. Så ser mina ekvationer ut i slutet så då dividerade jag med 1,25 och får ett ensamt x som blev 10. Alltså fattades 10 minuter. 1 h 10 min + 10 min = 1 h 20 min. Jag provade även att räkna ihop procenten och de stämde.

Kommentarer: Eleven använder olika lösningsmetoder och kombinerar för att kunna titta tillbaka och kontrollera att allt stämmer. Han söker mönster och använder sig av tabeller för att få fram lösningen. Han kombinerar olika symboler som t.ex. timma, minuter och procent. Han prövade sig fram och kontrollerade svaret genom att arbeta med flera operationer och ställer upp en ekvation.

Lösning 3b



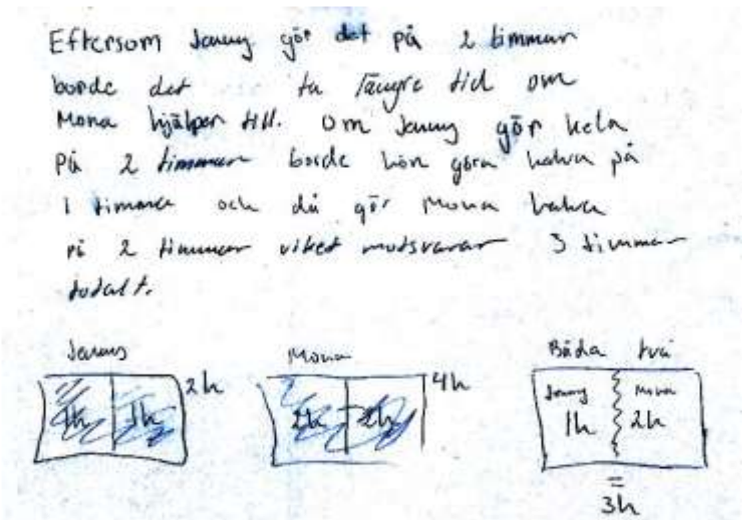
Elevens argument för lösningsstrategin:

> Den visade tydligast vad jag ville veta och komma fram till. Man såg lätt.

Kommentarer: Eleven använder till stor del av bilder och markerar med symboler för att komma fram till en uppskattning av problemet. Han ritar bilder, gissar och kommer fram till en uppskattning.

Logisk, algebraisk/aritmetisk och grafisk/geometrisk

Lösning 4a

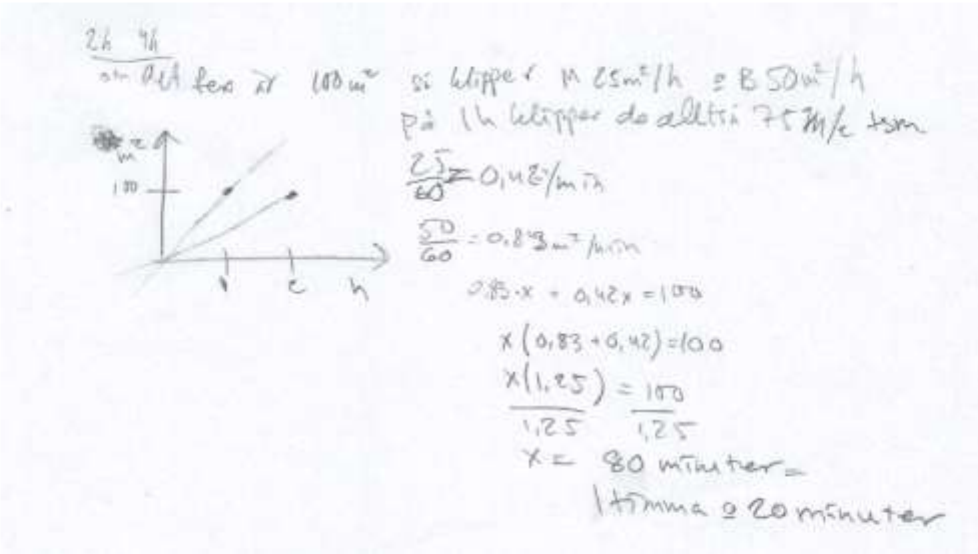


Elevens argument för lösningsstrategin:

> Jag tänkte om Jenny klipper hela på två timmar borde hon klippa halva på 1 timma och likadant med Mona. Hela på 4 tim och halva på 2 tim. Delar man upp arbetet så Mona och Jenny gör halva var blir det 1 timma + 2 timmar = 3 timmar. Jag valde denna strategi för att det var den enda jag kom på.

