



HÖGSKOLAN  
DALARNA

## **Självständigt arbete i matematikdidaktik**

Avancerad nivå

### **Från grej till kvadrat**



#### **Om begreppsförståelse inom geometri utifrån läromedel**

Geometriska objekt i undervisning och läromedel

Författare: Helene Hammenborg

Handledare: Lotta Wedman

Examinator: Eva Taflin

Termin: Vt 12

Program: Lärarprogram

Ämne/huvudområde: Självständigt arbete/

Matematik

Poäng: 15 hp

Högskolan Dalarna

791 88 Falun

Sweden

Tel 023-77 80 00

## Abstract

One of the purposes of this work was to find out what it means to have a conceptual understanding of geometry. It describes how the geometry evolved from history and the geometry that is taught in grade one to nine and collage. The area examined was based on fundamental geometric objects for example two- and three- dimensional objects and its characteristics and especially focusing on the areas of perimeter, area and volume. The literature-review showed that the conceptual understanding was primary to developing a good knowledge of geometry. The second purpose of his study examined whether pupils achieved the goals in geometry by working with a Mathematics Book. It was the newest Mathematics-book that gave the best conditions for this, while the oldest was missing key parts.

Nyckelord: geometri, begreppsbildning, representationsformer, läromedel, läromedelsanalys

# Innehållsförteckning

<b>1. INLEDNING .....</b>	<b>1</b>
1.1 Syfte.....	2
1.2 Problemformuleringar .....	2
1.3 Begreppsförklaringar .....	2
<b>2 TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER OCH TIDIGARE FORSKNING.....</b>	<b>6</b>
2.1 Begrepp.....	6
2.2 Geometris historia med fokus på grundläggande geometriska objekt .....	6
2.3 Varför geometri? .....	8
2.4 Geometrin idag .....	9
2.4.1 Omkrets .....	9
2.4.2 Area.....	10
2.4.3 Volym.....	14
2.5 Didaktiska perspektiv på geometriundervisningen .....	15
2.5.1 Begreppsförståelse .....	15
2.5.2 Konkretisering.....	16
2.6 Tidigare forskning .....	17
2.6.1 Mål med undervisningen .....	17
2.6.2 Lärarens undervisning och användandet av läroböcker.....	17
2.6.3 Från det konkreta till det abstrakta .....	18
2.6.4 Tidigare forskning om läromedel .....	19
2.7 Sammanfattning teoridelen.....	19
<b>3 METOD .....</b>	<b>23</b>
3.1 Metodansats.....	23
3.2 Datainsamlingsmetod.....	23
3.3 Urval .....	24
3.4 Genomförande .....	24
3.5 Databearbetning och analysmetod .....	25
3.6 Trovärdighet och tillförlitlighet .....	25

<b>4</b>	<b>PRESENTATION AV LÄROMEDLEN .....</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>RESULTAT OCH ANALYS .....</b>	<b>29</b>
<b>5.1</b>	<b>Resultatöversikt .....</b>	<b>29</b>
5.1.1	Punkt, linje och sträcka .....	30
5.1.2	Fyrhörning, triangel och cirkel .....	30
5.1.3	Klot, kon, cylinder och rätblock .....	31
<b>5.2</b>	<b>Likheter och skillnader .....</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>DISKUSSION .....</b>	<b>34</b>
<b>6.1</b>	<b>Metoddiskussion.....</b>	<b>38</b>
<b>7</b>	<b>SLUTSATS .....</b>	<b>39</b>
	<b>LITTERATURLISTA.....</b>	<b>40</b>

## 1. Inledning

Geometris plats i matematiken har varierat genom tiderna. Då pyramiderna byggdes, cirka 2500 år före Kristus, var det den praktiska geometrin som användes. Geometri ansågs mycket betydelsefullt att kunna, men man hade ännu inte kunskapen att använda formler och algebra. Det var Euklides som införde den teoretiska geometrin, medan Arkimedes använde sig av mer praktisk geometri, när han till exempel efter ett bad upptäckte att han kunde fastställa sin egen kropps volym. I arabisk matematik, i början på 800-talet, löste man bland annat andragradsekvationer med hjälp av geometriska figurer (Thompson, 1996, s. 318). Därefter hände inga större framsteg i historien förrän på 1600-talet då man började använda sig av den analytiska geometrin, vilket innebar att man med hjälp av koordinatsystem och integraler kunde räkna ut area och volym (Tengstrand, 2005, s. 127). När vi kommer in på 1960-talet tas i princip den euklidiska/klassiska geometrin bort från skolundervisningen, enligt Prytz (2007, s.196) som har analyserat läromedel fram till 1962. Det var då läroböcker som byggde på Elementa övergavs och fokus lades på symmetri och vikningar, vilket bidrog till ett minskat intresse för geometri (Prytz, 2007, s.197ff). I den senaste läroplanen som togs i bruk 2011 är geometri åter en betydande del av matematiken (Skolverket, 2011a, s.63).

Flera undersökningar, bland annat TIMSS 2007, har visat att svenska elever har brister i geometri. En orsak till detta, menar Bentley (2008, s.11), är att undervisningen inte är tillräckligt inriktad på begreppslig förståelse. Bentley påtalar också att i Sverige är det läromedel som i hög grad styr undervisningen i matematik. Detta har varit en av anledningarna till att jag valt att göra denna studie. Den undersöker geometriska objekt och vad som krävs för begreppslig förståelse och hur läromedel för år 1 till 3 lever upp till dessa krav. Min erfarenhet, efter att ha arbetat sjutton år som klasslärare i år 1-6, är att i de lägre åldrarna behandlas inte geometri i någon större utsträckning. Det som fokuserades under mina år som klasslärare var, för åren 1-3, endast de tvådimensionella formerna kvadrat, rektangel, triangel och cirkel. Dessa skulle endast namnges och beskrivas, vilket skiljer sig från de kunskapskrav som ställs idag. Därför anser jag det betydelsefullt att ta reda på vad barn faktiskt behöver lära sig, enligt läroplan och forskning.

Geometrin har åter fått sin plats i matematikundervisningen, vilket bland annat syns i läroplanen från 2011. Eftersom geometriska problem förekommer i såväl utbildning som vardag och yrkesliv, enligt Löwing (2011, s. 9), gäller det att behärska matematiska modeller. Kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a, s. 62) inleds med att matematiken har en flertusenårig historia från flera olika kulturer och att den utvecklades ur praktiska behov samt människors nyfikenhet att utforska. För att elever på bästa sätt ska utvecklas i matematik bör målen vara tydliga, enligt Skolverket (2011b, s. 90). Målen skall utgå från syftet i kursplanen som beskriver de kompetenser/förmågor eleverna skall behärska utifrån ett specifikt innehåll, det centrala innehållet. För att begränsa innehållet i denna studie valdes att fokusera på kursplanens syfte:

Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att

- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp (Skolverket, 2011a, s.63).

Samt det centrala innehållet för år 1 till 3:

- Grundläggande geometriska objekt, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt. (Skolverket, 2011, s.63).

Inom området begreppsförståelse talar Tall & Vinner (1981, s. 2ff), Bråting (2004, s. 10) och Sjögren (2011, s. 12) om problematiken med att vi bär med oss begrepps bilder redan när vi möter matematikens begrepp och dess definitioner, vilket kan försvåra vår förståelse för de matematiska begreppen. Genom att tidigt arbeta med begreppsförståelse på ett konkret sätt kan förståelsen för det abstrakta nås, enligt Löwing (2011, s. 25). Nilsson (2005, s. 270) har studerat hur lärarstudenter genom att jobba laborativt har nått en större kunskap om geometri. Avgörande faktorer för att eleverna ska utveckla goda kunskaper är lärarens undervisning och att målet med undervisningen är tydligt (Bentley, 2008, s. 87; Bergqvist m.fl., 2009, s. 23; Skolinspektionen, 2009:5, s. 9; Skolverket 2011b, s. 90).

I kunskapskraven (Skolverket, 2011a, s. 67) för godtagbara kunskaper i slutet av årskurs 3 står:

Eleven har grundläggande kunskaper om matematiska begrepp och visar det genom att använda dem i vanligt förekommande sammanhang på ett i huvudsak fungerande sätt. Eleven kan beskriva begreppens egenskaper med hjälp av symboler och konkret material eller bilder. Eleven kan även ge exempel på hur några begrepp relaterar till varandra.

Dessutom kan eleven använda grundläggande geometriska begrepp och vanliga lägesord för att beskriva geometriska objekts egenskaper, läge och inbördes relationer. Eleven kan även använda och ge exempel på enkla proportionella samband i elevnära situationer. (Skolverket, 2011a, s.67)

Enligt Johansson (2006, s. 1), Bentley (2008, s. 138), Skolinspektionen (2009:5, s. 21) och Skolverket (2011b, s. 10) använder svenska lärare ett läromedel en stor del av undervisningstiden i matematik. Den här studien jämför därför vad kunskapskraven, det vill säga målen i kursplanen, säger att eleverna ska kunna och vad några utvalda läromedel behandlar inom just det valda området, för att se om dessa överensstämmer med varandra.

## 1.1 Syfte

För att få en ökad förståelse för geometrin och de geometriska begreppen behövs kunskap om hur matematiken har växt fram genom historien samt kunskap om vad som kommer att möta eleverna i framtiden, när de läser matematik i grundskola och gymnasium.

Syftet med detta arbete är därför tudelat, för det första är det att ta reda på vad det innebär att ha en begreppsförståelse i geometri, utifrån mitt begränsade innehåll, grundläggande geometriska objekt. För det andra är det att ta reda på om de läromedel som används i skolor idag i år 1 till 3 innehåller det som krävs för att eleverna ska nå målen, utifrån det valda området, begreppsförståelse och grundläggande geometriska objekt, deras egenskaper och relationer till varandra. För att kunna göra detta ska olika läromedel för elever i år 1 till 3 undersökas för att se hur väl de överensstämmer med kursplanens mål, om eleverna får förutsättningar att nå målen genom att arbeta med läromedlen.

## 1.2 Problemformuleringar

- Vilken kunskap i geometri krävs för att nå upp till målen i grundskolans läroplan? Vad krävs för att förstå begreppen omkrets, area och volym?
- Hur presenteras de grundläggande geometriska objekten i några läromedel? Kan man nå läroplanens mål i geometri för år 3 genom att arbeta med olika läromedel?

## 1.3 Begreppsförklaringar

Enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 15) är geometri ”den gren av matematik som behandlar avstånd, vinklar, ytor, kroppar och former”. Ordet geometri kommer från grekiskan och betyder

jordmätning. Här följer en förklaring av de begrepp som jag använder mig av. Definition av begrepp utifrån Kiselman och Mouwitz (2008):

Plan: "Tvådimensionell mängd som innehåller den rätta linjen genom två godtyckliga av sina punkter" (s. 185). Definitionen av plan geometri är "studiet av geometriska figurer i planet" och definitionen på plant område är "område som ligger i ett plan" (s. 185).

Punkt: "Objekt inom geometrin med läge men utan utsträckning" (s. 185).



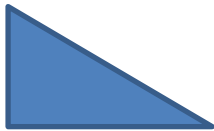
Linje: "Synonymt med kurva. Endimensionellt geometriskt objekt" (s. 15).

Rät linje: "Kurva som är rak och obegränsad åt båda hållen" (s. 15).



Sträcka: "Kurva som är rak och begränsad åt båda håll" (s. 188).

Triangel: "Månghörning med tre hörn" (s. 205).



Fyrhörning: "En månghörning med fyra hörn" (s. 207).



Parallelltrapets: "Fyrhörning med minst två parallella sidor" (s. 210).



Parallelogram: "Parallelltrapets vars sidor är parvis parallella" (s. 209).



Rektangel: "Parallelogram vars alla vinklar är räta" (s. 210).



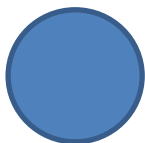
Romb: "Parallelogram där två närliggande sidor är lika långa" (s. 211).



Kvadrat: "Rektangel med två närliggande sidor av samma längd" (s. 208).



Cirkel: ”Kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)” (s. 214).



Rum: ”Mängd försedd med viss struktur.” Synonymt med rymd vars definition är, enligt Kiselman och Mouwitz, ”det tredimensionella rummet” (s. 19).

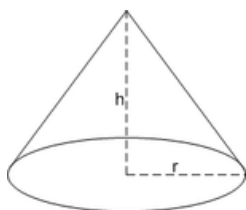
Kropp: ”Ett tredimensionellt geometriskt objekt” (s. 15).

Klot: ”Kropp i rummet som består av alla punkter som har avstånd från en given punkt (medelpunkten) högst lika med ett givet tal (radien)” (s. 229).



( Bild från <http://sv.wikipedia.org/wiki/Klot>, 120607)

Kon: ”Mängd som består av strålar (kurva som är rak och begränsad åt ett håll) utgående från en given punkt (konens spets)” (s. 229).

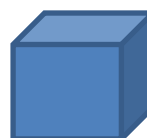


( Bild från <http://sv.wikipedia.org/wiki/Kon>, 120607)

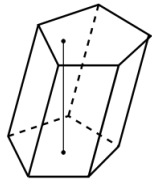
Cylinder: ”Mängd i rummet som består av rätta linjer parallella med en given rät linje. (Cylinder kommer av grekiskans ”rulle”)” (s. 227).



Rätblock: ”Rätvinklig parallelepiped. (Ett rätblock begränsas av sex rektangelområden. När alla dessa är kvadrater har vi en kub)” (s. 226).

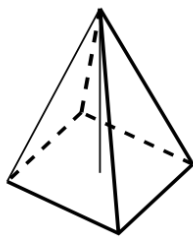


Prisma: ”Polyeder där minst två av begränsningsytorna är parallella och alla andra begränsningsytor är parallelogramområden” (s. 223).



(Bild från [http://sv.wikipedia.org/wiki/Prisma\\_\(geometri\)](http://sv.wikipedia.org/wiki/Prisma_(geometri)), 120607)

Pyramid: ”Polyeder som samtidigt är en kon” (s. 223).



(Bild från [http://sv.wikipedia.org/wiki/Pyramid\\_\(geometri\)](http://sv.wikipedia.org/wiki/Pyramid_(geometri)), 120607)

## 2 Teoretiska utgångspunkter och tidigare forskning

### 2.1 Begrepp

Tall och Vinner (1981, s. 2ff) talar om problematiken med begrepps bilder och begreppsdefinitioner. Inom matematiken är det viktigt att begrepp definieras så noggrant som möjligt. De menar att individen bär med sig minnen och inre mentala bilder av begrepp som kan skapa en kognitiv konflikt, många av de begrepp vi möter i matematiken kanske vi stött på tidigare men i en annan form innan de formellt definieras inom matematiken. Detta gör att det blir en konflikt mellan våra personliga begreppsförklaringar och de rent formella som används inom matematiken. De betonar betydelsen av att ha en korrekt begrepps bild i samband med att lära sig nya begrepp, men att lära sig en definition utantill är ingen garanti för förståelse, menar Tall och Vinner.

Även Sjögren (2011, s. 55f) tar i sin avhandling upp begrepps bildning inom matematik. Han menar att begrepps bildning i matematik sker via abstraktioner och att processen för att renodla abstraktioner kan beskrivas som sekvenser av förklaringarna. Begrepps bildning är delvis empirisk, den har ett empiriskt ursprung och delvis logisk det vill säga analytisk, vilket överensstämmer med Talls och Vinnerns teori. Eftersom matematiska begrepp har ett empiriskt ursprung kan tillämpningen av matematiken förklaras. Men matematiken är inte en empirisk vetenskap. Begrepps bildningen i matematik är relaterad till begrepp förvärvade i matematikundervisningen. Då innebär det också att undersöka matematikens utveckling i matematikutbildning, enligt Sjögren.