Kommentarer: Eleven resonerar sig i *Lösning 4a* fram till lösningen med hjälp av bilder, symboler och ord. Han visar med bilderna hur lång tid det tar för Jenny och Mona att klippa var sin halva av gräsmattan. Han skrev först ”Eftersom Jenny gör det på 2 timmar, borde det ... ta längre tid om Mona hjälper till.” Sedan suddade eleven bort ”inte” och använder sig av villkor II istället. Eleven har först använt villkor I men sedan ändrat sig och använder sig av villkor II.

Lösning 4b



Elevens argument för lösningsstrategin:

> Jag testade lite olika verktyg, diagram osv. och kom fram till att om jag gjorde en ekvation där x var minuter så kom jag fram till ett svar. Jag valde en area på 100m² eftersom det är en bekväm area att räkna med.

Kommentarer: Eleven använder sig av symboler, graf och resonerar med ord för att lösa problemet. Eleven har gjort ett antagande att gräsmattan är 100m². Han väljer flera olika operationer att arbeta med problemet och ställer upp en ekvation. Han använder sig av olika lösningsmetoder.

Sammanfattning av resultat

Resultatet visar att 16 elevlösningar (grupp A) inte har tolkat problemet med ett tydligt eller rimligt villkor. 20 elever har tolkat problemet med villkor I och av dessa har 11 svarat korrekt. 10 har tolkat problemet med villkor II och av dessa har nästan alla d.v.s. åtta svarat korrekt. Det finns ingen lösning som uttrycks enbart med hjälp av konkret uttrycksform, logisk/språklig eller grafisk/geometrisk uttrycksform. I tre elevlösningar redovisas att problemet lösts med enbart algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Majoriteten av lösningarna uttrycks med en kombination av minst två olika uttrycksformer. Kombinationen logisk/språklig och algebraisk/aritmetisk uttrycksform förekommer oftast bland alla lösningarna. Alla lösningar är unika och innehåller någon form av algebraisk eller aritmetisk uttrycksform.

Diskussion

I detta kapitel diskuteras de metoder som använts i undersökningen samt undersökningens resultat.

Metoddiskussion

Det finns många saker som överraskar när elevernas lösningar gås igenom. Det mest överraskande är att ingen av eleverna har ställt någon fråga under tiden som de försökte lösa problemet. Detta trots att de uppmanades att ställa frågor om något kändes oklart. Anledningen kan vara att de var blyga och inte vågade fråga. Möjligtvis kan det också vara så att elevernas intresse av att delta är inte så stort och därför har de inte heller någon lust att ställa några frågor; något som givetvis kan påverka deras motivation till att ta undersökningen på allvar. Detta kan naturligtvis påverka resultatet. Skulle en liknande undersökning i framtiden göras skulle förmodligen elevgrupperna behöva besökas ett par tillfällen för att eleverna ska känna sig mer trygga med sitt deltagande. Eleverna skulle då få möjlighet att lära känna mig och då skulle eventuellt risken minska för att de inte skulle våga ställa någon fråga om något de upplevt som oklart.

En annan orsak som kan påverka resultatet är att ett genomförande av en pilotstudie saknades. Hade en pilotstudie genomförts hade ett mer tillförlitligt resultat kanske uppnås. Formuleringen av problemet kunde också gjorts genom att byta ut siffrorna ”4” och ”2” till ”fyra” och ”två” istället. Detta skulle möjligen ha kunnat minska risken för att eleverna bara ”plockar” siffrorna ur formuleringen och gör om ett rikt problem till en rutinuppgift. Villkoren som gällde för problemet hade också kunnat förtydliga.

En anledning till varför mer än 25 procent av eleverna inte påbörjat uppgift b eller inte löst den helt kan vara att de hade behövt mer tid för att slutföra båda uppgifterna. Någon bestämd tidsram var inte tillgänglig eftersom någon pilotstudie aldrig genomförts. Det var således omöjligt att bestämma vilken tid som borde anses som rimlig. Dessutom är uppgift b av en annan karaktär och mer lämplig för att undersöka ”hur väl eleverna har uppfattat problemets natur och den matematik som ligger inbäddad i det” (Hagland, Hedrén & Taflin 2005, s. 71).

Enligt Taflin (2007, s.151) kan lärare påverka elevernas val av lösningsmetod. En förklaring till varför ingen använde den konkreta uttrycksformen kan vara att eleverna inte vid något undersökningstillfälle fått tillgång till några hjälpmedel. Detta kan indirekt ha påverkat deras val av lösningsmetoder samt användning av uttrycksformer. Hade eleverna fått tillgång till några hjälpmedel, som t.ex. sax och papper vid undersökningen, hade de möjligtvis använt den konkreta uttrycksformen.

Resultatdiskussion

Undersökningens syfte är att ta reda på hur elever som går i första året på gymnasiet löser ett rikt matematiskt problem. Framför allt handlar studien om de olika matematiska uttrycksformer som eleverna tillämpar när de löser ett rikt matematiskt problem. Den övergripande frågan är ’Hur löser gymnasieelever ett rikt problem?’ och mer specifikt ’Vilka uttrycksformer använder gymnasieelever när de löser ett rikt matematiskt problem?’.

Hur löser gymnasieelever ett rikt problem?

Grupp A

Resultatet visar att eleverna i denna grupp löser uppgift a utan att ta några hänsyn till något villkor. Det verkar som de har ”plockat” siffrorna ur formuleringen och förvandlat det till en rutinuppgift. Ingen har upplevt någon form av svårighet när de löser uppgiften. Jag tycker att det visades ganska tydligt i deras argument att det är så de hanterade uppgiften. Jag tror att eleverna i Grupp A inte riktigt har förstått vad problemets uppgift handlade om och därför har de heller inte gjort några värderingar om rimligheten i sina svar. Utan förståelse saknar de lösningsmetoder; deras lösningsförslag är därför enkelriktade och ensidiga.

Ett rikt problem ska vara lätt att förstå så att alla har möjlighet att arbeta enligt dess definition (Taflin 2007, s. 56) men det gjorde de inte. Dessa elever har inte ansträngt sig för att lösa problemet. Inte heller har de värderat svarets rimlighet. Troligtvis har de inte tagit undersökningen på allvar. Vad är det som gör att eleverna inte visar någon lust att lösa problemet? Det kan vara för att eleverna inte förstår det; därför minskar motivation och viljan att lösa (Lester 2007, s. 98). Om man inte har lust vill man heller inte försöka förstå uppgiften (Polya 1957, s.94). Det är möjligt att eleverna har använt villkor II – där Jenny och Mona klipper halva gräsmattan var – men det framgår inte av någon argumentation.

En annan orsak kan vara att eleverna har en begränsad erfarenhet av att lösa problem (Polya 1957, s. 150; Lester 2007, s. 98); detta påverkar naturligtvis vilka uttrycksformer de använder sig av och förklarar varför deras lösningsförslag blir så ensidiga. Kan det vara så att problemlösning helt enkelt inte har en central plats i undervisningen utan att det räknas alltför många rutinuppgifter i läroboken? Anledningen kan också vara att eleverna saknar lösningsstrategi och självförtroende. Enligt Schoenfeld (2012, s. 3-4) är dessa två punkter viktiga ingredienser för att man ska lyckas med problemlösning.

Grupp B

I denna grupp har eleverna förstått frågorna även om man använt sig av olika villkor. Anledningen till varför det blev så kan vara för att jag inte tydligt har angett problemets villkor. Egentligen tycker jag att alla elever ”bör” kunna tolka frågorna utan att man behöver påpeka vilket villkor som gäller. De förväntas använda villkor I – där både Jenny och Mona har var sin gräsklippare och klipper samtidigt. En viktig kompetens vid problemlösning är att ”den som ska lösa problemet måste ha förmåga att tolka problemet” (Taflin 2007, s.11). Syftet med att de ska hjälpas åt är för att det ska gå snabbare att hjälpas åt än att jobba ensam.