Bråting (2004, s. 23) menar att många läroböcker i matematik innehåller ett flertal exempel där man anknyter matematiska begrepp till vardagliga situationer, till exempel då man skall beräkna volymer och areor. Men eftersom det är svårt att vardagsanknyta de matematiska begreppen, till exempel vid högre mer avancerad matematik, blir behovet av formella definitioner extra märkbart. Hon diskuterar betydelsen av att kunna använda begrepp på ett korrekt sätt och att detta bör vara målsättningen med matematikundervisningen. Hon håller med Tall och Vinner om att undervisningen inte bör fokuseras kring att lära in formella definitioner utantill. Dock varnar hon för att konkretisering och ett bildtänkande inom matematiken kan leda till förvirring och att det kan uppstå problem om man har för stark tilltro till matematikens åskådlighet eller möjlighet till vardagsanknytning.

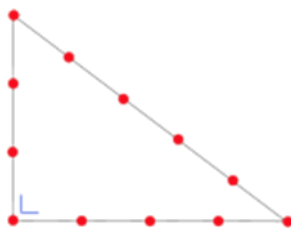
En sammanfattning av dessa tre teorier visar att för att elever ska få en god begreppsförståelse måste lärare förstå att eleverna har begrepps bilder med sig och att dessa först måste klargöras och utvecklas, för att utifrån detta koppla till de begreppsdefinitioner som finns inom matematiken. Det får dock inte ske en inläring av definitioner utantill utan det ska bygga på begrepps bilden. Man måste vara medveten om att vid högre matematik uppstår problem med begrepps bilder eftersom den matematiken är abstrakt och svår att koppla till bilder.

### 2.2 Geometris historia med fokus på grundläggande geometriska objekt

Kursplanen i matematik betonar den historiska aspekten av ämnet matematik, för att få en ökad förståelse för de geometriska objekten och begrepps inläring. Därför redogörs här för geometris historia med fokus på de grundläggande geometriska objekten.

Den allra första matematiken kom från områdena kring floderna Hoangho, Indus, Eufrat, Tigris och Nilen, enligt Olsson (1999, s. 62). Då användes geometrin till landmätning och ordet geometri betyder just landmätning. Detta gjordes praktiskt med rep och passare till exempel

gjordes repknutar utifrån den pythagoreiska triangeln med längderna 3,4,5 som senare ger upphov till Pythagoras sats.

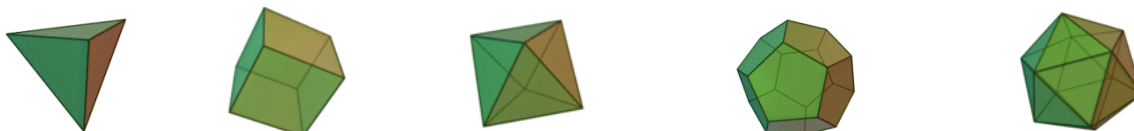


(Bild från [http://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoreisk\\_tripplet](http://sv.wikipedia.org/wiki/Pythagoreisk_tripplet), 120607)

Eftersom Nilen svämmade över sköljdes gränser bort, åkrarna var i form av till exempel trianglar som man kunde beräkna arean på. Volym behövdes för beräkning av spannmål, kryddor, tyger med mera. Egyptierna använde kunskaper i praktisk geometri för beräkning av areor och volym, som behövdes för att uppföra större byggnader, staka ut land, bygga bevattningsanläggningar, astronomiska observationer med mera. Egyptierna kunde korrekt beräkna arean av rektanglar och rätvinkliga trianglar samt volymen av räta cylindrar och stympade pyramider, enligt Olsson (1999, s. 153).

Omkring 600 f. Kr. blev grekerna ledande över en stor del av matematiken. Pythagoras (ca 580-500 f. Kr.) grundade den pythagoreiska skolan och man tror att han bland annat kunde konstruera de fem platonska kropparna, enligt Olsson (1999, s. 154). (Se bild nedan)

Pythagoras är den som gett namn åt Pythagoras sats även om satsen är känd sedan långt tidigare, men inte fick sitt namn förrän efter Pythagoras tid. Platon (427-347 f.Kr.) som egentligen var filosof grundade det kanske första universitetet och skrev vid ingången "Här kommer ingen in som inte behärskar geometri". De platonska kropparna är uppkallade efter honom d.v.s. tetraedern, kuben, oktaedern, dodekaedern och ikosaedern (Olsson 1999, s. 86).



(Bild från [http://sv.wikipedia.org/wiki/Platonska\\_kropparna](http://sv.wikipedia.org/wiki/Platonska_kropparna), 120607)

Den som dock har haft störst påverkan på geometrins utveckling är Euklides (ca 325 f. Kr.), enligt Noël (2001, s. 53). Men man vet inte om Euklides var en person eller flera matematiker, som tog detta namn. Euklides har gett upphov till Elementa som omfattar 13 böcker med 465 satser och dess bevis. I fyra böcker avhandlas plangeometrin, det vill säga egenskaper hos trianglar (till exempel Pythagoras sats) och fyrhörningar, area med mera. I andra böcker tas problem rörande kroppar upp, den så kallade rymdgeometrin. Euklides härledde volymen av pyramider, koner, klot samt konstruerade de regelbundna polyedern, enligt Noël. Detta var en viktig del av den grekiska kulturen på den här tiden, man ville att fysiken, astronomin och geometrin skulle stämma överens, eftersom de ansåg att universum var inneslutet i en sfär (Noël, 2001, s. 63).

Arkimedes (287-212 f. Kr.) liv var däremot känt, han förbättrade och överträffade Euklides metoder. Han var ingenjör och om Euklides bara sysslade med teori, sysslade Arkimedes även med praktik, han konstruerade flera krigsmaskiner bland annat med hjälp av hävstångsprincipen. Han konstruerade också en skruv som kunde leda vatten. Arkimedes bevisade förhållandet

mellan en cirkels omkrets och diameter, det vill säga ”pi”, men själva bokstaven  $\pi$  började inte användas förrän på 1700-talet, enligt Sjöberg (2000, s. 46).

Jordens omkrets kunde man beräkna redan 200 f. Kr. genom att jämföra solstrålarnas infallsvinkel vid samma tidpunkt på två olika orter. Genom att dessutom veta när sommarsolståndet inträffar och när solen står i zenit på orter på Kräftans vändkrets och med hjälp av vinklarna i den uppkomna triangeln, räknade man ut jordens omkrets, enligt Tengstrand (2005, s. 9).

Därefter gjordes inte så stora framsteg inom geometrin, vilket kan bero på att det saknades ett matematiskt symbolspråk, man hade inga formler för beräkning av area. Men från 1600-talet fick den analytiska geometrin sitt genomslag med funktioner och grafer (Descartes) och derivata och integraler (Newton och Leibniz), enligt Olsson (1999, s. 127).

Descartes (1596-1650) introducerade algebran till geometrin. Han beskrev grunderna för den analytiska geometrin, vilket betyder att man med hjälp av koordinatsystem och algebra, det vill säga med ekvationer och funktioner, kan studera räta linjer, kurvor, plan och ytor. Descartes införde alltså den symboliska geometrin där man kan räkna med bokstäver istället för givna tal. Detta blir en milstolpe i geometriens utveckling, införandet av koordinatsystem gjorde att punkter i planet kunde beskrivas som talpar, räta linjer och cirklar med ekvationer. Att kunna bestämma största och minsta arean av ett område är viktigt till exempel för att ta reda på den rektangel som har störst area med en given omkrets. Genom att använda derivator och integraler beräknas detta. Denna teori utvecklades av Newton och Leibniz under slutet av 1600-talet (Tengstrand, 2005, s. 128).

Matematiker på 1800-talet insåg att Euklides parallellaxiom inte längre gäller om vi tänker oss att vi bor i en värld där alla punkter i världen befinner sig innanför en cirkel. Därmed skapades en ny geometri, den icke-euklidiska, enligt Dahl (1991, s. 22). Detta påverkade synen på geometri och under perioden 1905-1962 förändrades geometriundervisningen i Sverige, man var kritisk mot de läroböcker som följde Euklides Elementa. Nu fokuserade man på symmetri och vinkningar som ansågs vara mer naturligt, enligt Prytz (2007, s. 196ff).

### 2.3 Varför geometri?

Motiv för geometriundervisning i skolan har varierat genom historien, enligt Gennow och Wallby (2010, s. 1). Den euklidiska geometrin som användes i Sverige från 1700-talet poängterade betydelsen av geometri som förkunskap för högre studier i matematik samt ett ämne att öva förståendet på. Under 1800-talet var det kopplingen till mätningar som poängterades medan det i början av 1900-talet var ett motiv för mer laborativ matematikundervisning. Svenska elever har svårt för geometri och detta kan delvis förklaras med att i och med reformeringen av grundskolan och gymnasieskolan efter 1950, försvann en stor del av den euklidiska/klassiska geometrin som funnits i realskolan (Gennow & Wallby, 2010, s. 1).

Tengstrand (2005, s. 103) menar att geometrin har en pedagogisk fördel eftersom den bildmässigt kan konkretisera matematiska resonemang och den innehåller många problem som kräver logiskt tänkande för att lösas. Den kan också öka förståelsen för algebran. Även Löwing (2011, s. 15) motiverar behovet av geometrin med att geometriska problem förekommer i många såväl vardagliga som yrkesrelaterade situationer, men att geometrin är intressant i sig. Med hjälp av geometrin kan elever utmanas och få att tänka i nya banor. Hon poängterar också de historiska och kulturella aspekterna. Både Löwing och Tengstrand menar att geometrin kan utveckla de matematiska kompetenserna som förmågan att lösa matematiska problem, förmågan att strukturera samt förmågan att abstrahera.

## 2.4 Geometrin idag

Det behövs kunskap om grundläggande begrepp för att kunna beskriva och diskutera geometri, enligt Löwing (2011, s. 30). Man måste veta vad som menas med punkt, linje och sträcka, att en sträcka är en begränsad del av linjen som man kan mäta längden av. En triangel kan beskrivas med hjälp av tre räta linjer som dras mellan tre punkter (Löwing, 2011, s. 38).

Geometri betyder jordmätning och handlar således om mätning av längder, areor och volym. Här presenteras den geometri som vi använder oss av idag i skolan utifrån det valda området geometriska objekt och deras relationer och egenskaper, från den tidiga undervisningen i grundskolan till den undervisning som sker på gymnasiet inom detta område. Därför har indelningen omkrets, area och volym valts, eftersom nästa steg i att utveckla kunskaper om grundläggande geometriska objekt är att kunna beräkna omkrets, area och volym för dessa (Skolverket, 2011a, s. 62).

I geometri, både för årskurs 4 och 8, visade det sig att förståelsen av areabegreppet, dess konservervation och additivitet inte behärskades till fullo av en större grupp elever. På grund av de misstag som eleverna uppvisade framgick att undervisningen sannolikt inte hade varit inriktad på begreppslig förståelse. (Bentley, 2008, s.13).

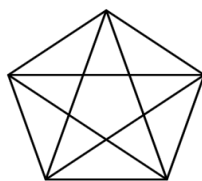
Detta säger Bentley efter att ha analyserat resultaten av TIMSS 2007. Det är av stor vikt att eleverna har en god begreppsförståelse för att i senare årskurser förstå area, konservervation och additivitet. Med konservervation menas att arean förblir lika stor om en yta delas upp och sätts ihop på ett nytt sätt. Area är också additiv, det vill säga, för att få arean av en sammansatt figur kan de olika delfigurernas areor adderas.

### 2.4.1 Omkrets

Omkrets innebär, enligt Löwing (2011, s. 192), längden av en sluten kurva, till exempel hur långt det är runt en cirkel eller summan av sidorna i en månghörning. Löwing menar att många elever blandar samman area och omkrets och för att motverka detta kan det vara en fördel att koppla räknelagar och algebra till geometrin. En rektangel med sidorna  $a$  och  $b$  skulle då ha omkretsen  $a+b+a+b$  eller  $2(a+b) = 2a+2b$ , vilket skulle medföra att en kvadrat skulle ha omkretsen  $4 \cdot a$ . Detta kan jämföras med arean för en kvadrat som är  $a^2$  det vill säga  $a \cdot a$ . Många elever tror att ju längre omkrets ju större area och för att undvika detta kan man låta dem laborera till exempel med en kvadrat som är ledad i hörnen och på det sättet går att göra till en romb.

Cirkelns omkrets kan man ta reda på praktiskt genom att göra en markering på ett hjul och rulla detta ett varv och därefter mäta sträckan. Men för att kunna beräkna cirkelns omkrets matematiskt måste vi känna till  $\pi$  (pi) och att cirkelns omkrets är diametern  $\cdot \pi$ . Arkimedes räknade fram  $\pi$  genom att börja med den inskrivna sexhörningen i cirkeln. Cirkelns omkrets måste vara större än sexhörningens omkrets. Sedan utgick han från tolvhörningen och så vidare, tills han slutligen kom till en 96-hörning och därigenom komma fram till  $\pi = 3,14286$ .

Den regelbundna femhörningens (pentagonens) diagonaler förhåller sig till sidornas längd som  $(\sqrt{5}-1)/2$ . Denna proportion kallas för gyllene snittet. Genom att känna till diagonalens längd i en femhörning kan sidornas längd räknas ut.



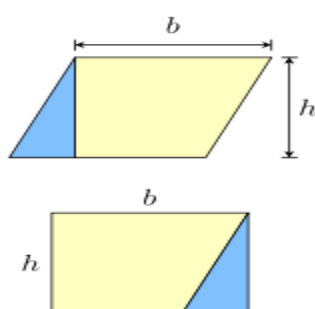
(Bild från <http://sv.wikipedia.org/wiki/Pentagram>, 120607)

Pythagoras sats är en av satserna inom geometrin som används för att räkna ut en rätvinklig triangelns längd på sidorna.

### 2.4.2 Area

Med area menas storleken hos en yta. Löwing (2011, s. 123) menar att många elever lär sig en formel för att räkna ut area och när de möter figurer de inte känner till blir de ställda, för att motverka detta menar hon att en god begreppsförståelse gör att det är lättare att se geometriska objekt ur ett nytt perspektiv. För att kunna mäta arean av en figur är det viktigt att vrida och vända på den för att på det sättet förstå areans konservervation. Hon menar att ett bra sätt att introducera areabegreppet är att utgå från oregelbundna figurer och placera ett rutnät över för att förstå att area mäts i areaenheter i form av kvadrater.

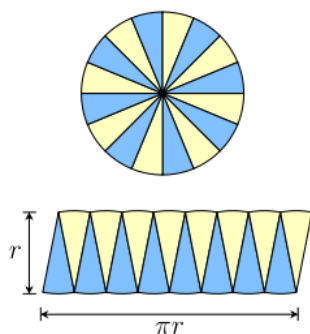
Man kan mäta area på en parallelogram genom att göra den till en rektangel, liksom härleda triangelns area genom att lägga samman två likadana trianglar så det blir en parallelogram. Detta bevisar areans konservervation.



( Bild från <http://sv.wikipedia.org/wiki/Area>, 120607)

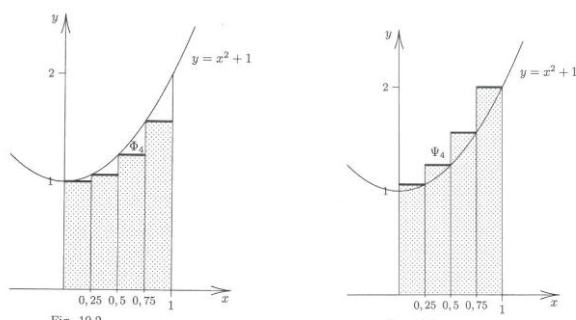
I bilden ovan kan man se att omkretsen förändras men arean är konstant.

Cirkelns area kan härledas genom att dela in cirkeln i små sektorer och sedan lägga dessa i form av en parallelogram/rektangel. Här använder man återigen konservervation av area.



( Bild från <http://sv.wikipedia.org/wiki/Area>, 120607)

Rodhe och Sigstam (2006, s. 253) skriver om en av Platons lärjungar som försökte utveckla en teori som gick ut på att omskriva cirkeln med in- och omskrivna figurer, vars areor man kunde beräkna med en trappstegsfunktion. De räknade ut arean av rektanglar och fick en över- respektive undersumma och kom därigenom fram till ett ganska exakt svar.



(Bilder från Rodhe & Sigstam, 2006, s.254)

Men ett verktyg för att systematiskt räkna ut detta exakt är med derivata och integraler och den teori som kallas differentialkalkyl som utvecklades av Leibniz och Newton på 1600 – talet. Detta är en tillämpning som är unik för den analytiska geometrin, till skillnad mot den klassiska/euklidiska geometrin som används i skolan vid beräkning av till exempel arean av en triangel. Optimeringsproblem är viktigt inom geometrin för att kunna bestämma största respektive minsta arean, att utifrån en given omkrets hitta den rektangel som har till exempel störst area. Här kan man gissa och prova med olika längder på sidorna tills man kommer till den maximala arean, som man då kommer upptäcka är kvadraten, eller använda sig av integraler.

Integraler kan jämföras med trappstegsfunktionen som Platons lärjungar räknade med men där en integral är summan av ett oändligt antal rektanglar som är oändligt smala. Med integraler kan vi alltså idag beräkna ett exakt värde. Integralkalkylen definieras enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 169):

Arean räknad med tecken av den yta som begränsas av grafen till funktionen, x-axeln och de båda vertikala linjerna genom intervallets ändpunkter. Integralen ges av arean under funktionskurvan.

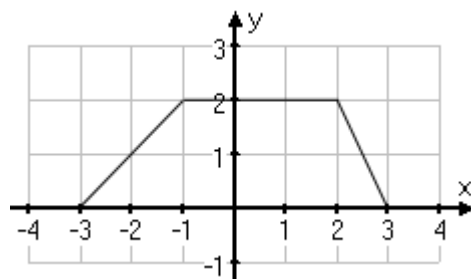
Om funktionen är  $f$  och intervallet  $[a, b]$  skrivs integralen över intervallet som:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

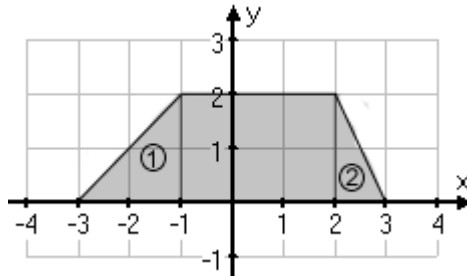
Svaret på integralen blir ett tal och står för antalet areaenheter. 1 areaenhet motsvarar 1 ruta i koordinatsystemet.

Ett exempel på hur man kan beräkna integraler:

$$\int_{-3}^3 f(x)dx.$$



Vi delar in bilden i två trianglar respektive en rektangel.



(Bilder från <http://www.matteguiden.se/matte-d/integraler/definition-av-integraler/>, 120607)

Den första triangeln har basen 2 och höjden 2, vilket ger arean  $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$  areaenheter.

Den andra triangeln har basen 1 och höjden 2, vilket ger arean  $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$  areaenhet.

Rektangeln har basen 3 och höjden är 2, vilket ger arean  $A = 3 \cdot 2 = 6$  areaenheter.

Vi räknar ut respektive area och lägger sedan ihop dem och får då svaret på integralen.

Alltså:  $\int_{-3}^3 f(x) dx = 2 + 6 + 1 = 9$  areaenheter.

Definitionen för en obestämd integral är, enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 170):

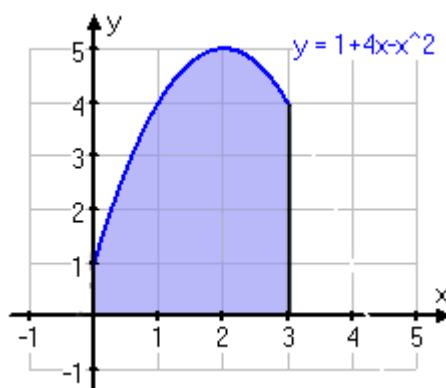
Mängden av alla primitiva funktioner till den givna funktionen, med primitiv funktion menas funktion vars derivata är den givna funktionen. Formeln lyder:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Där funktionen  $f$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  och  $F$  är en primitiv funktion till  $f$  på intervallet, det vill säga områdena begränsas av en funktion i intervallet från  $a$  till  $b$ . Detta gäller om det endast är en kurva.

Exempel på beräkning av area under en kurva:

Här beräknas arean under kurvan med ekvationen  $y = 1 + 4x - x^2$  i intervallet 0 till 3.



(Bild från <http://www.matteguiden.se/matte-d/integraler/areaberakningar/>, 120607)

Alltså blir integralen:

$$Y = \int_0^3 (1 + 4x - x^2) dx$$

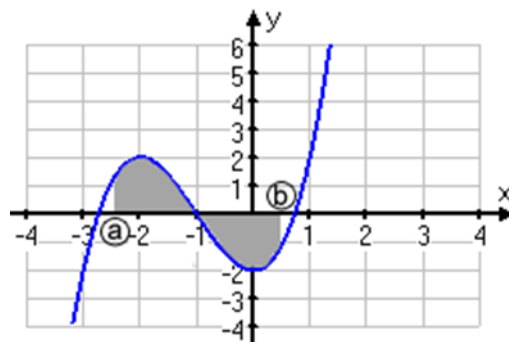
Den primitiva funktionen blir:

$$Y = \int_0^3 (1 + 4x - x^2) dx = \left[ x + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left[ x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

Integralen ska beräknas i intervallet 0 till 3, alltså sätter vi in  $x = 3$  och  $x = 0$ :

$$Y = 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} - \left( 0 + 2 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) = 3 + 18 - 9 - 0 = 12$$

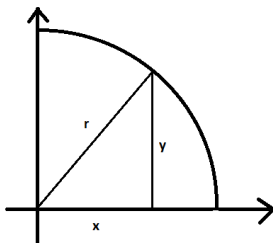
Detta betyder att arean under kurvan är 12 areaenheter.



(Bild från <http://www.matteguiden.se/matte-d/integraler/definition-av-integraler/>, 120607)

Integralen är arean över x-axeln – arean under x-axeln, man subtraherar den del som ligger under x-axeln från den som ligger över, se bild ovan. Till skillnad mot area som alltid har ett positivt värde kan integraler också ha ett negativt värde, om funktionen som vi integrerat varit negativ, blir integralen negativ. Om man vill ha den sammanlagda skuggade arean måste man istället lägga ihop arean ovanför x-axeln med arean under x-axeln (Rodhe och Sigstam, 2006, s. 260).

Till slut visas hur cirkelns area beräknas med hjälp av integraler. Genom att placera cirkeln i ett koordinatsystem med medelpunkten i origo, behöver vi endast räkna på  $\frac{1}{4}$  cirkel, den del som ligger över x-axeln. Cirkelns ekvation blir  $x^2 + y^2 = r^2$ , enligt Pythagoras sats där  $x$  och  $y$  är kateter och  $r$  hypotenusan (Rodhe och Sigstam, 2006, s. 283).



Genom att lösa ut  $y$  som funktion av  $x$  får vi:  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Arean av kvartscirkeln får vi genom att beräkna den bestämda integralen:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Nu är det enklast att göra ett variabelbyte genom att sätta  $x = r \sin v$

$$\frac{dx}{dv} = r \cos v \text{ Integrationsgränserna blir då: } x = 0 \text{ vilket ger } v = 0 \text{ och } x = r \text{ vilket ger } v = \frac{\pi}{2}$$

Då blir integralen:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 v} \cdot r \cos v \, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - \sin^2 v} \cdot r \cos v \, dv = \\ & r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 v} \cdot \cos v \, dv = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \, dv = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2v + 1}{2} \, dv = \\ & = r^2 \left[ \frac{\sin 2v}{4} + \frac{v}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left( \left( \frac{\sin \pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - 0 \right) = \frac{\pi r^2}{4} \end{aligned}$$

$A = \frac{\pi r^2}{4}$  alltså arean för  $\frac{1}{4}$  av cirkeln, vilket ger cirkelns area:  $A = \pi r^2$  (Rodhe och Sigstam, 2006, s. 284).

### 2.4.3 Volym

Enligt Löwing (2011, s. 91) är det viktigt att elever behärskar de plana figurernas egenskaper eftersom kroppar byggs upp av grundläggande plana figurer, till exempel är rätblocket uppbyggt av sex rektangulära sidoytor. Det är viktigt att förstå begreppen sidoyta, kant och hörn och inte blanda ihop de plana formernas sida med kroppens sidoyta. Det är också viktigt att kunna skilja på figurers och kroppars namn så att man till exempel inte kallar ett rätblock för åttahörning bara för att det har åtta hörn, eftersom det är namnet på en tvådimensionell figur. Det grekiska namnet för rätblock är hexaeder som betyder kropp med sex sidoytor. Även uttrycket *fyrkant* används felaktigt för fyrhörningar, eftersom begreppet *kant* endast förekommer inom rymdgeometrin, enligt Löwing.

Leonhard Euler (1707-1783) är en känd matematiker som fann ett samband mellan kroppars sidoytor, kanter och hörn:

$$\text{Antalet sidoytor} + \text{antalet hörn} = \text{antalet kanter} + 2$$

Löwing menar att det kan vara en fördel att introducera volymbegreppet på liknande sätt som areabegreppet, med de oregelbundna kropparna. Då kan man, liksom Arkimedes, beräkna volymen på en sten genom att sänka ner den i ett litermått och på det sättet få barnen att öka sin begreppsförståelse för volym. Areaenheten introducerades med hjälp av ett rutnät, på samma sätt skulle volym kunna introduceras, genom att använda en enhetskub. På det sättet ökar förståelsen för att även volymen är konstant, även om man vänder och vrider på objektet.

Ett prisma kan ha basytan i form av en triangel, kvadrat, femhörning och så vidare. Att beräkna kroppars volym är en viktig del av geometrin till exempel volymen av ett prisma som är basytan  $b \cdot$  höjden  $h$  för ett rakt prisma.

Detta är ett prisma med basytan i form av en kvadrat, ett rätblock.



Om basytan är i form av en cirkel kallas objektet cylinder. Även cylinderns volym blir således basytan  $\cdot$  höjden. Även om prismet eller cylindern skulle vara sned blir volymen densamma, detta skulle kunna åskådliggöras med till exempel ett paket med runda pepparkakor som läggs på varandra, rakt respektive snett.

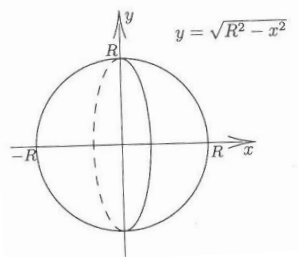


Pyramidens volym är  $(b \cdot h) / 3$  eftersom pyramidens volym är en tredjedel av basens area gånger höjden. Arkimedes kunde bevisa att de tre kropparna cylinder, halvklot och kon, med samma basyta och höjd, förhåller sig som 3:2:1 i förhållande till deras volym. Detta gjorde han genom att dela upp dem i tunna skivor (jämför pepparkakorna). Genom att hälla vatten i dem och mäta kan detta bevisas praktiskt (Löwing, 2011, s. 159). Detta kan man idag beräkna med hjälp av integraler.

Exempel: Volymen av en sfär med radien  $R$  (Rodhe & Sigstam, 2006, s. 315).

Vi betraktar sfären som en rotations kropp där halvcirkeln roterar runt  $x$ -axeln.

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{jämför cirkeln}) \quad y \geq 0$$



(Bild från Rodhe & Sigstam, 2006, s. 315)

Halvcirkeln motsvarar funktionen  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  vars graf skär  $x$ -axeln i  $-R$  och  $R$ , vilket då blir integrationsgränserna. Vi får då:

$$V_{\text{sfär}} = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Detta är formeln för att beräkna klotets volym.

## 2.5 Didaktiska perspektiv på geometriundervisningen

Löwing (2011, s. 7) menar att det som begränsar vad eleverna lär sig är lärarnas kunskaper och för äldre elever är det dessutom elevernas bristande förkunskaper. Hon menar att skolans undervisning i större grad bör lära yngre barn grundläggande begrepp och egenskaper hos geometriska objekt. För att detta ska lyckas krävs en didaktisk ämnesteor, undervisningen bör konkretiseras för att därigenom nå abstraktion, gå från intuitiv och informell kunskap till formell kunskap.

### 2.5.1 Begreppsförståelse

Löwing (2011, s. 21) menar att redan vid den tidiga informella undervisningen, där små barn sitter och plockar med klossar eller annat laborativt material, är det viktigt att läraren använder korrekta

termer. Elevernas förhållningssätt beror på lärarens förhållningssätt, enligt Löwing, och hon vill att mycket av det vi betraktar som självklart ska ifrågasättas. Är det självklart att en fyrhörning med parallella sidor också har parvis lika långa sidor?

Små barn som använder figurer och kroppar bör få lära sig begreppen sida, sidoyta, kant och hörn men också ord för deras relationer som över, under med mera samt ord för jämförelse som större och mindre, enligt Löwing (2011, s. 23). Barn behöver också lära sig att till exempel area inte förändras om man klipper isär en figur och sedan sätter ihop den igen, det vill säga konservering av längd, area och volym, vilket svenska elever har svårt med, enligt Bentley (2008, s. 84).

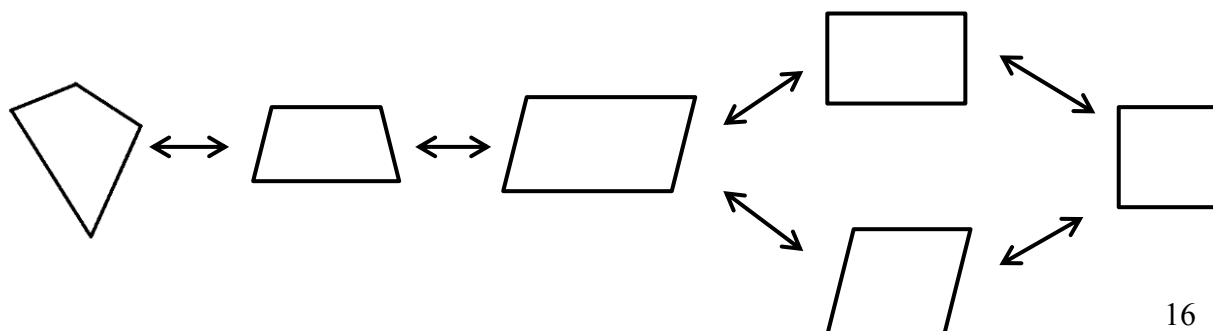
Löwing menar att begreppet fyrhörning är viktigare än kvadrat, speciellt i förskolan, men också att kunna klassificera, se likheter och olikheter mellan olika figurer och kroppar, hitta mönster med mera. Hon anser att man i skolan bör börja med de enkla oregelbundna formerna som fyrhörningar och trianglar och utgå från symmetriska egenskaper och/eller antal sidor, hörn och vinklarnas storlek. Eleverna ska kunna skilja på rektangel, romb och kvadrat när de går i tredje klass, enligt Löwing (2011, s. 72).

### 2.5.2 Konkretisering

Genom att jobba konkret och laborativt kan eleverna på sikt lära sig föra logiska resonemang och reflektera över geometriska sammanhang. Löwing tar upp Friedrich Fröbel (1782-1852) och hans lekgåvor som består av klossar som det är meningen att barnen ska kunna jämföra och se samband emellan och på det sättet konkretisera och få en förståelse för de geometriska kropparna. Fröbel anser att barnen först ska bekanta sig med grundformerna för att sedan arbeta med delarna som bildar en helhet. Dessa lekgåvor har påverkat förskolans arbete med geometri, men tyvärr används detta material inte som det var tänkt utan bara som ett material att bygga med. En anledning till detta kan vara lärarnas bristande kunskaper (Löwing, 2011, s. 21).

Little och Jirotková beskriver i Boesen m.fl. (2007, s. 63) hur de har forskat kring hur barn skapar sig inre bilder av tredimensionella former och hur de tänker kring och arbetar med geometriska objekt och förståelsen för dess egenskaper. De menar att lärare och läroboksförfattare gör ett misstag när de utgår från de tvådimensionella objekten och att man inte utnyttjar den kunskap barnet har fått genom sin lek med de tredimensionella objekten. De menar att genom att kommunicera mer om det barnet upplever när de känner och ser de tredimensionella objekten skulle en större begreppsförståelse nås. Löwing (2011, s. 91) däremot menar att de bör kunna de tvådimensionella formerna innan de går vidare med kropparna, vilket inte stämmer med Little och Jirotková. Hon menar att elever i år 7 inte ens kan namnen på till exempel cylinder och räblock och än mindre kan relatera dem till varandra, detta kan nås genom att laborera mer. Eleverna kan uppleva hur de olika begreppen bygger upp kunskaper genom att förstå dem och därmed fyrhörningarnas egenskaper. Detta kan göras genom att utgå från den oregelbundna fyrhörningen till att göra två sidor parallella, ytterligare två, göra räta vinklar, lika långa sidor och så vidare. De behöver då inte lära sig en massa formler utan samband, enligt Löwing, och undervisningen ger ett sammanhang och en helhetssyn på geometri.

Detta kan åskådliggöras med en begreppskarta:



Här ser man att en kvadrat är både en romb och en rektangel, men också en parallelogram och en parallelltrapets och en fyrhörning.

För att förstå volym behöver eleverna förstå hur kroppar är uppbyggda och detta redan de första skolåren, även om det då är volym mätt i liter. Hon menar att undervisningen om volym kommer in alldeles för sent och görs för formell, därav elevernas bristande kunskaper inom volym (Löwing, 2011, s. 168).

## 2.6 Tidigare forskning

### 2.6.1 Mål med undervisningen

Både Skolinspektionens forskningsrapport (2009:5, s. 21) och Bergqvist m.fl. (2009, s. 50) talar om vikten av att ha tydliga mål med undervisningen, hur pass skolans läromedel är kopplade till målen och hur de används i praktiken samt i vilken utsträckning lärarens praktik är kopplad till läroplanens och kursplanens mål. Detta är en avgörande faktor för att fler elever ska nå målen i matematik. Andelen elever som inte uppnått målen på ämnesprovet i matematik i årskurs 9 har ökat från 9 procent 2003 till 19,3 procent 2011.

Bergqvist m.fl. tar upp de kompetenser som tydligare förklarar begreppet förståelse, till exempel representationskompetens som innebär "...förmåga att ersätta en matematisk företeelse med en annan. Exempelvis att representera en abstrakt företeelse (t ex begreppet sfär) med ett konkret materiellt (t ex en boll) eller mentalt objekt (t ex tanken att alla punkter på ytan befinner sig på samma avstånd från centrum)" (Bergqvist m.fl., s.10). Detta överensstämmer med kursplanens syfte, där förmågorna/ kompetenserna lyfts, det vill säga målet med undervisningen.

Många lärare har inte reflekterat över relationen mellan mål och arbetsätt, bland annat genom att inte beskriva hur deras arbetsätt kopplas till målen i kursplanen. Slutsatsen blir att lärarna inte planerar aktiviteterna i klassrummet utifrån kursplanens och läroplanens samtliga mål och att eleverna därmed riskerar att inte få den undervisning de ska ha. Det är den enskilde lärarens förmåga att undervisa som är den viktigaste faktorn och då med betoning på lärarens förmåga att synliggöra lärandeprocessen (Bergqvist m.fl., 2009, s. 53).

### 2.6.2 Lärarens undervisning och användandet av läroböcker

Vilka *kompetensaktiviteter* som förekommer i lärandemiljön till exempel hur läraren leder undervisningen, diskuteras också i dessa rapporter. Detta sker oftast via presentationer vid tavlan och via lärarens dialog i helklass. Svensk matematikundervisning är starkt påverkad av läroböckerna, mellan 50-100 procent av tiden arbetar eleverna med lärobokens uppgifter. Det är viktigt att lärare är medvetna om och kritiska till de läroböcker de använder. En god kompetens hos lärarna både ämnesteoritiskt och didaktiskt ger dem förutsättningar att på ett bra sätt förhålla sig till läroböckerna och deras stöd för undervisningen, enligt Bergqvist m.fl. Enskilt arbete med matematikuppgifter antingen i ett läromedel eller med stencil är den vanligaste arbetsformen. Av detta ägnas en stor del av tiden för att utföra procedurer och resten till att träna övriga kompetenser som beskrivs i kursplanens syfte (Skolinspektionen, 2009:5, s. 8; Bergqvist m.fl., 2009, s. 49).

Matematikdelegationen tar avstånd från detta och skriver:

Vi tar avstånd från den växande trenden av enskild räkning i svensk skola; allt talar för att denna trend är skadlig. För att de lärande skall få lust för och vilja till att lära sig meningsfull matematik krävs att lärarens kompetens och tiden för matematikundervisning utnyttjas bättre. Diskussioner och samtal i och om matematik skall vara en naturlig del av matematikundervisningen. Läraren

måste i större utsträckning ges möjligheter till och också själv sträva mot att aktivt leda och variera verksamheten i klassrummet. (SOU, 2004:97, s. 89).

Detta skiljer sig dock åt i olika skolår, till exempel arbetar år 1-3 mer med kompetenserna än senare årskurser. Läromedlen har allt för lite uppgifter som tränar kompetenserna, de fokuserar på procedurhantering, och detta borde då kompenseras med kompletteringar av uppgifter som tränar kompetenserna. Författarna ifrågasätter om läromedlen är bra ur kompetensmåls-perspektiv. Framgångsfaktorerna är att läraren har höga förväntningar på eleverna, att både läraren och eleverna har förstått undervisningens mål, att läraren kan variera undervisningen och anpassa den till elevernas kunskaper, intresse och den givna klassrumssituationen. Lärarens kompetens är nära förknippad med både förhållningssätt och undervisningens genomförande (Skolverket, 2011b, s. 28).

Individualiseringen har inneburit en förskjutning av ansvar från lärare till elev, vilket inte gynnar elevernas kunskapsutveckling och påverkar elevens motivation och engagemang negativt. Individualiserad undervisning där elever lämnas ensamma med arbete i läromedel förstärker till exempel sociokulturella faktorer betydelse och gynnar inte de svagaste eleverna. Matematiklärare är de som i minst utsträckning anger att de knyter an undervisningen till samhället och livet utanför skolan. Studier visar även att elever som har lätt för matematik anser att det generellt är för lite utmaningar och för mycket upprepningar i matematikundervisningen (Bergqvist m.fl., 2009, s. 49).

### 2.6.3 Från det konkreta till det abstrakta

Rapporten ”Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder” (Skolverket, 2011b) är en utvärdering av den matematiksatsning som gjordes efter den förra rapporten (Skolinspektionen, 2009:5), där fokus var att konkretisera undervisningen mer med hjälp av laborativa övningar ofta i matematikverkstäder, att komma ifrån räknandet i matematikboken och att tydliggöra målet med undervisningen.

Dock menar författarna till denna rapport, Löwing m.fl., att det blev för stort fokus på vad och hur. Varför, det vill säga fokus på varför eleven ska lära/förstå, hade tappats bort. Mål med aktiviteten sänkades utifrån kursplanernas syfte och kunskapskrav (Skolverket, 2011a, s. 62). Löwing m.fl. anser att arbetsform och arbetssätt är ett medel för att nå målet, inte ett mål i sig vilket de upptäckte allt för ofta när de besökte lektioner. Dessutom var den innehållsliga nivån ett par årskurser för låg och det var en dålig koppling mellan laborationer och förkunskaper. Alla elever gjorde samma sak, även de som redan nått kunskap inom området jobbade på konkret nivå trots att eleven hade nått abstraktionsnivån. Det förekom ingen färdighetsträning, som man kan få i en lärobok. Färdighetsträning är en viktig komponent för att ge flyt utan att belasta minnet för mycket. Avsikten med en laboration är att (åter-) upptäcka matematiken och utveckla förmågor som att föra och följa resonemang, enligt Löwing m.fl. och att kunna använda matematikens uttrycksformer det vill säga lära sig ny matematik. Det viktigaste är inte att rent fysiskt ta i materialet det vill säga ”gripa” utan att begripa, gå från det konkreta till det abstrakta. När detta skett behövs inte materialet mer, enligt Löwing m.fl. Att använda laborativt material trots att eleverna redan nått abstraktionsnivån är slöseri med tid, vilket gjordes på flera av de observerade lektionerna (Skolverket, 2011b, s. 85).

Rapporten betonar det språkliga, kommunikationen, att elevens uppfattning av begrepp måste synliggöras. Genom att studera deras missuppfattningar kan elevens begreppsförståelse utvecklas och abstraktionsnivån nås. Målet med att jobba mer laborativt och inte bara räkna i boken, menar författarna, är inte att ha varierad undervisning utan det bör i första hand vara att variera aspekter av innehållet i undervisningen och graden av konkretisering, så att den anpassas till olika individer för att kunna formulera, reflektera, argumentera och kommunicera (Skolverket, 2011b, s. 91).

Nilsson (2005, s. 80) har skrivit en avhandling om lärarstudenters arbete med geometri-laborationer och problemlösning med fokus på just omkrets, area av plana figurer och volym av enkla kroppar. Han ville ta reda på hur arbete med laborationer i grupp kunde bidra till att ändra studenters attityd till geometri, förändra deras sätt att förklara elementära geometriska samband och begrepp som area och volym, samt urskilja kritiska drag i lärarstudenternas sätt att leda elevlaborationer. Genom gruppdiskussioner tvingas de förklara och ta del av andras förklaringar vilket är utvecklande för det matematiska språket, det vill säga begreppsförståelsen. Lärarens roll att peka på det viktiga är en annan viktig faktor. Han drar slutsatsen att en stor del av lärarutbildningen bör ägnas åt laborationer i matematik, men med fokus på hur laborationerna leds och att arbetet sätts in i ett pedagogiskt sammanhang. Detta överensstämmer med Skolinspektionens rapport (2009:5, s. 21), Bergqvist m.fl. (2009, s. 49) samt Skolverket (2011b, s. 80). Nilsson menar att lärare ska ha goda kunskaper både i och om matematik samt en förmåga att konkretisera och kommunicera med eleven på ett förtroendefullt sätt så denne känner sig trygg.

#### 2.6.4 Tidigare forskning om läromedel

Prytz (2007, s. 195ff) har skrivit en avhandling om geometriundervisningen under åren 1905-1962 och undersökt de läromedel som användes då, både läroböcker och annan litteratur som till exempel kompendier och instruktionshäften om geometri. Han valde att fokusera på denna tid eftersom geometriundervisningen genomgick stora förändringar under 1960-talet, man övergav de läroböcker som byggde på Elementa och introducerade nya böcker. I Folkskolan var det viktigt att begrepp och formler presenterades på ett åskådligt sätt, vilket skulle ske med observationer och experiment. Prytz ser att efter 1925 så blir läroböckerna mindre åskådliga och eleverna ska klara sig mer själva.

Johansson (2006, s. 26ff) har också undersökt läromedel och deras användning i matematikundervisningen. Hon har undersökt detta utifrån olika perspektiv med fokus på kopplingen mellan läroboken och kursplanen, men också hur ett läromedel påverkar interaktionen mellan lärare och elev. Det är både läromedel som styr undervisningen, men också läraren som valt uppgifterna i läromedlet och hjälper eleven att hitta lösningen. Hon menar att läroboken styr typen av uppgifter eleverna jobbar med men också det läraren presenterar vid tavlan samt vilken typ av begrepp som tas upp och hur de tas upp. Även denna undersökning visar på att stora delar av lektionerna används till enskild räkning i ett läromedel.

Johansson ställer sig frågan om det spelar någon roll att läromedel styr undervisningen. Det underlättar lärarens arbete, eftersom läromedel ofta är uppbyggda på ett sådant sätt att de täcker de områden som eleven ska möta under ett läsår. Johansson har intervjuat elever och de upplever det monotont att arbeta i ett läromedel, det stimulerar inte lusten att lära. Hon ser också ett dilemma med hur man ska individualisera, det underlättar på det sättet att var och en arbetar med sitt men det försvårar helklassundervisning. Hon ifrågasätter om det är en lämplig metod för alla elever att lära sig matematik genom en matematikbok (Johansson, 2006, s. 31ff).

## 2.7 Sammanfattning teoridelen

Ett syfte med denna studie var att ta reda på vad det innebär att ha en begreppsförståelse i geometri utifrån innehållet, grundläggande geometriska objekt.

Undersökningar har visat att svenska elever har brister i främst geometri. Enligt Bentley är det främst den begreppsliga förståelsen av till exempel area som eleverna brister i. Därför har fokus i denna studie varit just begrepp inom området grundläggande geometriska objekt. Begrepp inom matematik är svårt eftersom vi bär med oss en föreställning av vad begreppet står för och den stämmer inte alltid överens med den matematiska definitionen av begreppet (Tall & Vinner, 1981, s. 2ff; Bråting, 2004, s. 23; Sjögren, 2011, s. 55ff).

Dessutom har geometrins plats inom matematiken varierat genom tiderna, från att på Platons tid ha ansetts som något mycket viktigt till att på 1960-talet delvis tagits bort från undervisningen i skolan (Prytz, 2007, s. 195ff). Detta har påverkat synen på geometrin och därmed också svenska elevers kunskaper inom geometri. På senare år har geometrin återfått sin plats inom matematiken vilket bland annat läroplanen för 2011 visar med det centrala innehållet.

Denna studie har fokus på de grundläggande geometriska objekten och de begrepp elever måste kunna använda och analysera inom detta område. Förutom att kunna de begrepp som beskrivs i det centrala innehållet måste eleverna förstå till exempel sida, hörn och kant för att kunna beskriva ett objekts egenskaper. De måste ha begrepp för att kunna jämföra olika objekt, uttrycka likheter och skillnader. Dessutom fokuserar denna studie på de matematiska områdena omkrets, area och volym, eftersom det är dessa områden som är knutna till grundläggande geometriska objekt i grundskolan och gymnasiet. Studien behandlar hur geometrin tas upp idag inom dessa områden från förskolan till studier på gymnasienivå. Detta för att få en helhetssyn på dessa områden. Det är viktigt att elever förstår skillnaden på omkrets och area och detta kan tydliggöras genom att koppla räknelagar och algebra till geometrin. De måste förstå att omkrets är en längd och att area är storleken på en yta (Löwing, 2011, s. 192). De måste förstå areans konservering och genom att härleda olika formers area kan förståelse för detta nås. Även att förstå att kroppars volym är konstanta är viktigt. I denna studie redogörs för progressionen inom områdena omkrets, area och volym genom att redogöra för hur grunderna läggs redan i förskolan, med begreppsförståelsen. Sedan byggs kunskaperna på för att slutligen redogöra för den geometri som behandlas på gymnasiet med differentialkalkyler.

Dessutom redogörs för didaktiska perspektiv på geometriundervisningen, för att få svar på frågorna hur elever lär sig begrepp och vilka representationsformer som bör användas för att eleverna ska utveckla sina kunskaper inom geometri. Didaktiskt finns vissa avgörande faktorer för en lyckad undervisning. Dessa är, förutom läraren och dennes förhållningssätt:

- Begreppsförståelse
- Konkretisering, från det konkreta till det abstrakta
- Tydliga mål med undervisningen

Utifrån teoridelen har de första frågorna i problemformuleringarna besvarats och dessa redogörs för nedan.

- **Vilken kunskap i geometri krävs för att nå upp till målen i grundskolans läroplan? Vad krävs för att förstå begreppen omkrets, area och volym?**

För att elever ska nå upp till målen krävs en god begreppsförståelse. Det måste då först klargöras vilka begrepps bilder eleverna redan bär med sig när de kommer till skolan, för att undervisningen skall utgå från dessa och sedan utveckla dem till att slutligen överensstämna med de begreppsdefinitioner som finns i matematik. Detta utan att en inläring av definitioner sker utantill och med vetskapen om att vid högre abstrakt matematik kan inte begrepps bilder användas (Tall & Vinner, 1981, s. 2ff; Bråting, 2004, s. 23; Sjögren, 2011, s. 55ff).

För att elever ska lära sig begrepp och att kunna använda och analysera dem behövs en god kommunikation mellan den vuxne och barnet. Genom att barnet får höra rätt terminologi och själv får börja använda sig av denna kommer barnet utveckla en god begreppsförståelse. Löwing påtalar vikten av att ifrågasätta det som ses som självklart, genom att ställa frågor kan barnet upptäcka likheter och skillnader, se mönster och på det sättet klassificera. Även Littler och Jirotková i Boesen m.fl. (2007, s. 63) anser att en förbättrad kommunikation med barnet, av de upplevelser barnet får när de känner och ser de tredimensionella objekten, skulle förbättra deras begreppsförståelse. Matematikdelegationen (SOU, 2004:97) menar att diskussioner och samtal ska vara en naturlig del av matematikundervisningen. Det språkliga, kommunikationen, måste

synliggöras för att missuppfattningar ska upptäckas och eleven utvecklas mot ett abstrakt tänkande (Skolverket, 2011b, s. 90). Även vuxna, i detta fall lärarstudenter, utvecklar sin begreppsförståelse genom att tvingas förklara och ta del av andras förklaringar (Nilsson, 2005, s. 110).

Det finns främst tre avgörande faktorer för att nå en lyckad inläring nämligen begreppsförståelse, konkretisering och tydliga mål med undervisningen (Skolverket, 2011b, s. 90). Löwing (2011, s. 12) menar att skolan tidigare måste lära barn grundläggande begrepp och egenskaper hos geometriska objekt och detta görs genom att konkretisera undervisningen mer. Genom att få ta i objekt, få vrida och vända på dem skapas en större förståelse för hur de är uppbyggda. Undervisningen ska utgå från kursplanens syfte och centrala innehåll, och utifrån detta ska tydliga mål för eleven konkretiseras. Det måste bli en tydligare koppling mellan mål och arbetssätt och lärare måste vara mer kritiska till läromedel (Skolinspektionen, 2009:5, s. 21; Bergqvist m.fl., 2009, s. 49).

Inom det valda området, geometriska objekt och omkrets, area och volym, kan större förståelse nås genom att eleverna får arbeta mer laborativt, genom att tidigt, konkret, få använda plockmaterial och analysera dessa utifrån begrepp. Genom att med bilder rita och med material konstruera två- och tredimensionella objekt, genom att logiskt/språkligt få uttrycka sina tankar kring de moment de arbetar med och att få använda matematikens uttrycksformer kommer deras bilder av begrepp utvecklas (Löwing, 2011, s. 31). Samtidigt måste man vara medveten om att det är den abstrakta matematiken som slutligen ska nås. Därför är det viktigt att inte använda laborativt material om eleven redan nått abstraktionsnivån. Avsikten med att arbeta laborativt och inte bara räkna i en bok bör vara att variera innehållet i undervisningen och anpassa graden av konkretisering utifrån varje elevs behov. Löwing påtalar dock att det också är viktigt med färdighetsträning, vilken kan fås med hjälp av ett läromedel (Skolverket, 2011b, s. 11). Både Nilsson (2005, s.113) och Löwing (Skolverket, 2011b, s. 11) menar att det är av vikt hur laborationerna leds av läraren och att dessa sätts in i ett pedagogiskt sammanhang. Därför är det viktigt hur ett läromedel är kopplat till målen, det vill säga kursplanerna i matematik och om dessa bidrar till ett varierat arbetssätt som skapar lust att lära, vilket även Johansson (2006, s. 29) tar upp i sin avhandling.

Elever behöver alltså möta olika representationsformer och utgå från det konkreta för att nå det abstrakta. Undervisningen ska ha tydliga mål och bygga på ett laborativt arbetssätt, med många möjligheter att uttrycka sig språkligt. Därför bör också de läromedel som används av skolorna vara uppbyggda på detta sätt om eleven ska ges förutsättningar att kunna nå målen.

Bentley (2008, s. 140) menar att om eleverna har en god begreppsförståelse kommer de i senare år förstå area, konservering och additivitet. Genom att under de tidiga åren i skolan ha fått arbeta konkret med de geometriska objekten och med olika uttrycksformer fått utveckla sin begreppsförståelse kommer elevernas kunskaper fortsätta att utvecklas. De ska i kommande årskurser till exempel förstå omkrets och skillnaden på omkrets och area, genom att utgå från det konkreta för att slutligen nå den abstrakta nivån. Cirkelns omkrets till exempel kan man ta reda på praktiskt med ett hjul eller genom att räkna med  $\pi$  och en formel. Eleverna ska förstå begreppet area och inte bara lära sig en formel för att beräkna area. Genom att till exempel dela in cirkelns area i sektorer kan de få en konkret förståelse för cirkelns area (Löwing, 2011, s. 149). För att i senare studier använda sig av integraler för areaberäkning. Eleverna ska också kunna beräkna kroppars volym, de ska ha förståelse för och kunna härleda de formler som används för beräkning av kroppars volym. Från att mäta volym i till exempel enheten deciliter och exemplet Löwing beskriver med att lägga en sten i ett litermått till att även här beräkna volym med integraler.

Teorigenomgången behandlar områdena omkrets, area och volym med motiveringen att det är nästa steg i elevens kunskapsutveckling inom geometriska objekt efter år 3. I det centrala

innehållet för år 6 ska eleven kunna metoder för att bestämma area och omkrets och för år 9 ska dessutom volym för geometriska kroppar kunna behandlas (Skolverket, 2011a, s. 62). Det är viktigt att veta vad kunskapen ska leda till och Bråting (2004, s. 23) diskuterade hur läroböcker i matematik anknyter till vardagliga exempel till exempel då man ska beräkna area och volym. Att kunna använda begrepp är själva målsättningen men man får inte ha en för stark tilltro till att matematiken alltid kan åskådliggöras, enligt Bråting, särskilt inte när det handlar om matematik som involverar oändligheten. Därför presenteras i denna studie även den geometri som används på gymnasiet, till exempel hur beräkning av area har utvecklats genom tiderna från den praktiska i Egypten för många tusen år sedan till dagens differentialekalkyler.

### 3 Metod

Undervisningen i matematik är starkt läromedelsbunden. Därför kan man dra slutsatsen att det är viktigt hur läromedlen presenterar begrepp, hur pass konkret/abstrakt detta görs och att det finns tydliga mål, för att eleverna ska nå kunskapsmålen. Att kritiskt granska läromedel är en förutsättning för att vi ska vara säkra på att nå läroplanens intentioner och de mål och kunskapskrav som presenteras där, för att elever i svensk skola ska nå de satta målen.

För att kunna granska läromedlen har utgångspunkten varit den kunskap som kommit fram i teorigenomgången. Utifrån detta har analysfrågor formulerats för att det andra syftet ska nås och den andra problemformuleringen besvaras:

- **Hur presenteras de grundläggande geometriska objekten i några läromedel? Kan man nå läroplanens mål i geometri för år 3 genom att arbeta med olika läromedel?**

Nedan presenteras den metodansats som valts för att det andra syftet med denna studie ska nås och problemformuleringarna besvaras. Därefter beskrivs datainsamlingsmetod, urval, genomförande, databearbetning och analysmetod, samt tillförlitlighet. Sedan kommer en presentation av de analyserade läromedlen.

#### 3.1 Metodansats

Detta är en kvalitativ studie. En kvantitativ studie hade till exempel kunna utgått ifrån hur många gånger olika begrepp tas upp i olika läromedel, men här analyseras *om* och *hur* begreppen behandlas för att eleverna ska nå kunskapsmålen. För att det första syftet skulle nås studerades litteratur som beskriver hur elever lär sig begrepp och vilka representationsformer som bör användas. Den andra delen av denna studie består av en analys av lärarhandledningar för år 1 till 3. Denna har gjorts utifrån en hermeneutisk ansats det vill säga genom att försöka tolka och förstå författarens intentioner (Fejes & Thornberg, 2009, s. 136). Dessa menar att ”Hermeneutiken handlar enkelt sett om att läsa, förstå och skapa mening ur texter, antingen med fokus på textförfattarens avsikt eller läsarens tolkning av texten”(s. 138).

Metodansatsen blir således textanalys av läroböcker i matematik, en kvalitativ analys görs med hermeneutisk ansats och en jämförelse av de olika läromedlen utifrån analysfrågor.

#### 3.2 Datainsamlingsmetod

Studien består både av en teorigenomgång där svar söktes på frågorna vilken kunskap i geometri som krävs för att nå upp till målen i grundskolans läroplan och vad som krävs till exempel för att förstå begreppen omkrets, area och volym. Dessutom består studien av en empirisk del som svarar på hur de grundläggande geometriska objekten presenteras i några läromedel och om man kan nå läroplanens mål i geometri för år 3 genom att arbeta med olika läromedel. Litteraturen i teorigenomgången bestod av tidigare forskning, avhandlingar och forskningsrapporter, av så sent datum som möjligt, samt litteratur om ämnet geometri och didaktiska böcker. Den empiriska delen utgick ifrån tre läromedel för åren 1-3 och hur dessa har valt att lägga upp arbetet med just begreppsförståelse inom området grundläggande geometriska objekt, utifrån hur konkret/abstrakt detta gjordes och om det gjordes med fokus på målen. Eftersom målen i kursplanen gäller år 1-3, behövdes samtliga lärarhandledningar för dessa årskurser, för att underlaget skulle vara heltäckande för år 1-3. Önskan var också att det skulle vara minst tre olika läromedel, för att på det sättet vara ett relativt gott underlag för jämförelse.

Kvalitativ textanalys kommer ur hermeneutiken som betyder läsa, förstå och skapa mening ur texter antingen ur författarens perspektiv eller utifrån läsarens tolkning. I denna studie har både läromedelsförfattarnas intentioner tolkats genom att läsa inledningar och grundtankar i lärarhandledningarna för att därigenom klargöra om de utgått från läroplanen/kursplanen. Men också själva textens form och innehåll och dess innehållsliga innebörd har tolkats, för att få en

förståelse för vilken innebörd texten får på eleven/läsaren, det vill säga en innehållslig textanalys (Fejes & Thornberg, 2009, s. 136). Fejes och Thornberg rekommenderar att använda frågor som redskap för textanalys, genom att formulera kritiska frågor kan en bärkraftig analys göras, enligt dem. Som metod i denna studie användes därför analysfrågor som verktyg.

### 3.3 Urval

För att nå målet behövdes samtliga grundböcker och samtliga lärarhandledningar, men eftersom grundbokens sidor finns avkopierade i lärarhandledningen har endast lärarhandledningar analyserats. Eventuella andra bredvid-böcker som läxböcker, fördjupningsböcker, extra kopieringsunderlag med mera har ej tagits i beaktande. Dessutom har bara de sidor/kapitel som tar upp det för denna studie valda centrala innehåll beaktats, det vill säga grundläggande geometriska objekt. Det övriga centrala innehållet under rubriken geometri i kursplanen har inte behandlats. Alltså har inte konstruktion av geometriska objekt, skala vid enkel förstoring och förminskning, vanliga lägesord för att beskriva föremåls och objekts läge i rummet, symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras, jämförelser och uppskattningar av matematiska storheter samt mätning av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter behandlats (Skolverket 2011a, s. 62). Förekommer de aktuella begreppen även inom dessa områden har detta bortsetts ifrån.

Målet var att få tag i relativt nya läromedel och läromedel som används mycket ute på skolorna. Tre läromedelsförlag kontaktades för att få svar på vilka läromedel som det säljs mest av just nu. Gleerups meddelade att de inte lämnade ut sådana uppgifter. Natur och Kultur meddelade att de mest sålda var Eldorado och Pixel. Liber svarade inte. Eftersom Eldorados och Pixels lärarhandledningar dessutom fanns på biblioteket valdes dessa. Kontakt togs med tre skolor för att kunna låna andra exemplar. En skola hade ett läromedel från 2010 men det var inte komplett. De övriga två skolorna hade samma läromedel, Mästerkatten, vilka lånades. Urvalet bestod således av ett läromedel från 2011 som enligt författarna har haft läroplanen från 2011 som utgångspunkt (Eldorado), ett läromedel från 2010 som är översatt från norska (Pixel) och vars författare också menar att de haft läroplanen som utgångspunkt samt ett läromedel från 2002 som inte behandlar läroplanen (Mästerkatten).

### 3.4 Genomförande

Svaret på den första problemformuleringen presenterades i kapitel 2.7. Det är denna kunskap som ligger till grund för den empiriska undersökningen i denna studie.

Det är viktigt att förstå sammanhanget då texterna skrevs, enligt Fejes och Thornberg, i detta fall om läromedelsförfattarna har haft läroplan och kursplan som utgångspunkt. En kvalitativ textanalys måste klargöra vilken dimension analysen bygger på. Det första som analyserades i den empiriska delen av denna studie var om läromedelsförfattarna hade läroplan och kursplan som utgångspunkt när de skrev läromedlet. Detta gjordes genom att studera inledningarna i lärarhandledningarna. Därefter analyserades lärarhandledningarnas avsnitt som tog upp innehållet i elevböckerna. Vid analysen av texterna riktades fokus mot textens innehåll och form, då är det inte författarens intentioner som står i fokus utan vilka begrepp och språkliga beteckningar som användes (Fejes & Thornberg, 2009, s. 136). Det andra syftet med denna studie var att undersöka om läromedel innehåller det som krävs för att eleverna ska nå målen. Utifrån de problemformuleringar som skapats för att nå detta syfte, formulerades frågor som fungerade som analysverktyg vid läromedelsanalysen. Först definierades om begreppen togs upp i de analyserade läromedlen sedan hur de togs upp. Här nedan presenteras analysfrågorna och en förklaring av dessa:

1. Behandlas begreppen punkt, linje och sträcka?
2. Behandlas punkt, linje och sträcka utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel genom bilder och/eller ord?

Förklaring: Behandlas punkt som ett objekt med läge men utan sträckning, linje som en rät linje som är rak och obegränsad åt båda håll. Behandlas begreppet sträcka som rak och begränsad åt båda håll? Vilka representationsformer används, finns det bilder, får eleverna rita bilder, uttrycks det i ord för att träna förståelsen av begrepp och får eleverna själva uttrycka det i ord samt hur används laborativt material?

3. Behandlas begreppen fyrhörningar, triangel och cirkel?
4. Behandlas fyrhörningar, triangel och cirkel utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel med konkret material, ord eller bilder?  
Förklaring: Behandlas begreppen sida och hörn? Tas andra begrepp upp för att beskriva formerna, som motstående sidor, räta vinklar med mera? Hur presenteras cirkeln? Görs det till exempel genom att förklara att det från varje punkt på cirkelns omkrets är lika långt till cirkelns mittpunkt. Behandlas olika exempel på fyrhörningar och trianglar? Vilka representationsformer används?
5. Behandlas det hur objekten relaterar till varandra?  
Förklaring: Hur jämförs fyrhörning, triangel och cirkel med varandra, utifrån antalet hörn och sidor samt görs det med olika representationsformer?
6. Behandlas begreppen klot, kon, cylinder och rätblock?
7. Behandlas klot, kon, cylinder och rätblock utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel med konkret material, ord eller bilder?  
Förklaring: Behandlas begreppen hörn, sidoyta och kant? Hur behandlas och beskrivs klot, kon och cylinder. Vilka representationsformer används, hur konkretiseras detta?
8. Behandlas det hur objekten relaterar till varandra?  
Förklaring: Behandlas och jämförs dessa med varandra, likheter och skillnader, på ett konkret sätt, får eleverna använda egna ord för att uttrycka detta?
9. Behandlas sambanden mellan samtliga ovanstående begrepp?  
Förklaring: Behandlas att ett rätblock består av till exempel rektanglar och/eller kvadrater, att en cylinder består av två cirklar och en rektangel med mera? Behandlas att man kan definiera en triangel utifrån tre punkter med linjer emellan?

Detta sammanställdes sedan i en tabell genom att sätta X eller -, om det fanns med eller inte. Därefter undersöktes läromedlen ytterligare en gång för att fördjupa analysen och analysera hur de tog upp begreppen. Detta gjordes flera gånger för att på ett hermeneutiskt sätt gå från helhet till delar och hitta det väsentliga som skulle ge svar på analysfrågorna.

### 3.5 Databearbetning och analysmetod

Vid analysen är det viktigt att sätta parentes kring sin förförståelse, enligt Fejes och Thornberg (2009, s. 136), för att på det sättet kunna analysera data mer öppet och fördomsfritt. Jag har försökt hitta de begrepp jag sökte och hur de behandlas genom att hitta svar på analysfrågorna i texterna. Genom att ha analysfrågorna att utgå ifrån underlättar det arbetet att vara mer öppen och fördomsfri. Resultatet sammanställdes under rubrikerna "Punkt, linje och sträcka", "Fyrhörning, triangel och cirkel" samt "Klot, kon, cylinder och rätblock". Därefter analyserades detta utifrån den hermeneutiska cirkeln för att få fram likheter och skillnader mellan de olika läromedlen, samt om de bidrog till att eleverna ges möjlighet till att nå målen.

### 3.6 Trovärdighet och tillförlitlighet

Avsikten var att undersöka läromedel och om elever når målen utifrån kursplanen genom att arbeta i ett läromedel. Den metod som därför valdes var att använda kvalitativ textanalys med en hermeneutisk ansats, vilket jag anser vara en metod som ger svar på mina problemformuleringar, och därmed syftet med studien. Genom att skapa analysfrågor som verktyg vid analysen, kan studien replikeras av andra, vilket ökar möjligheten för andra att testa resultatet.

Om studien är trovärdig och tillförlitlig beror på hur noggrant och systematiskt forskaren har arbetat med sin datainsamling och analys, det vill säga om forskarens förståelse och uppfattning i ämnet kan ha påverkat resultatet (Fejes & Thornberg 2009, s. 136).

I metoddiskussionen tar jag upp de brister som kan finnas och hur min förståelse kan ha påverkat resultatet samt om jag, som Fejes och Thornberg säger, har ett kritiskt men också kreativt tänkande. Något de menar att en forskare inom kvalitativ forskning behöver ha.

## 4 Presentation av läromedlen

**Matte ELDORADO** av Ingrid Olsson och Margareta Forsbäck är från 2009 (tryckt 2011) och finns just nu från F-3 men 4-6 är under produktion.

Lärohandledningen börjar med att presentera grundtankar som till exempel språkets betydelse, eftersom eleverna utvecklar begreppsförståelse genom att kommunicera. De påtalar vikten av att skapa inre bilder, se mönster och strukturer med mera. Varje kapitel inleds med lärandemål och avslutas med en utvärdering. I lärohandledningen finns en tabell med det centrala innehållet från kursplanen och de moment i läromedlet som motsvarar punkterna i centrala innehållet. Under centrala innehållet ”Grundläggande geometriska objekt...” ser det ut så här:

LGR 11 Centralt innehåll åk 1-3	Åk 1 Innehåll i Eldorado 1A och 1B	Åk 2 Innehåll i Eldorado 2A och 2B	Åk 3 Innehåll i Eldorado 3A och 3B
Grundläggande geometriska objekt, däribland punkter, linjer, sträckor, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock samt deras inbördes relationer. Grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt.	Jämföra figurer och kroppar och beskriva likheter och skillnader Koppla ihop namn och bild för klot, kub, rätblock, triangel, kvadrat, rektangel och cirkel Namnge månghörningar utifrån antalet hörn	Beskriva egenskaper hos: klot, kub, rätblock, triangel, kvadrat, rektangel och cirkel Namnge klot, kub, rätblock, triangel, kvadrat, rektangel, cirkel	Beskriva egenskaper hos: klot, kub, rätblock, cylinder, triangel, kvadrat, rektangel och cirkel Beskriva likheter och skillnader hos fyrhörningar (parallelogram, romb, parallelltrapets) och trianglar (rätvinklig, trubbvinklig, spetsvinklig) Namnge parallelogram och romb

(Ur Olsson och Forsbäcks bok Eldorado, 2010, s.10)

Efter detta presenterar de matematiken i just den aktuella grundboken under rubriker som problemlösning, rumsuppfattning och geometri, kursplanen och mål åk X och så vidare. De tar upp lärande i matematik till exempel olika representationsformer, från konkret till abstrakt, bedömning, diagnoser, prov etcetera. Därefter presenteras de olika kapitlen i grundboken. I slutet av lärohandledningen finns en tidsplan och kopieringsunderlag.

**PIXEL** av Björnar Alseth, Henrik Kirkegaard och Mona Rösseland gavs ut som svenska utgåva 2008 (tryckt 2010) finns från förskoleklass till år 6.

Lärohandledningen börjar med en inledning där de poängterar tre aspekter; att arbeta praktiskt, utforskande och kreativt med hjälp av ett varierat arbetssätt, att ge anpassad undervisning inom ramen för ett gemensamt lärande samt att ha tydligt ämnesmässigt fokus och progression i linje med läroplanen. Därefter presenterar de läromedlets uppbyggnad det vill säga de olika böckerna. Sedan har de en rubrik de kallar ”Pixels mål för årskurs X”.

Under geometri har de dessa mål: (Då har jag bara tagit med de punkter som jag har fokuserat på, det vill säga geometriska objekt.)

För åk 1: Eleverna ska känna igen och beskriva enkla två- och tredimensionella figurer i relation till hörn, kanter och sidor. Det betyder t.ex. att de ska kunna säga vilka sidor en pyramid är uppbyggd

av, och hur många kanter och sidor den har. Eleverna ska kunna sortera figurerna efter dessa egenskaper.

De geometriska kroppar som eleven ska veta formen på och kunna särskilja är: cylinder, klot, rätblock och pyramid. De tvådimensionella är cirkel och månghörningar som trianglar, kvadrater och eventuellt femhörningar (pentagoner) och sexhörningar (sexagoner).

För åk 2: Känna igen och beskriva egenskaper hos två- och tredimensionella figurer relaterat till hörn, kanter och sidoytor och sortera figurerna efter de egenskaperna. De tredimensionella figurer som eleverna studerar är kub, rätblock och pyramid, medan de tvådimensionella är månghörningar som rektangel, kvadrat och parallelogram.

- Att bygga tredimensionella geometriska figurer och förstå teckningar av dem.
- Att skapa och undersöka enkla geometriska mönster och beskriva dem muntligt.

För åk 3:

- Att känna igen och beskriva egenskaper hos cirklar och månghörningar (Alseth m.fl., 2010).

Efter detta tar de upp de grundläggande färdigheter eleven ska utveckla som att uttrycka sig muntligt och skriftligt samt att kunna läsa och räkna. Sedan kommer förslag till läsårsplanering och därefter presenteras de olika kapitlen i grundboken. I slutet har de kopieringsunderlag. De har kompletterat sitt läromedel med ett nytt material som heter "Säkra målen" där de kopplar till Lgr11, detta har jag dock inte haft tillgång till vid denna studie.

**Mästerkatten** från 2002, redaktör Curt Öreberg och Gleerups utbildning AB, sträcker sig från förskoleklass till år 3. Lärarhandledningen börjar med att presentera målsättningen som är glädje och nyfikenhet, läromedlet använder sig av sagor som de menar tränar barn att bland annat tala matematik. Varje kapitel inleds med barnens egen innehållssida, för att barnen ska förstå hur, varför och vad de lär sig. Ett av målen är att inläring av nya begrepp alltid ska utgå från laborationer med konkret material.

Inom geometri behandlas detta:

För år 1: -

För år 2: Under rubriken "Dela lika" finns geometriska former. I elevboken finns uppgifter där eleverna ska benämna triangel, kvadrat, rektangel och cirkel samt räkna antal sidor och hörn.

För år 3: Under samma rubriker som för år 2 har de geometriska former, här finns trianglar, fyrhörningar och femhörningar som eleverna ska mäta omkretsen på. De har en uppgift där eleverna ska ta med sig kartonger hemifrån och räkna antalet hörn, sidor och kanter. Eleverna ska lära sig begreppen rätblock, kub, "få rum", rymmer och volym. De får "utbredningar" (det vill säga kopieringsunderlag med utvikta tredimensionella kroppar som på så sätt gjorts tvådimensionella) av kropparna rätblock, kub och prisma (med basen i form av en triangel) som eleverna ska klippa ut och sätta ihop. Eleverna ska dessutom bygga rätblock, kub, pyramid och tetraeder med olika material. De ska också hemma leta efter andra former.

## 5 Resultat och analys

### 5.1 Resultatöversikt

För att kunna ha ett kritiskt förhållningssätt till läromedel och hur de kan användas måste man veta vad man ska förhålla sig till. Här nedan har därför en matris skapats som visar om de analyserade läromedlen har med de delar som krävs för att eleverna ska nå målen i år 3 för det valda området, grundläggande geometriska objekt. Om de har detta markeras detta med ett X, om det saknas med ett -. Därefter redogörs för resultatet utifrån rubrikerna ”Punkt, linje och sträcka”, ”Fyrhörning, triangel och cirkel”, ”Klot, kon, cylinder och rätblock” och slutligen görs en analys under rubriken ”Likheter och skillnader”.

	<b>Eldorado</b>	<b>Pixel</b>	<b>Mästerkatten</b>
Behandlas begreppen punkt, linje och sträcka?	X	Punkt behandlas endast som en punkt i ett koordinatsystem, linje och sträcka tas upp	-
Behandlas punkt, linje och sträcka utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel genom bilder och/eller ord?	X	Punkt behandlas inte, eleverna ska rita och samtala om parallella linjer, sträcka endast under ”Mätning av sträckor”	-
Behandlas begreppen fyrhörningar, triangel och cirkel?	X	X	X
Behandlas fyrhörningar, triangel och cirkel utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel med konkret material, ord eller bilder?	X	X OBS! De kallar månghörningarnas linjer för kanter och använder flera gånger begreppet ”fyrkant”	X De tar endast upp triangel, kvadrat och rektangel, inga andra månghörningar, cirkeln benämns endast, de behandlar inte begreppen motstående sidor, parallella och vinklar
Behandlas det hur de relaterar till varandra?	X	X	X Utifrån antal hörn och sidor
Behandlas begreppen klot, kon, cylinder och rätblock?	X	X	Endast rätblock och kub

Behandlas klot, kon, cylinder och rätblock utifrån dess definitioner/egenskaper (analyseras) på ett konkret sätt till exempel genom konkret material, med ord eller bilder?	X (Kon ska bara benämnas)	X (Kon ska bara benämnas)	- (Endast rätblocket behandlas genom att räkna antal sidor, hörn och kanter)
Behandlas hur de relaterar till varandra?	X	X	-
Behandlas sambanden mellan samtliga ovanstående begrepp till exempel att ett rätblock består av rektanglar?	X	X	-

### 5.1.1 Punkt, linje och sträcka

Det är endast Eldorado som har detta som rubrik på tre sidor i grundboken. Eldorado tar upp punkt på en tallinje, ofta i form av ett streck men det kan också vara i form av ett X, där eleverna till exempel ska dra en linje från ett X till ett annat. Här finns övningar där eleverna ska sätta ut punkter på en linje, men också rita streck med linjal mellan tre punkter och förklara vilken figur det blev. Det är endast Eldorado som tar upp punkt, linje och sträcka som begrepp. Linje och sträcka tas upp som bilder och språkligt, samt färdighetsträning av dessa.

I Pixel nämns endast punkt i samband med koordinatsystem som eleverna ska sätta ut en punkt i. Eleverna ska dessutom dra streck från punkt till punkt och på det sättet rita en figur, men de behöver inte förklara eller benämna vilken figur de ritat. Eleverna ska rita parallella linjer och lära sig benämna linje och begreppet parallell. Pixel har som en ”utmana-uppgift” att rita fyra linjer kors och tvärs, alltså de får inte vara parallella. Denna övning är dock för att träna vinklar. Pixel tar upp sträcka under mätning till exempel ”Mät sträckorna”, inte som begreppsförklaring.

Mästerkatten tar inte upp dessa.

### 5.1.2 Fyrhörning, triangel och cirkel

Eldorado tar upp månghörningar, både de regelbundna och de oregelbundna, på olika sätt. Genom att studera bilder ska eleverna hitta de tvådimensionella formerna och samtala om dessa utifrån deras egenskaper men också jämföra dem. Eleverna ska också leta efter formerna i klassrummet och själva rita dem. I Eldorado ges förslag på konkret laborativt material. Eleverna ska också använda sig av geobräden och rita av de olika former de konstruerat på prickpapper. Eleverna ska genom att räkna hörn på bilder av trianglar och månghörningar tala om hur många hörn figuren har och vad den därmed heter, de ska också konstruera egna former och räkna hörn och benämna dem. Här finns också med former med inåtgående hörn. Vidare ska eleverna sortera de olika formerna efter egenskaper, här använder de logiska block. Eleverna ska också använda tangram-bitar för att göra olika fyrhörningar. Eldorado är det enda läromedlet som tar upp och beskriver cirkeln mer ingående: ”Veta att varje punkt på cirkelns periferi (omkrets) ligger lika långt från mittpunkten.” (Olsson & Forsbäck 1B, 2011, s.119). Här ska eleverna gå på cirkeljakt och rita av de föremål de hittat, eleverna ska jämföra cirkeln med ovaler, trianglar och kvadrater genom bilder som ska målas. De ska samtala med varandra och jämföra samt göra egna cirklar. Författarna föreslår att de ska konstruera cirklar ute med hjälp av ett snöre. En elev ska gå

runt den elev som står i mitten med ett snöre emellan sig, för att förstå definitionen av cirkeln. Eldorado har också med en uppgift i elevboken i form av en bild med barn som står runt en sten. Genom att flytta stenen ska barnen placera sig runt om på samma avstånd från stenen. Denna uppgift uppmanar författarna att göra med eleverna utomhus, för att skapa förståelse för cirkelns definition. Det finns som kopieringsunderlag en geometrisk ordlista som eleverna själva ska fylla i samt ett kopieringsunderlag med bilder på olika ”-hörningar” och en förklaring bredvid hur många hörn/sidor den har och sidornas längd i förhållande till varandra.

Pixel tar också upp begreppet månghörningar och eleverna får konstruera olika sådana och beskriva dess egenskaper, dock påpekar de att ”Eleverna kommer kanske att kalla kvadraten för en riktig fyrhörning. Det är i sin ordning, eftersom namnen inte är det viktigaste nu, även om vi bör vara exakta.”(Alseth, Kirkegaard & Rösseland 1A, 2010, s.108) i den första lärarhandledningen. Några rader nedanför skriver författarna att de härnäst kommer kalla månghörningarnas linjer för kanter och det viktigaste är att eleverna lär sig hur många kanter och hörn de olika figurerna har. De använder flera gånger ordet fyrkantig till exempel ”Är alla dörrar fyrkantiga?” (Alseth, Kirkegaard & Rösseland 1A, 2010, s.108). Författarna menar att en månghörning är en figur avgränsad av raka linjer och att dessa figurer kan läggas ”kant mot kant”. Därefter visas bilder på två fyrhörningar varav den ena har ett inåtgående hörn. Pixel utgår också från bilder som eleverna ska samtala om och leta efter de olika formerna. Eleverna ska rita olika månghörningar och cirklar men också gå på formjakt utomhus och försöka göra formerna med hjälp av sina egna kroppar. Det finns konkreta övningar med bilder där eleverna ska kategorisera utifrån antalet ”kanter” och hörn och jämföra vilka som är lika. I lärarhandledningen använder författarna begreppet kant för de tvådimensionella figurens sidor men i elevboken står det sidor. Det finns också övningar för att skapa mönster med de tvådimensionella formerna och här poängteras att eleverna ska beskriva dessa muntligt för att träna de geometriska begreppen. Även Pixel uppmanar till att använda sig av geobräda och prickpapper samt tangram. Pixel definierar rektangeln som en fyrhörning med bara räta vinklar och motstående sidor är lika långa, detta görs både med bilder och text, detsamma görs med olika trianglar och kvadraten. Cirklar benämns endast.

Mästerkatten tar upp kvadrat, rektangel, triangel och cirkel. Dessa ska benämnas och eleverna ska jämföra antalet hörn och sidor på dessa med bilder och text.

Inget av läromedlen tar upp att till exempel kvadraten *också* är en rektangel, parallelogram, parallelltrapets och fyrhörning.

### 5.1.3 Klot, kon, cylinder och rätblock

Eldorado börjar med de tredimensionella kropparna, vilket motiveras med att de är bekanta för barnen och att dessa går att ta i och bygga med. Även här utgår de från en bild som eleverna ska samtala om, till exempel vilka egenskaper som är gemensamma respektive olika, hur många olika sorters rätblock det finns med mera. Eleverna ska vidare med konkret material bygga olika figurer utifrån ritningar i boken, samt vrida och vända på dessa och passa in dem i hål. Eleverna ska med hjälp av bilder på olika förpackningar ta reda på egenskaper, likheter och skillnader mellan dessa. De ska med hjälp av klossar eller pärlor bygga olika figurer och beskriva dessa med ord samt räkna ut hur många av varje form som behövs till olika avbildade figurer som till exempel en månkrak. Eleverna ska också kunna rita de tredimensionella kropparna på isometriska prickpapper från olika håll och det finns konkreta övningar med bilder där eleverna ska se sambanden mellan de tvådimensionella och tredimensionella, samt deras egenskaper utifrån sida, hörn och kant. Här förtydligar författarna att det endast är de tredimensionella objekten som har kanter. Genom att se bilder av tredimensionella objekt (kub, olika rätblock, tetraeder, cylinder och prisma med triangulär botten) ska eleverna avgöra vilka tvådimensionella sidor som hör till just det objektet. Eleverna ska också själva rita hur sidorna på ett specifikt rätblock kommer se ut. Det finns också färdighetsträning för antal sidor, hörn och kanter i olika tredimensionella figurer. När

det gäller kon står det i lärarhandledningen att eleverna ska kunna namnet på den men den nämns inte i elevböckerna.

Pixel har också flera konkreta övningar för att beskriva egenskaper, bygga objekten, samt jämföra dem som utvikta/plana och para ihop med rätt objekt. De utgår också från en bild som eleverna ska samtala om och har avbildat cylinder, rätblock, pyramid, kon, kub och klot och sedan ska eleverna leta efter dessa objekt i bilden. Eleverna ska tala om deras egenskaper som att cylindern kan rullas, den kan tillverkas genom att man rullar ihop ett ark och toppen och botten är flata och består av cirklar och de kan sättas på varandra. Rätblockets egenskaper beskriver de bland annat som att det kan användas som tärning om alla sidoytor är lika stora och även de kan staplas. Klotet definierar de som att det kan rulla och att det är likadant hur vi än vrider det. Konens egenskaper tar de inte upp. Författarna uppmanar till att bygga med formerna för att upptäcka till exempel vilka som kan staplas på varandra. Pixel har också uppgifter för att jämföra två- och tredimensionella figurer, genom att visa bilder på dem ska eleverna rita hur de ser ut från olika håll. De har färdighetsträning för att räkna antalet sidoytor, hörn och kanter och utmanar genom att be eleverna räkna hur många sidoytor, hörn och kanter en cylinder respektive ett klot har. Pixel uppmanar till att bygga geometriska kroppar med plastbrickor och de har också uppgifter där eleverna ska lista ut vilken kropp som visas utvikt. De har kopieringsunderlag på utvikta kroppar som eleverna ska bygga ihop. Pixel har också med oregelbundna tredimensionella objekt som eleven ska undersöka hur många hörn, kanter och sidoytor dessa har. Eleverna ska jämföra de olika kropparna och tala om likheter och skillnader.

Mästerkatten tar upp att ett rätblocks sidoytor är rektanglar eller kvadrater, samt eleverna ska räkna antalet sidor, kanter och hörn på bilder som finns i boken. Eleverna ska lära sig namnen på rätblock och kub, och förstå begreppen ”få rum”, rymmer och volym, enligt lärarhandledningen. Eleverna får ”utbredningar” av formerna som de ska klippa ut och sätta ihop, men ingen djupare förklaring tas upp utan det är i form av en ”göra”- uppgift. I lärarhandledningen ges också förslag på att de dessutom kan bygga rätblock, kub, pyramid och tetraeder med olika material.

## 5.2 Likheter och skillnader

När det gäller punkt, linje och sträcka syns en tydlig skillnad mellan de tre analyserade läromedlen. Eldorado som utgår från det centrala innehållet i kursplanen där just dessa tre begrepp tas upp, har med dessa och förklarar också vad de betyder och hur de används inom geometrin. Eftersom det i tidigare läroplaner/kursplaner inte funnits ett centralt innehåll, har inte punkt, linje och sträcka specifikt poängterats, att eleverna ska kunna dessa begrepp. Pixel tar upp och benämner punkt, linje och sträcka men det saknas en grundligare begreppsförklaring utifrån det jag fokuserar på inom mitt valda område, geometriska objekt. I Mästerkatten tas de inte upp.

De tvådimensionella formerna tar samtliga läromedel upp men i olika omfattning. Samtliga läromedel definierar dess egenskaper med representationsformerna språkligt och konkret med bilder och plockmaterial. Dock tar Mästerkatten bara upp fyrhörningarna kvadrat och rektangel, de nämner inte att fyrhörningar också kan vara oregelbundna. Löwing (2011, s. 53) menar att det är viktigare att förstå de oregelbundna fyrhörningarna än kvadraten för att på det sättet utveckla sin kunskap om hur de tvådimensionella formerna relaterar till varandra. Cirkeln är det också bara Eldorado som utvecklar en begreppsdefinition till, den nämns endast vid namn i de andra.

När det gäller hur de relaterar till varandra har samtliga med uppgifter om detta, men även här i olika grad. Mästerkatten har endast ett par uppgifter där de jämför antalet sidor och hörn med hjälp av bilder och text. I både Eldorado och Pixel tas olika representationsformer upp, det är bilder, språkligt, både muntligt och skriftligt, samt olika förslag på laborativa övningar för att träna att jämföra de olika formerna, att se likheter och skillnader.

Samtliga läromedel tar upp de tredimensionella objektens egenskaper, dock tar Mästerkatten endast upp rätblock och kub. Det finns uppgifter för att analysera objektets sidoytor, kanter och

hörn och de ska lära sig deras namn. Både Eldorado och Pixel har flera uppgifter där eleverna på ett konkret sätt ska lära sig begreppen, de ska bygga, rita, vrida och vända och förstå hur de ser ut från olika håll, analysera dem utvikta men också uppgifter som handlar om färdighetsträning. Båda dessa läromedel har liknande uppgifter för att upptäcka hur objekten relaterar till varandra.

Det som skiljer Eldorado och Pixel åt är att Eldorado börjar med de tredimensionella objekten, vilket inte Pixel gör. Eldorado har också övningar där eleverna får träna att rita de tredimensionella kropparna genom att använda ett isometriskt prickpapper. Författarna till Eldorado påtalar att det endast är de tredimensionella objekten som har kanter. Båda tar upp att eleverna ska kunna namnet på konen, men ingen av dem tar upp dess egenskaper. Pixel har övningar där eleverna till exempel ska förklara cylinderns egenskaper utifrån att en kant och sidoyta också kan vara böjda. De har också uppgifter där klotets och rätblockets egenskaper förklaras. Pixel har också med oregelbundna kroppar vilket Eldorado inte har.

Den sista analysfrågan var om de tar upp sambanden mellan samtliga objekt. Mästerkatten tar upp att ett rätblock består av rektanglar eller kvadrater, vilket även de övriga läromedlen tar upp. Både Eldorado och Pixel tar upp vilka sidoytor som ett objekt består av när det gäller kub, rätblock och cylinder. Eldorado har en uppgift där eleverna ska se att det blir en triangel utifrån tre punkter med linjer emellan.

## 6 Diskussion

I min diskussion kommer jag att diskutera problemformuleringarna och om därmed syftet har nåtts, det vill säga vad det innebär att ha en begreppsförståelse i geometri, utifrån mitt begränsade innehåll, grundläggande geometriska objekt. Dessutom kommer jag att diskutera om de läromedel som används i skolor idag i år 1 till 3 innehåller det som krävs för att eleverna ska nå målen, utifrån det valda området, begreppsförståelse och grundläggande geometriska objekt, deras egenskaper och relationer till varandra.

Diskussionsavsnittet avslutas med en metoddiskussion.

- **Vilken kunskap i geometri krävs för att nå upp till målen i grundskolans läroplan? Vad krävs för att förstå begreppen omkrets, area och volym?**

Dessa frågor besvarades utifrån läst litteratur och vad tidigare forskning säger. Det krävs en god begreppsförståelse för att nå upp till målen i geometri. Här har den vuxne, i detta fall läraren, en viktig roll. Denne måste först klargöra vilken begreppsuppfattning eleven har och det kan göras med laborativt material och genom att föra en dialog med eleven. Därefter ska läraren hjälpa eleven att utveckla sin begreppsuppfattning. För att lyckas med detta måste läraren själv ha en god begreppsförståelse och förmåga att föra en bra kommunikation med eleven. Om man då som lärare väljer att låta eleverna arbeta med ett läromedel en stor del av tiden är det viktigt att man kritiskt har granskat läromedlet. Det ska finnas övningar som gör att eleven, och läraren, upptäcker vilken begreppsförståelse eleven har och det måste finnas uppgifter för att eleven ska kunna utveckla sin begreppsförståelse, det vill säga konkreta och kommunikativa övningar.

Tall och Vinner (1981, s. 2ff) menar att de begrepps bilder vi har med oss så småningom ska närma sig den korrekta begreppsdefinitionen i matematik. Om vi till exempel tar cirkeln vars definition enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 214) är "Kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)." Den definitionen är inte lätt för yngre barn att förstå, vilket också märks i de analyserade läromedlen eftersom definitionen bara behandlas till viss del i ett av läromedlen. Men grunden kan ändå läggas genom att börja med att diskutera till exempel begreppen punkt, medelpunkt, avstånd och kurva. När dessa begrepp är befästa kan man bygga på med fler för att till slut komma till en förståelse för definitionen för cirkeln.

Att undervisningen, speciellt för yngre elever, måste konkretiseras mer syns tydligt i den litteraturgenomgång jag gjort. Men som Skolverkets rapport (2011b, s. 88) säger, målet ska inte vara att arbeta mer laborativt, utan att arbeta laborativt är ett arbetssätt för att skapa större förståelse i undervisningen, för att nå lärandemålen. Konkretisera undervisningen kan också göras med bilder, både i form av bilder i böckerna men också att eleven ska göra egna bilder.

Ytterligare en representationsform är den muntliga, kommunikationen, att låta eleverna själva få använda språket för att på det sättet utveckla sina begrepps bilder. Detta kan givetvis också göras via det skriftliga språket men jag kan se en brist här, speciellt när det gäller yngre barn. I denna studie har jag tittat på läromedel upp till år 3, då eleven är cirka 9 år. Deras skriv- och läsförståelse kanske inte är helt utvecklad vid den åldern, dessutom har många barn i svensk skola ett annat hemspråk än svenska. Det är då viktigt som lärare att vara observant på om eleven utvecklar sitt lärande tillräckligt om man till stor del använder sig av tyst räkning i ett läromedel.

För att förstå begreppen omkrets, area och volym krävs alltså att barnen tidigt fått bekanta sig med matematiska begrepp och fått en förståelse för detta på ett konkret sätt, genom att praktiskt fått laborera och med ord fått uttrycka sig och inte bara arbetat med detta teoretiskt i ett läromedel. Johansson (2006, s. 31ff) talar om att många elever upplever matematiken tråkig och att undervisningen bör varieras mer, genom att låta dem (åter-) upptäcka matematiken

(Skolverket, 2011b, s. 85). Eleverna skulle då kunna få uppleva att matematik kan vara spännande till exempel genom att få härleda cirkelns area, få upptäcka gyllene snittet i pentagonen och liksom Platons lärjungar omskriva cirkeln med in- och omskrivna figurer. Enligt Tengstrand (2005, s. 103) kan kunskaper i geometri också bidra till att övriga matematiska kompetenser utvecklas till exempel problemlösningsförmåga.

En tanke som väcks är varför matematik är ett ämne som av många elever upplevs som svårt, eftersom matematiken är ett ämne som bygger på definitioner och formler som funnits länge, till skillnad från många andra skolämnen som ständigt förändras med tidens gång. Sjögren (2011, s. 55ff) tar upp att matematik inte är en empirisk vetenskap och att begreppsbyggnaden är relaterad till begrepp förvärvade i matematikundervisningen. Definitionerna för begrepp har funnits sedan Euklides tid och vissa ännu längre, då kan man ställa sig frågan varför begreppsförståelsen hos dagens elever är så svag, är det en rent didaktisk fråga?

- **Hur presenteras de grundläggande geometriska objekten i några läromedel? Kan man nå läroplanens mål i geometri för år 3 genom att arbeta med olika läromedel?**

I den studerade litteraturen visade sig tre avgörande faktorer för en god undervisning nämligen; tydliga mål med undervisningen, att konkretisera undervisningen och att arbeta mot en ökad begreppsförståelse. När det gäller mål med undervisningen ska dessa utgå från syftet, det centrala innehållet och kunskapskraven och utifrån detta ska mål konkretiseras som är tydliga för eleven (Skolverket, 2011a, s. 62). Här uppger både Eldorado och Pixel att de jobbar mot mål. Eldorado menar att varje kapitel inleds med lärandemål, ett exempel på detta är ”Geometriska kroppar”. Jag anser inte att detta är ett mål, det är en rubrik som anger vad kapitlet innehåller. Enligt mig borde ett lärandemål vara formulerat utifrån syftet och kunskapskraven, till exempel: ”Du ska kunna ge exempel på hur några begrepp relaterar till varandra.” (Skolverket, 2011a, s. 62). Pixel har beskrivna mål i inledningen i lärarhandledningen som till exempel ”känna igen och beskriva enkla två- och tredimensionella figurer”, sedan har de också rubriker, men dessa står inte i elevböckerna. Mästerkatten tar inte upp mål. En tydligare koppling mellan mål och arbetssätt, och att lärare måste vara mer kritiska till läromedel talar både Skolinspektionen (2009:5, s. 21) och Bergqvist (2009, s. 49) om. Detta ser jag som en brist i de läromedel jag analyserat. Mästerkatten är från 2002 och min erfarenhet är att mål inte användes i undervisningen då, vilket antagligen är orsaken till att de inte har med mål. Författarna till både Eldorado och Pixel är medvetna om vikten av att jobba mot mål men här bör läraren komplettera undervisningen med tydliga mål eftersom det i elevböckerna inte finns tydliga sådana.

I samtliga läromedel som analyserats syntes det att författarna är medvetna om vikten av att använda sig av laborativt materiel, även om det i Mästerkatten syntes minst av detta, vilket kan bero på att geometri är en mycket liten del av det totala innehållet i Mästerkatten. Både Pixel och Eldorado har flera uppgifter i elevböckerna och förslag i lärarhandledningen på olika sätt att använda laborativt materiel i undervisningen som till exempel geobräden, klossar, former, tangram med mera. Samtliga läromedel använder sig av bilder för att konkretisera till exempel de två- och tredimensionella objekten. I Mästerkatten finns ingen uppgift att eleverna ska rita dem själva men det finns i de andra. Eldorado går ett steg ytterligare, anser jag, när eleverna också ska rita dem på isometriskt prickpapper vilket kan ge eleverna en djupare känsla för det tredimensionella. Undervisningen, speciellt för yngre elever, bör också vardagsanknytas mer. Samtliga behandlar att eleverna ska leta efter formerna eller kropparna i närmiljön och de har bilder på till exempel olika förpackningar.

Det skulle vara intressant att fortsätta denna studie med att undersöka läromedel för högre årskurser för att se om de läromedel som används då behandlar till exempel areans konservering och additivitet som Bentley (2008, s. 84) menar är en stor brist hos många elever. Area introduceras till viss del i dessa läromedel men eftersom area inte finns med i kursplanerna förrän

i år 6 har inte detta undersökts. Kanske omkrets och area borde finnas med i det centrala innehållet för år 3? Intressant vore att undersöka om läromedel introducerar areabegreppet på det sätt Löwing (2011, s. 126) anser bäst med de oregelbundna formerna och ett rutnät? Om det finns uppgifter där eleverna får klippa isär och sätta ihop till exempel en parallelogram för att på det sättet konkret få en förståelse för area? Bergqvist m.fl. påtalar betydelsen av att läromedel utgår från kompetenserna, i detta fall begreppsförståelsen, och inte bara procedurhantering (Bergqvist m.fl., 2009, s.43). Skolverkets rapport (2011b, s. 85) anser att läromedel dock behövs för färdighetsträning. Denna undersökning visar att de två nyare läromedlen i större utsträckning än det äldre behandlar just kompetenserna, men är det likadant i läromedel för äldre elever? Eller blir läromedlen mer och mer inriktade på procedurhantering istället för kompetensfokuserade?

I de analyserade läromedlen syns tydligt att punkt, linje och sträcka inte är något som vanligtvis behandlas i dessa årskurser. Det är bara Eldorado, som utgår från kursplanen 2011, som tar upp dessa utifrån deras egenskaper och relationer. Detta kräver att lärare är kritiska till läromedel och att de själva kan definitionerna för punkt, linje och sträcka så att de kompletterar med detta om de använder ett läromedel som inte tar upp punkt, linje och sträcka. Punkt och linje behandlas i samband med koordinatsystem i de två nyare läromedlen och Eldorado behandlar också stråle, trots att inte stråle finns med i det centrala innehållet för något år i grundskolan. Men kursplanen använder ordet ”däribland” som kan tolkas som att punkt, linje och sträcka är exempel och att man kan ta upp andra begrepp.

I centrala innehållet för år 1-3 står det begreppet *fyrhörningar*, vilket jag tolkar som att även begreppet fyrhörning ska läras ut. Definitionen för fyrhörning är månghörning med fyra hörn, detta inbegriper de oregelbundna, de med inåtgående hörn, parallelltrapetsen, parallelogrammen, rektangeln, romben och kvadraten. I centrala innehållet för år 6 står det istället polygoner, vilket lämnas till viss del fritt för tolkning. Menar läroplansförfattarna att eleverna ska kunna samtliga fyrhörningar med namn, egenskaper och inbördes relationer i år 3? Löwing (2011, s. 53) påtalar att begreppet fyrhörning är viktigare än begreppet kvadrat för yngre barn och detta tydliggörs inte i något av de analyserade läromedlen.

Mästerkatten tar bara upp kvadraten och rektangeln, de övriga tar upp samtliga fyrhörningar förutom att Pixel inte nämner romben. I Eldorado behöver de inte namnge parallelltrapetsen men de övriga. Det som är anmärkningsvärt här är att Pixel menar att de tvådimensionella figureernas sidor ska benämnas kanter, enligt Kiselman och Mouwitz (2008, s. 222) är definitionen för kant ”(i en polyeder) icke-tomt snitt av två sidor i polyedern.” Löwing (2011, s. 54) påtalar just vikten av att uttrycket *fyrkant* används felaktigt eftersom begreppet kant endast förekommer inom rymdgeometrin. Hur ska man då benämna den liksidiga triangeln, likkantig? Författarna till Eldorado påtalar att det är viktigt att lära eleverna skillnaden på sida och kant. Dessutom menar författarna till Pixel att månghörningar kan läggas ”kant mot kant” men visar alldeles nedanför en bild av en fyrhörning med inåtgående hörn och dessa ställer jag mig frågande till om de går att lägga ”kant mot kant” med till exempel en kvadrat?

Detta är ytterligare skäl till att vara kritisk till de läromedel man använder sig av i skolan, för att underlätta för barns utveckling av begreppsförståelsen. Det är av stor vikt att de i skolan får lära sig rätt från början.

Samtliga analyserade läromedel tar upp rätblock och kub. I centrala innehållet står endast rätblock men eftersom även kuben är ett rätblock men med lika långa kanter, utgår jag från att läroplansförfattarna inbegriper kuben under benämningen rätblock. Att kuben är en slags rätblock tas inte upp i de analyserade läromedlen. Cylinder tar Pixel och Eldorado upp. Pixel tar upp den på ett mer grundläggande sätt än Eldorado eftersom de talar om cylinderns egenskaper utifrån böjd kant och sidoyta. Pixel har med att kon ska benämnas men inte dess egenskaper. Eldorado tar i lärarhandledningen upp att eleverna ska kunna namnet på konen, men detta nämns

inte i elevböckerna. Här ställer jag mig frågan varför läroplansförfattarna har valt att ha med just konen för år 3, varför inte pyramiden eller prismet?

Eftersom det bara är Eldorado som tar upp punkt, linje och sträcka så är det bara i detta läromedel jag har hittat en uppgift, som även Löwing (2011, s. 38) tar upp som exempel, där eleverna ska rita linjer mellan tre punkter och definiera vilken figur det blev, för att se sambandet mellan punkter och linjer och en triangel.

Samband mellan två- och tredimensionella objekt tar samtliga läromedel upp men i Mästerkatten finns endast en uppgift med detta och då är det att rätblocket består av rektanglar eller kvadrater. Pixel och Eldorado har flera sådana uppgifter, men konen, som sagt var, benämns bara.

Intressant är att Löwing (2011, s. 91) menar att eleverna ska få lära sig de tvådimensionella figurerna först men Littler och Jirotková i Boesen m.fl., (2007, s. 63) anser att det är naturligare att börja med de tredimensionella kropparna och att lärare därmed inte utnyttjar den kunskap barnet har med sig från leken med de tredimensionella objekten. Kanske har det inte så stor betydelse om barn lär sig de tvådimensionella eller tredimensionella först?

Jag ställer mig frågan om det är möjligt att få en god begreppsförståelse utifrån ett läromedel, speciellt när det gäller yngre barn. Löwing (2011, s.21ff) menar att barn behöver konkret material för att få en god begreppsförståelse, de behöver få känna, vrida och vända. Då kanske en lärarhandledning kan vara till stöd för läraren men frågan är i vilken omfattning en elevbok behövs för just begreppsförståelse? Skolverkets rapport (2011b, s. 85) menar att läromedel behövs för färdighetsträning och där skulle användandet av läromedel ha ett syfte.

Bergqvist (2009, s. 18) menade att 50-100 procent av undervisningstiden i matematik arbetade elever i svensk skola utifrån ett läromedel men att det var mindre ju längre ner i årskurserna man kom. Detta tolkar jag som att det i så fall ändå är cirka 50 procent av tiden i år 1 – 3 som elever arbetar enskilt i ett läromedel. Skolinspektionen är också kritisk till att läroböckerna tränar kompetenser för lite, i mitt fall att kunna använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp (Skolverket, 2011a, s. 62). De nyare läromedlen i denna studie har fler sådana uppgifter än det äldsta läromedlet. En orsak till detta kan givetvis vara att den nya läroplanen lyfter kompetenserna på ett tydligare sätt än vad som gjorts tidigare och detta har läromedelsförfattare på senare tid tagit fasta på.

Kan man alltså nå målen i geometri genom att arbeta med ett läromedel? Innehåller dessa tre läromedel det som krävs? Det var frågan som ställdes i syftet med denna studie, och svaret på den blir både ja och nej.

Eldorado är det läromedel som utgår från kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a) och det är också det läromedel som jag anser har med det som krävs, eventuella brister är att de menar att de har lärandemål i inledningen av varje kapitel, vilket jag anser att det inte är, och det finns brister när det gäller det geometriska objektet kon.

Pixel har egna mål som inte är kopplade till kursplanen, men detta har de nu kompletterat med ett extramaterial, som inte tagits i beaktande i denna studie. Pixel skulle precis som Eldorado kunna ha det som krävs, men jag ställer mig kritisk då de använder grundläggande begrepp på ett felaktigt sätt vilket kan bidra till att det förvirrar elevers begreppsförståelse.

Mästerkatten kommer inte bidra till att eleverna når kunskapsmålen i geometri, det saknas allt för många delar.

## 6.1 Metoddiskussion

Jag kan aldrig bortse från min egen förförståelse av ämnet som forskare men det är ändå av vikt att vara medveten om detta och hur det kan ha påverkat resultatet. I teorigenomgången har jag läst in mig på ämnet och där visas till viss del den förförståelse jag utgått ifrån i denna studie, den är dock begränsad till det val som gjorts av litteratur. Jag har haft en hermeneutisk ansats vid analyserandet av texterna, vilket innebär att det är min tolkning och här finns risken att om någon annan skulle göra detsamma skulle denne tolka på ett annat sätt. Men genom att göra analysen och tolkningsarbetet så genomskinligt som möjligt minskar den risken. Detta har jag försökt genom att göra mina analysfrågor av texterna så konkreta som möjligt, men det finns risk att jag kan ha missat saker och/eller feltolkat författarna till läromedlen. Men de analysfrågor som skapats för just denna studie går att använda på fler läromedel och av andra som vill göra en liknande undersökning.

De läromedel som användes för analysen skiljde sig åt i flera avseenden. Det första var ett svenskt, nytt, läromedel där författarna har haft läroplanen från 2011 som utgångspunkt. Det andra läromedlet kom från Norge och om de haft svensk eller norsk läroplan som utgångspunkt framgår inte men det är utgivet innan den senaste svenska läroplanen infördes. Det tredje läromedlet är tio respektive elva år äldre än de övriga och när det utgavs var det inte vanligt att man i svensk skola arbetade mot mål och det fanns inte heller något centralt innehåll som var styrt uppifrån.

Jag har som metod för den empiriska studien valt att endast analysera texter i läromedel, eftersom det var syftet med min studie. Jag har därför inte tagit i beaktanden hur läromedlen används av lärare, vilket jag hade kunnat komplettera min studie med. Genom observationer och intervjuer av lärare och elever hade jag fått ett mer tillförlitligt resultat av hur läromedlet används i klassrummet och dess påverkan på elevers måluppfyllelse. Jag anser med detta att jag har haft ett kritiskt och kreativt tänkande vilket Fejes och Thornberg (2009, s. 136) anser att en forskare ska ha.

## 7 Slutsats

Det första syftet med denna studie var att ta reda på vad som krävs för att elever ska nå målen att kunna använda och analysera begrepp, samt se samband mellan begrepp utifrån det centrala innehållet som var grundläggande geometriska objekt. Slutsatsen blir att det krävs ett medvetet arbete med att utveckla elevers förståelse för begrepp. Detta görs genom att använda olika representationsformer, yngre barn behöver få använda konkret material men också få höra och själva använda sig av språket för att utveckla sin begreppsförståelse. En god begreppsförståelse är en förutsättning för att elever i senare år ska klara målen i geometri, att till exempel förstå areans konservervation och additivitet (Bentley, 2008, s. 84). I geometri måste eleverna i år 3 kunna begreppen punkt, linje, sträcka, fyrhörningar, trianglar, cirklar, klot, koner, cylindrar och rätblock. De måste dessutom kunna begrepp för att beskriva deras egenskaper och inbördes relationer som till exempel sida, hörn, kant, motstående, parallell med mera. Dessutom ska de kunna beskriva olika fyrhörningar och vad som skiljer dem åt, samt olika rätblock.

Det andra syftet var att ta reda på om utvalda läromedel kan bidra till att målen nås. Bentley menar att i Sverige är det i hög grad ett läromedel som styr undervisningen. Detta var en av anledningarna till denna studie där tre läromedel för år 1-3 har analyserats för att undersöka om eleverna når kunskapsmålen i år 3 genom att arbeta utifrån dessa läromedel. Teorigenomgången visade att elever lär sig begrepp via olika representationsformer, såsom konkreta och laborativa övningar, många möjligheter att uttrycka sig språkligt men också genom att undervisningen bygger på tydliga mål. Därför måste de läromedel eleverna arbetar med i skolan innehålla dessa delar. De analyserade läromedlen visade på skiftande resultat när det gäller om de kan bidra till att målen nås. Eldorado var det läromedel som i störst grad bidrog till detta medan Mästerkatten inte kommer att bidra till att eleverna når målen.

Denna studie har bara undersökt den del av det centrala innehållet i kursplanen som behandlar geometriska objekt, men hur dessa läromedel når kraven för de övriga punkterna i innehållet visar inte denna studie.

Min slutsats efter detta blir att det är av yttersta vikt att läraren har goda både matematiska och didaktiska kunskaper. Löwing (2011, s. 7) menar att det är lärarens kunskaper som begränsar vad eleverna lär sig och att skolans, det vill säga lärarnas, undervisning i större grad måste lära yngre barn grundläggande begrepp och egenskaper hos geometriska objekt. Resultatet av min studie visar att det inte går att lita på att författare till läromedel har den kunskapen, utan ansvaret ligger hos den enskilde läraren. Den nya läroplanen med ett styrt centralt innehåll gör att de läromedel som är av äldre datum kanske saknar just de delar som handlar om geometri, eftersom geometrin har fått en större plats inom matematiken efter införandet av Lgr 11 (Skolverket, 2011a).

## Litteraturlista

- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 1A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 1B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 2A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 2B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 3A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Alseth, B., Kirkegaard, H. & Rösseland, M. (2010). *Pixel. Lärbok 3B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Bentley, P-O. (2008). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar procedurer*. Skolverket: Analysrapport till 323, 2008.
- Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (2011). *Matematik- ett grundämne*. Nämnaren tema: Göteborgs universitet.
- Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet Grundskolan våren 2009*. NCM: Göteborgs universitet.
- Boesen, J., Emanuelsson, G., Wallby, A., & Wallby, K. (2007). *Lära och undervisa matematik- internationella perspektiv*. NCM: Göteborgs universitet.
- Bråting, K. (2004). *A Study of the Development of Concepts in Mathematics*. Licentiatavhandling, Uppsala Universitet.
- Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Fischer.
- Fejes, A., & Thornberg, R. (2009). *Handbok i kvalitativ analys*. Stockholm: Liber.
- Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och runsuppfattning- med Känguruproblem*. NCM: Göteborgs universitet.
- Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks A Classroom and Curricular Perspective*. Doktorsavhandling, Luleå University of Technology.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM: Göteborgs universitet.
- Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri – matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.
- Matteguiden, <http://www.matteguiden>, hämtad 2012-06-07.
- Nilsson, G. (2005). *Att äga  $\pi$ : praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Doktorsavhandling. Göteborgs universitet, 2005.
- Noél, E. (2001). *Matematikens gryning*. Lund: Studentlitteratur.

- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 1A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 1B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 2A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 2B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 3A*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, I. & Forsbäck, M. (2011). *Matte Eldorado Lärarbok 3B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Olsson, S. (1999). *Matematiska nedslag i historien*. Solna: Ekelunds Förlag AB.
- Picutti, E., Edwards, H., Schwartz, L., m.fl. (2000): *Stora matematiker- från Fibonacci till Wiles*. Lund: Studentlitteratur.
- Prytz, J. (2007). *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*. Doktorsavhandling. Uppsala universitet, 2007.
- Sjöberg, B. (2000). *Från Euklides till Hilbert. Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år*. Åbos akademis förlag.
- Sjögren, J. (2011). *Concept formation in mathematics [Elektronisk resurs]*. Doktorsavhandling. Göteborgs universitet, 2011.
- Skolinspektionen (2009:5). Sverige. *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Stockholm: Skolinspektionen.
- Skolverkets läroplan (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011b). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder En utvärdering av Matematiksatsningen*. Stockholm: Skolverket.
- SOU 2004:97, *Att lyfta matematiken- intresse, lärande, kompetens*.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Warwick: University of Warwick. <http://go.warwick.ac.uk/wrap>
- Tengstrand, A. (2005). *Åtta kapitel om geometri*. Lund: Studentlitteratur.
- Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.
- Wikipedia, <http://sv.wikipedia.org>, hämtad 2012-06-07.
- Öreberg, C. (red.) (2002). *Mästerkatten 1-2 Lärarens bok*. Malmö: Gleerups utbildning AB.
- Öreberg, C. (red.) (2002). *Mästerkatten 3-4 Lärarens bok*. Malmö: Gleerups utbildning AB.
- Öreberg, C. (red.) (2002). *Mästerkatten 5-6 Lärarens bok*. Malmö: Gleerups utbildning AB.