Troligen har en del elever tänkt sig att arbetet ska delas jämnt och rättvist; därför får Jenny och Mona klippa var sin halva av gräsmattan. Enligt min egen uppfattning så kräver det mer ansträngningar för att lösa problemet med villkor I än II. Av 20 lösningar med villkor I är 11 korrekta. I de andra lösningarna med villkor I har eleverna antingen angett felaktiga svar eller bara en uppskattning. Nästan alla lösningar med villkor II är korrekta, 8 av 10, kanske därför att det kräver mindre ansträngning om man löser uppgiften med stöd av ett sådant antagande. Jag upplevde dock att eleverna i denna grupp ”ansträngde” sig för att lösa uppgiften oavsett vilket antagande de använde. Se t.ex. i lösning 4a. Eleven visade tydligt att han ändrade villkoret under lösningsprocessen. Han måste ha ansträngt sig att först försöka lösa problemet med hjälp av villkor I. Förmodligen kom han inte fram till någon lösning och därför ändrade han villkoret. Samtidigt undrar jag hur många av eleverna som ändrade sig under tidens gång – bland de 10 lösningar som använde villkor II.

Resultatet visar också att en del upplever uppgiften som svår och andra enkel vilket jag tycker är ganska naturligt. Det varierar ju beroende på vilket villkor eleverna använde sig av. Det beror också på elevernas tidigare erfarenheter (Polya 1957, s. 150; Lester 2007, s. 98), alla har helt enkelt inte samma erfarenheter och förutsättningar eftersom vi alla är olika. Dessutom är ett rikt problem ett sådant problem som enligt kriterium kan lösas på många olika sätt (Taflin 2007, s. 56). Detta förklarar också varför elevernas lösningsförslag är så varierande och de uttrycksformer som används så omväxlande.

Vilka uttrycksformer använder gymnasieelever när de löser ett rikt matematiskt problem?

Uttrycksformer som användes av eleverna är varierande och omväxlande. Alla lösningar är unika även om eleverna använder samma uttrycksformer. Många av lösningsförslagen är mycket intressanta att analysera. Eleverna förväntas använda blandade uttrycksformer och det gjorde också de flesta. Hagland, Hedrén och Taflin (2005) poängterar att det är viktigt att eleverna växlar mellan dessa uttrycksformer därför att de ”fungerar som redskap och stimulans för tankearbete och kommunikation” (s.33).

Symbolspråk fungerar som ett kommunikationsverktyg så att det är möjligt för oss att uttrycka idéer och matematiska tankar (Mouwitz 2004, s. 34). Jag skulle vilja påstå att symbolspråk spelar en viktig roll i matematiken. Visserligen kan lösningförslag uttryckas med andra uttrycksformer, men det är oerhört svårt att göra detta helt utan en algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Problemet ”Klippa gräs” är dock möjligt att lösa med enbart just algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Det finns tre lösningsförslag som använde enbart denna uttrycksform (Tabell 2). För de övriga - oavsett hur eleverna uttrycker sig i sina lösningsförslag - innehåller de alltid någon form av algebraisk/aritmetisk uttrycksform.

Det är lättare att kommunicera med algebraisk/aritmetisk uttrycksform. Det är naturligt att vi väljer ett mer bekvämt och enklare sätt att uttrycka oss om vi kan. Som i lösning 2b där eleven undviker krångliga alternativ och väljer ett enklare sätt. Enligt Mouwitz (2004, s. 34) är symbolspråket ett ”tidsbesparande” och ”tankekraftsbesparande” sätt att kommunicera. Det är av dessa anledningar symbolspråket förvärvas. Jag tror att detta förklarar varför alla lösningsförslag innehåller algebraisk/aritmetisk uttrycksform, det vill säga någon form av symbol, siffror, bokstäver eller förkortade ord. Även om eleverna använder samma kombination av olika uttrycksformer är de ändå olika. Detta eftersom eleverna använder olika lösningsstrategier när de löser uppgiften.

Avslutande reflektioner och förslag till vidare forskning

Det finns så många lösningsmetoder och uttrycksformer man kan lära sig av eleverna. Jag hade inte ens föreställt mig att en tabell eller enbart bilder kan leda till ett rimligt svar. Eller hur eleverna utnyttjat och blandat olika uttrycksformer i sina lösningsförslag. En del elever kämpade verkligen och visade ett stort intresse för uppgiften. Det glädjer mig verkligen då jag älskar problemlösning. En del har det ganska lätt men de har ändå inte upplevt det som tråkigt. Sammanfattningsvis tycker jag att hela undersökningen gett mig många värdefulla erfarenheter. Jag har fått en bekräftelse om vikten av problemlösningens roll i lärandeprocessen (Niss 2002; Polya 1957).

Jag är dock orolig över många elevers tolkningsförmåga inför problemet; även om denna undersökning handlar om uttrycksformer. En del elever uppskattar problemlösning och visar att de verkligen har ansträngt sig och kämpat för att lösa problemet. En del elever har inte visat något större intresse för problemlösning. De har inte visat något form av förståelse på ett tydligt sätt. De löste problemet utan att värdera svarets rimlighet.

Undersökningens resultat visar att något behöver förändras för att öka intresset och motivation för ämnet bland dessa elever. Jag upplevde det som märkligt att så många ”löste” uppgiften utan någon förståelse och att de inte värderade rimligheten i sina svar. De förväntas kunna lösa ett sådant här problem oavsett vilka lösningsmetoder eller uttrycksformer de använder sig av (Skolverket 2011b, s. 13). Jag tror att orsaken troligen är den att eleverna saknar erfarenheter och lösningsstrategier (Lester 1996, s. 88; Lester 2007, s. 98; Polya 1957, s. 150) vilket kan påverka deras självförtroende. Är lärare och elever medvetna om detta? Ligger svårigheten i undervisningen eller finns det andra orsaker? Hur kan vi förbättra situationen?

Referenser

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet - Gymnasieskolan hösten 2009.* NCM Göteborg Universitet

Gustafsson, I-M., Jakobsson, M., Nilsson, I., Zippert, M. med fler (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnaren 3*, s. 36-45.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.*

Högskolan Dalarna (2008). *Forskningsetiska anvisningar för examens- och uppsatsarbeten vid Högskolan Dalarna.*

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM Göteborg Universitet

Lester, Frank K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström m.fl. (red.). *Matematik – ett kommunikationsämne*. Göteborgs universitet. Nämnaren TEMA. (s. 85-91).

Lester, Frank K. & Lambdin (2007). Undervisa genom problemlösning. I Boesen, J., Emanuelsson G., Wallby, A. & Wallby, K. (red.). *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv* (s. 95-103). NCM Göteborg Universitet.

Mouwitz, L. (2004). *Bildning och matematik.* Utgiven av Högskoleverket.

NCM (2010). *Strävorna 11* http://ncm.gu.se/9

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.*

Patel, R. & Davidson, B. (2003). *Forskningsmetodikens grunder.* Studentlitteratur.

Polya, G. (1957/2004). *How to solve it – a new aspect of mathematical method.* (Second Edition, with a new foreword by John H. Conway, 2004).

SAOB. *Svenska Akademiens ordbok.* http://g3.spraakdata.gu.se/saob/

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and Sense-making in mathematics. I D. A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). Macmillan Publishing Company.

Schoenfeld, Alan H. (2012). *How we think: a theory of human decision-making, with a focus on teaching.* ICME-12, 2012.

Silver, E. A. & Smith, M. S. (2002) Samtalsmiljöer. Berikande problem. *Nämnaren 2*, sid 49-52

Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik.* Skolverkets rapport nr221.

Skolverket (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.*

Skolverket (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.*

Skolverket (2012). *Kommentar om ämnet matematik.*

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.*

Bilagor

Bilaga 1 - Missivbrev

Högskolan Dalarna 2013 vt
Självständigt arbete i matematik III (15hp)

Mitt namn är Noelle Pettersson och jag läser till lärare med inriktning i matematik för grundskolans senare år samt gymnasiet på Högskolan Dalarna. Nu läser jag matematik III. Jag ska skriva ett självständigt arbete om hur gymnasieelever löser ett rikt problem i matematik.

Min handledare från Högskolan Dalarna, Lovisa Sumpter, kommer att ha tillgång till materialet.

Deltagande i undersökningen är givetvis frivillig och kan avbrytas när som helst.

Materialet kommer inte att användas till något annat ändamål än till mitt arbete. Ingen elev kommer att nämnas vid namn eller på något annat sätt kunna identifieras i arbetet. Vid intresse kan deltagarna få ta del av de slutgiltiga resultaten.

Jag hoppas att du vill vara med i studien, det betyder mycket för mig och mitt arbete.

Med vänlig hälsning

Noelle Pettersson
h09noepe@du.se

Handledare:
Lovisa Sumpter
lsm@du.se

Jag har tagit del av ovanstående information och vill delta i undersökningen.

Namnteckning: Namnförtydligande: